

Tarea Extraclases para la Matemática III en la Universidad de Ciencias Informáticas (UCI)

Lic. Elizabeth Rodriguez Stiven

Graduada en la Universidad de la Habana, en Ciencias de la Computación

E-mail: beth@uci.cu

Lic. Anelys Vargas Ricardo

Graduada en la Universidad de la Habana, en Radio Química.

E-mail: anelys@uci.cu

Actualmente profesoras de matemática de la Universidad de la Ciencias Informáticas (UCI). Teléfono: 8358049.

Resumen

Una de las principales metas de la Universidad de Ciencias Informáticas (UCI) es la formación de los habilidades que permitan la preparación independiente de los estudiantes; estableciendo vínculos sólidos entre el desarrollo de la ciencia en la sociedad actual.

Entre las tantas materias que se imparten a lo largo de la carrera esta incluida la Matemática III, que tiene como objetivos esenciales contribuir a la creación de una base sólida de conocimiento, habilidades y valores que le permitirán al estudiante una adecuada proyección en su vida laboral como Ingeniero Informático.

Este trabajo tiene como objetivo principal incentivar la habilidad investigativa en los estudiantes proponiendo una estructura de trabajo investigativo que tribute al perfil del graduado. Haciendo énfasis en la modelación matemática y resolución de problemas de sociales.

Palabras claves: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, modelación matemática, resolución de problema.

Introducción

Bajo el epígrafe Graduado Universitario en Ciencias Informáticas son impartidas más de 50 materias a lo largo de cinco años, en los que ofrecer una adecuada formación al graduado para que se inserte laboralmente en instituciones y empresas.

En los últimos años se han creado en nuestro país miles de puestos de trabajo relacionados con las Ciencias Informáticas en las distintas empresas y organismos. Ello da idea de la importancia creciente que la Informática va tomando en la sociedad actual. De hecho, no puede hablarse de una empresa moderna y al día si no ha incorporado a sus exigencias internas una informatización adecuada del proceso. Esta demanda continúa creciendo, hasta el punto que se calcula que en los próximos cinco años se creará un elevado número de puestos vinculados a esta disciplina.

La Universidad de las Ciencias Informáticas surge al calor de la Batalla de Ideas con el objetivo de suplir esta demanda que exige la sociedad actual; la informatización del país es uno de los objetivos fundamentales del centro. Para lograr esta tarea es necesario formar un graduado universitario de calidad que sea capaz de resolver las distintas situaciones creadas en su puesto de trabajo y en su vida cotidiana.

Entre las tantas materias que se imparten a lo largo de la carrera la Matemática III, que entre sus temas agrupa Series Numéricas, Series de Funciones, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Funciones Vectoriales y Gradiente, Integrales Múltiples e Integrales de Línea se plantea objetivos esenciales que contribuyen a la creación de una base sólida de conocimiento, habilidades y valores que le permitirán al estudiante una adecuada proyección en su vida laboral como Ingeniero Informático.

Objetivos Generales Educativos de la Matemática III.

Como Ingeniero informático el graduado UCI debe ser capaz de modelar matemáticamente problemas de la vida real, para luego poder computarizarlos y hacer la entrega de un producto final.

Con el fin de contribuir a la formación del graduado la Matemática III se traza los siguientes Objetivos Generales Educativos.

1. Contribuir a la formación de una concepción científica del mundo y del pensamiento científico mediante la comprensión de cómo se realiza un modelo matemático y cómo éste es un reflejo de la realidad.
2. Contribuir a la formación de la personalidad del estudiante desarrollando hábitos de pensar reflexivamente y de evaluar críticamente los resultados de su trabajo.
3. Contribuir a que se desarrollen las capacidades cognitivas de los estudiantes, los hábitos de utilizar la literatura científica, la capacidad de razonamiento y del pensar lógicamente mediante el uso de los temas de la asignatura.
4. Contribuir a la formación computacional de los estudiantes mediante la introducción y el uso de las técnicas de información científica.

Para cumplir estos objetivos demos crear valores en los estudiantes como:

- Independencia.
- Creatividad.
- Superación personal.
- Proyección hacia el futuro.
- Posición activa ante las tareas que se le asignen.
- Perseverancia.

