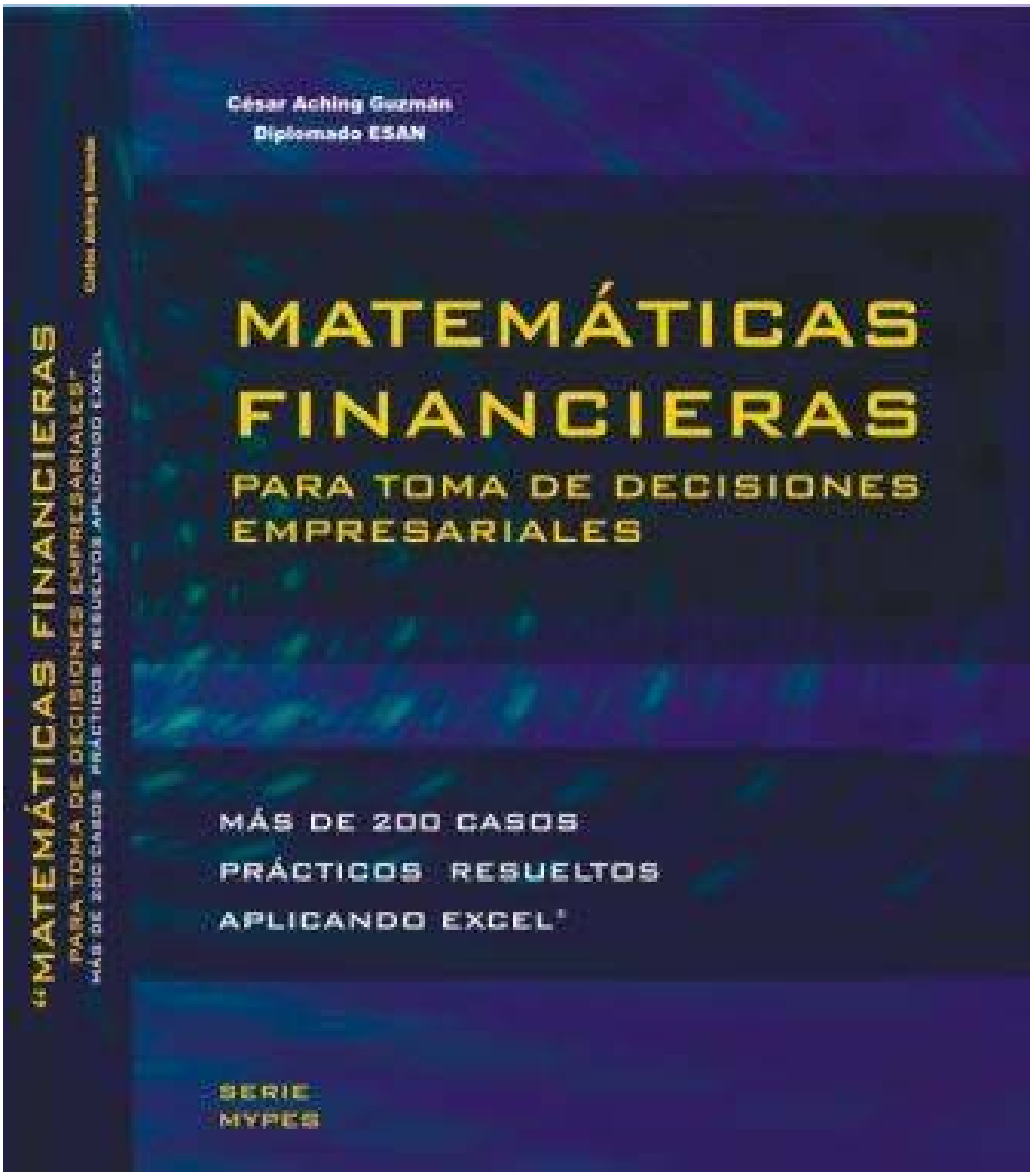



Autor
**CESAR ACHING GUZMAN**

## EQUIPO DE EDICION

**ING. JORGE L. ACHING SAMATELO**
Revisión técnica y soporte matemático
**MARLENE SAMATELO VALDIVIA**
Coordinadora General
**ANGELA BONINO VELAOCHAGA**
Diseño de Carátula
**CESAR ACHING SAMATELO**
**PAULA ENITH ACHING DIAZ**
Diseño, diagramación y proceso digital
**MARIA VICTORIA ANGULO JOHNSON**
Digitación

# Contenido

## Prólogo

El libro «**MATEMATICAS FINANCIERAS PARA TOMA DE DECISIONES EMPRESARIALES**», es un compendio sobre temas fundamentales del campo de las finanzas, necesario para entender el mundo de los negocios. Con este propósito utilizo un lenguaje claro, sencillo, práctico, rico en conceptos, con una amplia gama de casos resueltos con el método conceptual-aplicativo y funciones financieras de Excel. Es una edición digital mejorada y corregida de la edición impresa.

Dirigido a estudiantes, profesores y profesionales de administración, contabilidad, economía, banca y finanzas, tecnología financiera y otras actividades de carácter comercial; asimismo, a los pequeños y micro empresarios y a todos aquellos que tengan la inquietud de aprender.

**El capítulo 1:** Introducción a las Matemáticas Financieras, en una primera parte trata de las matemáticas financieras, el dinero, sus funciones, tipos, los sistemas monetarios, los bancos y el dinero bancario, clases de bancos, el sistema bancario, los componentes del dinero y creación monetaria, la creación del dinero bancario, el crédito, la toma de decisiones, el análisis de inversiones, el valor del dinero en el tiempo, la equivalencia, las operaciones financieras, el costo de oportunidad y costo de capital, la valoración de intereses, la letra devuelta, la letra de renovación, el descuento de una remesa de efectos, el crédito bancario, la póliza de crédito, los flujos de caja libre y la contabilidad versus Análisis Económico.

En una segunda parte, el capítulo trata de los fundamentos matemáticos como: los exponentes, la teoría de los signos, las reglas en el uso de los exponentes, los logaritmos y sus reglas, la progresión aritmética y geométrica. Asimismo, en este capítulo abordamos las funciones financieras de Excel, la estructura de una función, las fórmulas, las funciones para conversión de tasas de interés: INT.EFECTIVO y la TASA.NOMINAL; las funciones para el manejo de series uniformes, las funciones para la evaluación de proyectos, las tablas de amortización y las funciones matemáticas.

**El capítulo 2:** Interés Simple e Interés Compuesto, trata en forma integral el interés simple e interés compuesto, el valor actual, las tasas equivalentes, el descuento simple y compuesto, el descuento bancario; equivalencia de capitales a interés compuesto, usos del principio de equivalencia, estimaciones duplicando el tiempo y la tasa de interés y finalmente la tasa variable durante el período que dura la deuda.

**El capítulo 3: El capítulo 3,** trata los 6 factores financieros de las matemáticas financieras a partir del monto compuesto y de las anualidades; aborda ampliamente las anualidades anticipadas(prepagables), vencidas (pospagables) y diferidas; el valor actual de flujos diferentes; los gradientes y finalmente los métodos de evaluación como: el VAN, la TIR y la relación beneficio costo.

**El capítulo 4:** expone el tema de las tasas nominales y efectivas de interés, la capitalización continua con tasas efectivas de interés, los factores de serie

uniforme y gradientes, la inflación y el cálculo de rendimiento en moneda extranjera.
En la parte de los ejercicios desarrollados, como indicamos en el Capítulo III, resolvemos 27 ejercicios de este capítulo.

**El capítulo 5:** expone el tema de los mercados de capitales, el sistema financiero, el mercado de valores, las fuentes de financiamiento, productos activos y pasivos; las tarjetas de crédito, los préstamos, la modalidad de pago de las deudas y sus formas de pago, los préstamos hipotecarios y personales, culminando con la valoración de los mismos. En la parte de los ejercicios desarrollados, resolvemos 29 ejercicios.

**El capítulo 6** expongo el tema de los empréstitos, deuda del Estado, bonos, sistema de equilibrio y casos comunes en los negocios.
Como todos los capítulos, los temas están ilustrados con casos reales resueltos aplicando el modelo matemático y la función financiera de Excel, cuando es aplicable.

**César Aching Guzmán**

*A mis  padres:*

*Jorge (Q.E.P.D.) y Enith*

*A mis hermanos:*

*Jorge Alejandro (que nos ganó la partida)*

*Carlos, Andrés y*

*Jaime*

*"Nunca consideres el estudio como una obligación sino como una oportunidad para penetrar en el bello y maravilloso mundo del saber"*

Albert Einstein

**Reconocimientos**
En primer lugar a los docentes de ESAN, que sembraron en mi mente la inquietud por la investigación a través del método de casos: Konrad Fischer Rossi, Luís Gaviño, Martín Scurrah, Fernando Robles, Juan Goyburo Calderon, Armando Valdez Palacio, Alberto Zapater, J. Galarza, Santiago Roca, Octavio Chirinos, Nissim Alcabes Avdala, Hans H. Frank, Raúl Galdo, Carlos Chamorro, Juan Chu, Abner Montalvo, profesores del Primer Programa Avanzado de Administración de Empresas (PADE) Mercadotecnia (1977-1978) y del Primer PADE de Administración de Empresas (1979).