Además de aquellos valores éticos y estéticos que caracterizan nuestra sociedad socialista: La responsabilidad, la dignidad revolucionaria, la honestidad, la modestia, el espíritu crítico, la solidaridad, el desinterés y el patriotismo.

Tema a desarrollar,.

El presente trabajo fue realizado con el fin de crear una Actividad Práctica Investigativa que tribute a los objetivos de la asignatura, para eso nos centraremos inicialmente en uno de los temas que la componen, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

Este tema consta de los siguientes objetivos:

1. Desarrollar capacidades para caracterizar e interpretar los conceptos y teoremas más importantes relativos a las Ecuaciones Diferenciales.
2. Resolver problemas de índole técnico que se modelen a través de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO).

¿Que sucede actualmente?

La forma de impartir la asignatura no tributa correctamente a los objetivos trazados, pues los estudiantes son muy dependientes del profesor, no tiene iniciativa investigativa, no se preocupan por su superación personal, son incapaces de crearse una proyección futura. Esto implica que los objetivos fundamentales de la asignatura no se están logrando; y lo que más está afectando es la falta motivación por parte del profesor, que incentive al estudiante a la actividad investigativa, que es una de las actividades más eficientes para hacerle ver al estudiante cuánto puede hacer por sí solo.

Propuesta de Tarea ExtraClases

Para lograr alcanzar los objetivos y valores antes expuestos y con ello contribuir positivamente a la formación de un mejor graduado, además de buscar un complemento que ayude al profesor a lograr una adecuada motivación en el estudiante hacia la asignatura, de forma tal que él mismo llegue a la conclusión de para qué le sirve recibir la Matemática como parte de su formación básica; surge la idea de crear una propuesta de Actividad Práctica Investigativa.

Esta Actividad estará centrada inicialmente en el tema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y consta de los siguientes aspectos.

El estudiante debe ser capaz de:

- Investigar en qué campos es posible aplicar el contenido dado en clases.
- Identificar cuando un problema proveniente de la vida real, tomado íntegramente de la sociedad puede ser modelado matemáticamente a través del uso de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.
- Modelar el problema usando los recursos dados en clases.
- Integrar los conocimientos adquiridos tanto en las asignaturas de la disciplina como en el resto de las asignaturas impartidas hasta el momento.
- Dar solución al problema usando los métodos estudiados en clases.

La tarea se orientará en la primera clase del curso y se discutirá 1 semana después de realizada la evaluación parcial del tema de EDO.

La evaluación se realizará por equipos de a lo sumo 3 y como mínimo 2 personas.

La discusión se realizará en 15 minutos auxiliándose de Presentación de Power Point de no más de 10 diapositivas y mostrando dominio del uso de los asistentes matemáticos.

Estructura de la Tarea ExtraClases.

Se realizará un trabajo investigativo que conste de un informe cuyo formato se describe a continuación:

Letra Arial 12, interlineado 1.5, no más de 8 cuartillas que no incluyan los anexos ni la bibliografía.

1. Presentación
2. Resumen de 150 palabras, en español y en inglés.
3. Introducción.
 - Problemática existente (Ej. Problema que existe en empresa u organismo.).
 - Qué problema resolver (qué parte le toca resolver como ingeniero informático).
 - Basamentos teóricos necesarios para resolver el problema (Además de las EDO, qué otra materia de las que ha recibido es aplicable a la solución del problema, de forma tal que se muestre la integración interdisciplinar).
4. Desarrollo.
 - Modelación matemática del problema seleccionado con sus argumentos científicos.
 - Resolución del problema. Debe realizarse una comparación entre un método aprendido en clases y otro método no recibido durante el curso. Además, debe ser capaz de utilizar y asociar el problema con las aplicaciones impartidas en clases u otras.
 - Resultados y análisis de los mismos (significado del valor obtenido, Interpretación).
5. Conclusiones
 - Para qué le sirvió la actividad.
 - Qué aprendió durante su desarrollo.
 - Vinculación encontrada de la asignatura con el perfil del Informático.