A mis hijos: Jorge por su constante apoyo y asesoría para la simplificación en la solución de los casos, Ingeniero Electrónico de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos (UNMSM), Graduado con excelencia en la tesis: "RECONOCIMIENTO BIOMETRICO DE HUELLAS DACTILARES Y SU IMPLEMENTACION EN DSP". Actualmente es becario y cursa estudios de Maestría en Ingeniería Electrónica en la UNIVERSIDAD FEDERAL ESPIRITU SANTO - BRASIL. A mi hijo César por su talentoso aporte en el diseño, diagramación y digitalización de la obra.

Y reconocimiento especial, a Angela Bonino Velaochaga, galardonada nacional e internacionalmente como exponente del arte moderno en nuestro país, que tuvo a su cargo la creación y diseño de la carátula.

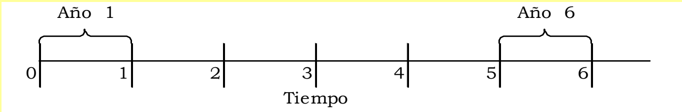
Finalmente, debo precisar que en temas como este resultaría absurdo reclamar originalidad, por lo que me remito al enunciado de Adam Schaff ("Historia y Verdad"): «La única originalidad que puede pretender el autor reside en la manera en que disponga en un conjunto los elementos ya conocidos y en el uso en que haga de ese conjunto en sus razonamientos».

**César Aching Guzmán**

# FORMULAS FINANCIERAS

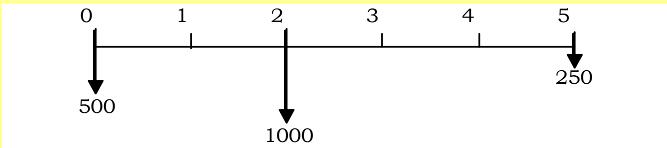
| TIPO | FORMULA |
|---|---|
| **CAPITULO I** | |
| **Rédito y Tasa de Interés** | [1] $r = \frac{VF-VA}{VA}$ [1A] $i = \frac{r}{n} = \frac{\frac{VF-VA}{VA}}{n}$ |
| **Riesgo, Tasa corriente y Tasa de interés real** | [2] $i_c = (1+i)*(1+\Phi)*(1+ip)-1$<br>[2A] $ic = (1+i)(1+\Phi)-1$<br>[3] $i = \frac{(1+ic)}{(1+\Phi)} - 1$ |
| **Inflación Acumulada** | [4] $\Phi = (1+\Phi_1)(1+\Phi_2)\ \ldots\ (1+\Phi_3)-1$ |
| **Margen financiero** | **SPREAD** = Tasa Activa - Tasa Pasiva |