6. Bibliografía

- Referencias de la bibliografía consultada, usando la norma ISO 690 que se encuentra en [//ucistore/infotecnologia](http://ucistore.infotecnologia).

7. Anexos

Algunas áreas del conocimiento donde son aplicable la Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

❖ Crecimiento y Decrecimiento

El problema de valor inicial

$$dx - z - kx$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (1)$$

Donde k es una constante de proporcionalidad, se emplea como modelo de distintos fenómenos donde intervienen crecimiento o decrecimiento (desintegración).

En biología, se ha observado que en cortos periodos la tasa de crecimiento de algunas poblaciones (como las de bacterias o de animales pequeños) es proporcional a la población presente en cualquier momento. Si conocemos una población en cierto

momento inicial arbitrario, que podemos considerar definido por $t = 0$, la solución de

(1) nos sirve para predecir la población en el futuro, esto es para $t > 0$.

En física, un problema de valor inicial como las ecuaciones (1) puede servir de modelo para calcular aproximadamente la cantidad residual de una sustancia que se desintegra o decae en forma radiactiva. Esa ecuación diferencial (1) también puede describir la temperatura de un objeto que se enfría.

En química, la cantidad residual de una sustancia en ciertas reacciones se apega a la ecuación (1).

La constante de proporcionalidad k, en (1), se puede hallar resolviendo el problema de valor inicial, con una determinación de x en un momento $t > t_0$.

❖ Datación Con Radiocarbono

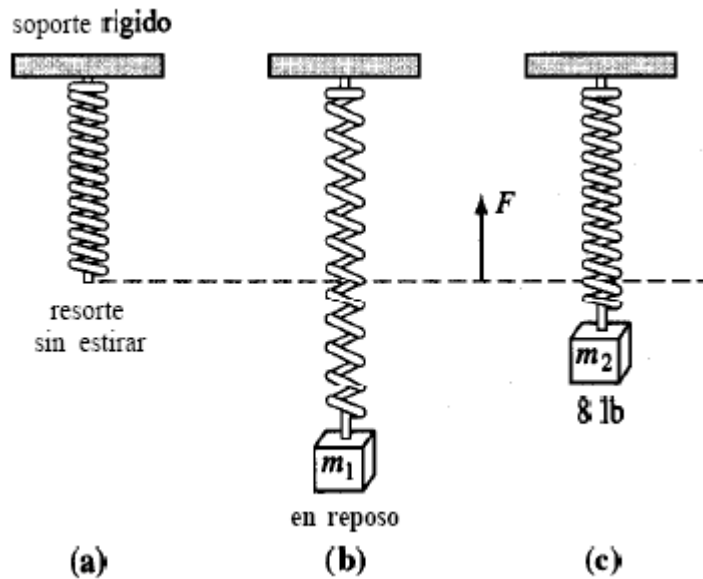
Alrededor de 1950, el químico Willard Libby inventó un método que emplea al carbono radiactivo para determinar las edades aproximadas de fósiles.

La teoría de la **datación (fechamiento o fechado) con radiocarbono**, se basa en que el isótopo carbono 14 se produce en la atmósfera por acción de la radiación cósmica sobre el nitrógeno. La razón de la cantidad de C-14 al carbono ordinario en la atmósfera parece ser constante y, en consecuencia, la cantidad proporcional del isótopo presente en todos los organismos vivos es igual que la de la atmósfera. Cuando muere un organismo la absorción del C-14 sea por respiración o alimentación cesa. Así, si se compara la cantidad proporcional de C-14 presente, por ejemplo en un fósil, con la relación constante que existe en la atmósfera, es posible obtener una estimación razonable de su antigüedad. El método se basa en que se sabe que el periodo medio del C-14 radiactivo es, aproximadamente, 5600 años.

Por este trabajo, Libby ganó el Premio Nobel de química en 1960. Su método se usó para fechar los muebles de madera en las tumbas egipcias y las envolturas de lino de los rollos del Mar Muerto.

❖ **Sistemas De Resorte Y Masa: Movimiento Libre No Amortiguado**

Ley De Hooke: Supongamos que, como en la figura una masa m_1 está unida a un resorte flexible colgado de un soporte rígido. Cuando se reemplaza m_1 con una masa distinta m_2 , el estiramiento, elongación o alargamiento del resorte cambiará.



Según la ley de Hooke, el resorte mismo ejerce una fuerza de restitución, F opuesta a la dirección del alargamiento y proporcional a la cantidad de alargamiento s . En concreto, $F = kx$ donde k es una constante de proporcionalidad llamada **constante del resorte**. Aunque las masas con distintos pesos estiran un resorte en cantidades distintas, este está caracterizado esencialmente por su número k ; por ejemplo, si una masa

que pesa 10 libras estira $\frac{1}{2}$ pie un resorte, entonces $10 = k \frac{1}{2}$ implica que

$k = 20lb / ft$. Entonces, necesariamente, una masa cuyo peso sea de 8 libras

estirará el resorte $\frac{2}{5}$ de pie.

Segunda ley de Newton

Después de unir una masa m a un resorte, ésta lo estira una longitud S y llega a una posición de equilibrio, en la que su peso W está equilibrado por la fuerza de restauración kS . Recuerdese que el peso se define por $w = mg$, donde la masa se

expresa en slugs, kilogramos o gramos y $g = 32 \text{ ft} / \text{s}^2$,

$9,8 \text{ m} / \text{s}^2$ o $980 \text{ cm} / \text{s}^2$ respectivamente.

Como se aprecia en la figura la condición de equilibrio es

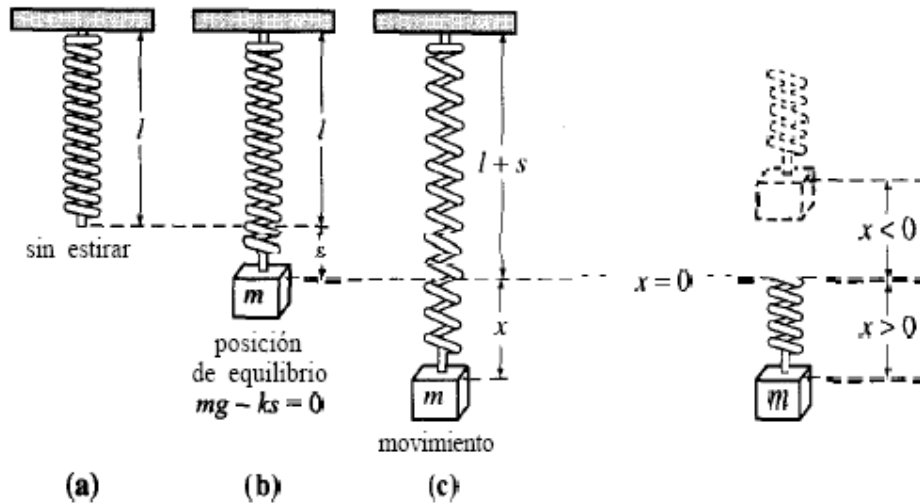
$mg = ks$ o $mg - ks = 0$. Si la masa se desplaza una distancia x

respecto de su posición de equilibrio, la fuerza de restitución del resorte es $k(x + s)$

Suponiendo que no hay fuerzas de retardo que actúen sobre el sistema y que la masa se mueve libre de otras fuerzas externas (**movimiento libre**), entonces podemos igualar la segunda ley de Newton con la fuerza neta, o resultante, de la fuerza de restitución y el peso:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = k(s + x) + mg = -kx + mg - ks = -kx \quad (1)$$

El signo negativo de la ecuación (1) indica que la fuerza de restitución del resorte actúa en la dirección opuesta del movimiento. Además, podemos adoptar la convención que los desplazamientos medidos abajo de la posición de equilibrio son positivos sin estirar.