## Flujo de Caja Libre

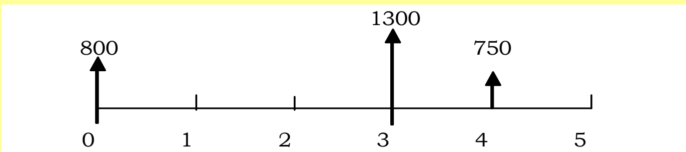



Típico diagrama de flujo de efectivo durante 6 años

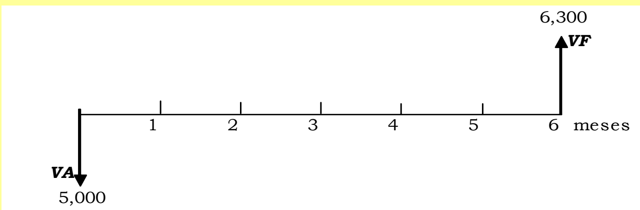
## Diagrama de Egresos



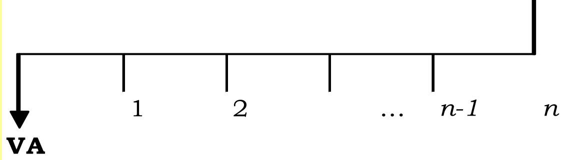

## Diagrama de Ingresos




## Diagrama de Depósito y Retiro



# FORMULAS FINANCIERAS

| TIPO | FORMULA |
|---|---|
| **CAPITULO II** | |
| Interés Simple y Descuento Simple | [5] $VF = VA(1+n*i)$ <br> [6] $VA = \frac{VF}{(1+n*i)}$ <br> [7] $I = VF - VA$ <br> [8] $I = VA*n*i$ <br> [9] $VF = VA + I$ <br> [10] $i = \frac{I}{VA*n}$ <br> [11] $i = \frac{\frac{VF}{VA} - 1}{n}$ <br> [12] $n = \frac{I}{VA*i}$ <br> [13] $n = \frac{\frac{VF}{VA} - 1}{i}$ |
| | [14] $D_R = VF - VA$ <br> [14A] $DR = VF*n*i$ <br> [15] $D_c = VN*n*d$ <br> [15A] $VA = VN - D_C$ <br> [16] $VA = VN(1-n*d)$ <br> [17] $d = \frac{i}{1+ni}$ <br> [18] $i = \frac{d}{1-nd}$ |
| Interés Compuesto | [19] $VF = VA(1+i)^n$   |
| | [20] $I = VA\langle(1+i)^n - 1\rangle$ <br> [21] $VA = \frac{VF}{(1+i)^n}$ <br> [22] $i = \sqrt[n]{\frac{VF}{VA}} - 1$ <br> [23] $n = \frac{\log\frac{VF}{VA}}{\log(1+i)}$ |
| Interés Vencido y Anticipado | [A] $iv = \frac{ia}{1-ia}$ <br> [B] $ia = \frac{iv}{1+iv}$ |
| Descuento | [C] $D_R = VN*\left(1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right)$ |
| Tasa y descuento equivalentes | [D] $VA = VN*(1-d)^n$ <br> [E] $D_C = VN*[1-(1-d)]^n$ <br> [F] $d = \frac{i}{1+i}$ <br> [G] $i = \frac{d}{1-d}$ |

# FORMULAS FINANCIERAS

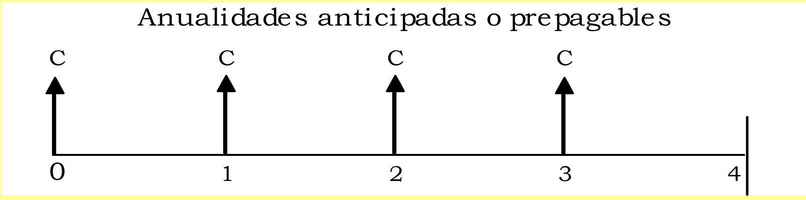
| TIPO | FORMULA |
|---|---|
| | **CAPITULO III** |

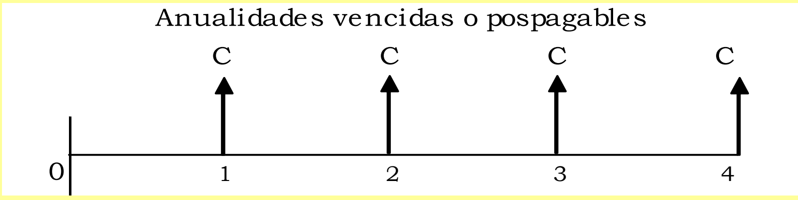
**Factores Financieros a partir del Monto Compuesto y de Anualidades**

**Para obtener el VA y VF de las anualidades prepagables basta multiplicar las fórmulas de las pospagables por (1 +i).**

[19] $\boldsymbol{VF} = \boldsymbol{VA}(1+i)^n$ $\qquad$ $\boldsymbol{FSC}_i^n = (1+\boldsymbol{i})^n$

[21] $\boldsymbol{VA} = \dfrac{\boldsymbol{VF}}{(1+\boldsymbol{i})^n}$ $\qquad$ $\boldsymbol{FSA}_i^n = \dfrac{1}{(1+\boldsymbol{i})^n}$




[24] $\boldsymbol{VA} = \boldsymbol{C}\left(\dfrac{(1+\boldsymbol{i})^n - 1}{\boldsymbol{i}(1+\boldsymbol{i})^n}\right)$ $\qquad$ $\boldsymbol{FAS}_i^n = \left(\dfrac{(1+\boldsymbol{i})^n - 1}{\boldsymbol{i}(1+\boldsymbol{i})^n}\right)$

[25] $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{VA}\left(\dfrac{\boldsymbol{i}(1+\boldsymbol{i})^n}{(1+\boldsymbol{i})^n - 1}\right)$ $\qquad$ $\boldsymbol{FRC}_i^n = \left(\dfrac{\boldsymbol{i}(1+\boldsymbol{i})^n}{(1+\boldsymbol{i})^n - 1}\right)$