Ecuación diferencial del movimiento libre no amortiguado Si dividimos la ecuación (1) por la masa m , obtendremos la ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + w^2 x = 0 \quad (2)$$

Donde $w^2 = k / m$. Se dice que la ecuación (2) describe el **movimiento armónico simple o movimiento libre no amortiguado**. Dos condiciones iniciales obvias asociadas con (2) son $x(0) = \alpha$, la cantidad de desplazamiento inicial, y $x'(0) = \beta$, la

velocidad inicial de la masa. Por ejemplo, si $\alpha > 0$ y $\beta < 0$, la masa parte de

un punto abajo de la posición de equilibrio con una velocidad *hacia arriba*. Si

$\alpha < 0$ y $\beta = 0$, la masa se suelta partiendo del *reposo* desde un punto ubicado $|\alpha|$ unidades *arriba* de la posición de equilibrio, etcétera.

Solución y ecuación del movimiento

Para resolver la ecuación (2) observemos que las soluciones de la ecuación auxiliar

$m_2 + w_2 = 0$ son los números complejos $m_1 = wi$, $m_2 = -wi$. Así la solución general de (2) es:

$$x(t) = c_1 \cos wt + c_2 \operatorname{sen} wt \quad (3)$$

El **periodo** de las vibraciones libres que describe (3) es $T = \frac{2\pi}{w}$, y la **frecuencia** es

$f = \frac{1}{T} = \frac{2\pi}{w}$. Por ejemplo, para $x(t) = 2\cos 3t - 4\operatorname{sen} 3t$, el periodo es $\frac{2\pi}{3}$ y

la frecuencia es $\frac{3}{2\pi}$.

El número anterior indica que la gráfica de $x(t)$ se repite cada $\frac{2\pi}{3}$ unidades y el último

número indica que hay tres ciclos de la gráfica cada 2π unidades o, lo que es lo

mismo, que la masa pasa por $\frac{3}{2\pi}$ vibraciones completas por unidad de tiempo. Además,

se puede demostrar que el periodo $\frac{2\pi}{w}$ es el intervalo entre dos máximos sucesivos de

$x(t)$. Téngase en mente que un máximo de $x(t)$ es el desplazamiento positivo cuando la masa alcanza la distancia máxima *abajo* de la posición de equilibrio, mientras que un

mínimo de $x(t)$ es el desplazamiento negativo cuando la masa llega a la altura máxima *arriba* de esa posición. Ambos casos se denominan **desplazamiento extremo** de la masa.

Por último, cuando se emplean las condiciones iniciales para determinar las constantes

C_1 y C_2 en la ecuación (3), se dice que la solución particular que resulta es la **ecuación del movimiento**.

Problemas incluidos en las áreas del conocimiento anteriormente descrito cuya solución conducen a EDO.

En esta sección presentamos una muestra de problemas reales con un enfoque pedagógico, que tributan al cumplimiento de los objetivos de la asignatura matemática III. El estudiante tiene que ser capaz de investigar en que área del conocimiento está y a sus ves identificar que elementos matemáticos de los estudiados en clases lo ayudaran a modelar el problema para darle una solución matemática que pueda ser interpretada en el área del conocimiento identificada.

Problemas

1. En un laboratorio de biotecnología se esta haciendo una investigación sobre un cultivo de bacteria que se piensa pueda ser usado en la elaboración de una vacuna contra el cáncer. El equipo de investigación entre otras propiedades del cultivo necesita conocer el crecimiento de las bacterias para cualquiera sea la cantidad inicial N_0 de bacterias que tenga el cultivo. Para esto se han propuesto determinar cual es el tiempo necesario que debe transcurrir para triplicar la cantidad inicial de los microorganismos, teniendo en cuenta que ha transcurrido un hora, que la cantidad medida de bacterias es $\frac{3}{2}N_0$ y la razón de reproducción es proporcional a la cantidad de bacterias presentes.
2. En China se conoce que su población aumenta con una razón proporcional a la cantidad de personas que tiene en cualquier momento. Con el fin de planificar la alimentación de la población hicieron un estudio sobre el crecimiento de la población y resultó que en 5 años se duplicó. Los planificadores preocupados se preguntan en cuanto tiempo se triplicará y cuadruplicará la población.
3. En un centro experimental de biología se estudia un cultivo de bacterias cuya cantidad de microorganismos en cualquier momento dado crece a una tasa proporcional a las bacterias presentes. Los biólogos sin saber cuantas bacterias tenia el cultivo inicialmente lo ponen en observación y determinan que al cabo de tres horas hay 400 individuos. Pasadas 10 horas, hay 2000 especímenes. Para poder dictaminar un resultado concreto sobre el crecimiento de las bacterias

necesitarán saber Cuál era la cantidad inicial de bacterias al comenzar el esperpento.

4. En un viaje de trabajo un grupo arqueólogos encontraron un hueso fosilizado que piensan que date de la época de los maya. Con el fin de verificar sus suposiciones el equipo de trabajo dedicó todos sus esfuerzos a determinar la edad del fósil, durante el análisis descubrieron que contenía la centésima parte de la cantidad original de C-14, esto resulto ser un gran pase de avance para ellos, ya tenían todos los datos que necesitaban solo quedaba determinar la edad del fósil.
5. Cuando pasa un rayo vertical de luz por una sustancia transparente, la razón con que decrece su intensidad Z es proporcional a $Z(t)$ donde t representa el espesor, en pies, del medio. En agua de mar clara, la intensidad a $3ft$ bajo la superficie, es el 25% de la intensidad inicial le del rayo incidente. ¿Cuál es la intensidad del rayo a $15ft$ bajo la superficie?
6. Cuando el interés se capitaliza (o compone) continuamente, en cualquier momento la cantidad de dinero S aumenta a una tasa proporcional a la cantidad

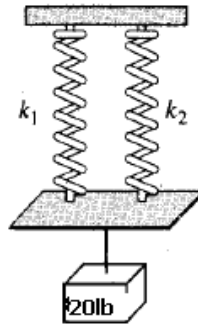
presente: $\frac{dS}{dt} = rS$ donde r es la tasa de interés anual.

- a) Calcule la cantidad *reunida* al término de cinco años, cuando se depositan \$5000 en una cuenta de ahorro que rinde el $5\frac{3}{4}\%$ de interés anual compuesto continuamente.
 - b) ¿En cuantos años se habrá duplicado el capital inicial?
7. En algunos casos, cuando dos resortes paralelos de constantes k_1 y k_2 sostienen un solo contrapeso W , la **constante efectiva de resorte** del sistema

es
$$k = \frac{4k_1k_2}{k_1 + k_2}$$

Un contrapeso de $20lb$ estira $6in$ un resorte y $20in$ otro. Estos resortes están fijos a un soporte rígido común por su parte superior y a una placa metálica en su extremo inferior. Como se ve en la figura, el contrapeso de $20lb$ está fijo al

centro de la placa del sistema. Determine la constante efectiva de resorte de este sistema. Deduzca la ecuación del movimiento, si el contrapeso parte de la posición de equilibrio, con una velocidad de $2tf / S$ hacia abajo.



Bibliografía

1. ADDINE, FÁTIMA (et al) (1998) Didáctica y optimización del proceso de enseñanza – aprendizaje. __ : La Habana : IPLAC (En soporte electrónico)
2. BIXIO, CECILIA (1999) Enseñar a aprender. Rosario : Homo Sapiens
3. <http://teleformacion.uci.cu/course/view.php?id=36>
4. DENNIS G. ZILL_ Loyola Marymount University: sexta edición(1997)
Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado
5. Medellín Milán, Pedro y Caraveo, Luz María. “El desarrollo curricular en la construcción de un proyecto académico”, Revista de la Educación Superior, No. 91, julio-septiembre, pp. 51-60. Año 1994
6. Mertens, Leonardo “La gestión por competencia laboral en la Empresa y la formación profesional “. Organización de Estados Iberoamericanos, para la ciencia y la cultura. Biblioteca digital. Año 2002.
7. Autor Granville, "[Calculo diferencial](#) e integral", editorial LIMUSA, ISBN 968-18-1178-X
8. Autores Berkley/Blanchard, "Calculos", Saunders College Publishing
9. Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA*, 7 (3), 251-292.
10. Flores, P. (2001). La clase como contexto de las tareas académicas (documento de trabajo).
11. Quinn, M. (2002). *Qualitative research and evaluation methods*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications, Inc.