[26] $\boldsymbol{n} = \dfrac{\boldsymbol{log}\left(1 - \left(\dfrac{\boldsymbol{VA}}{\boldsymbol{C}}\right)\boldsymbol{i}\right)}{\boldsymbol{log}\left(\dfrac{1}{(1+\boldsymbol{i})}\right)}$

[27] $\boldsymbol{VF} = \boldsymbol{C}\left(\dfrac{(1+\boldsymbol{i})^n - 1}{\boldsymbol{i}}\right)$ $\qquad$ $\boldsymbol{FCS}_i^n = \left(\dfrac{(1+\boldsymbol{i})^n - 1}{\boldsymbol{i}}\right)$

[28] $\boldsymbol{n} = \dfrac{\log\left(\left(\dfrac{\boldsymbol{VF}}{\boldsymbol{C}} * \boldsymbol{i}\right) + 1\right)}{\log(1+\boldsymbol{i})}$

[29] $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{VF}\left(\dfrac{\boldsymbol{i}}{(1+\boldsymbol{i})^n - 1}\right)$ $\qquad$ $\boldsymbol{FDFA}_i^n = \left(\dfrac{\boldsymbol{i}}{(1+\boldsymbol{i})^n - 1}\right)$

[30] $\boldsymbol{VF} = \boldsymbol{C}\left(\dfrac{(1+\boldsymbol{i})^{n+1} - (1+\boldsymbol{i})}{\boldsymbol{i}}\right)$ $\qquad$ [31] $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{VF}\left(\dfrac{\boldsymbol{i}}{(1+\boldsymbol{i})^{n+1} - (1+\boldsymbol{i})}\right)$

[32] $\boldsymbol{n} = \dfrac{\log\left((1+\boldsymbol{i})\left(\dfrac{\boldsymbol{VF}}{\boldsymbol{C}} + 1\right)\right)}{\log(1+\boldsymbol{i})}$

# FORMULAS FINANCIERAS

| TIPO | FORMULA |
|---|---|
| **CAPITULO III** | |
| **Gradiente Uniforme** | [33] $VA = \frac{G}{i}\left\langle \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n} \right\rangle$ <br> [De 33] $G = \frac{VA}{\frac{1}{i}\left\langle \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n} \right\rangle}$ <br> [33A] $VA = C * \left\langle \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \right\rangle + \frac{G}{i} * \left\langle \frac{1-(1+i)^{n-1} - 1}{i} - n \right\rangle * (1+i)^{-n}$ <br> [34] $C = G\left(\frac{1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1}\right) \xrightarrow{\text{[De 34[}} G = \frac{C}{\left\langle \frac{1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1} \right\rangle}$ <br> [35] $VF = \frac{G}{i}\left\langle \frac{(1+i)^n - 1}{i} - n \right\rangle$ <br> [35A] $VF = C * \left\langle \frac{(1+i)^n - 1}{i} \right\rangle + \frac{G}{i} * \left\langle \frac{(1+i)^{n-1} - 1}{i} - n \right\rangle$ |
| **Perpetuidad Gradiente perpetuo** | [36] $VAP = \frac{C}{i}$ [37] $VA = \frac{G}{i^2}$ |
| **Gradiente Geométrico** | [38] $VA_E = \frac{Q\left\langle \frac{(1+E)^n}{(1+i)^n} - 1 \right\rangle}{E - i}$ cuando $E \neq i$ <br> [39] $VA_E = Q\left\langle \frac{n}{1+E} \right\rangle$ cuando $E = i$ <br> [40] $VA_E = \frac{Q}{E - i}$ |
| **Métodos de Evaluación: VAN, TIR y B/C Páags.** | [41] $VAN = \left\langle \frac{FC_1}{(1+i)} + \frac{FC_2}{(1+i)^2} + \frac{FC_3}{(1+i)^3} + \frac{FC_4}{(1+i)^4} + \frac{FC_n}{(1+i)^n} \right\rangle - I_0$ <br> [42] $\textbf{RATIO} = \frac{\text{VAN}}{\text{INVERSION}}$ <br> [TIR] $-I_0 + \frac{FC_1}{(1+i)} + \frac{FC_2}{(1+i)^2} + \frac{FC_3}{(1+i)^3} + \frac{FC_4}{(1+i)^4} + \frac{FC_n}{(1+i)^n} = 0$ <br> [42] $\frac{B}{C} = \frac{VAIngresos}{VAEgresos}$ |

# FORMULAS FINANCIERAS

| TIPO | FORMULA |
|---|---|
| **CAPITULO IV** | |

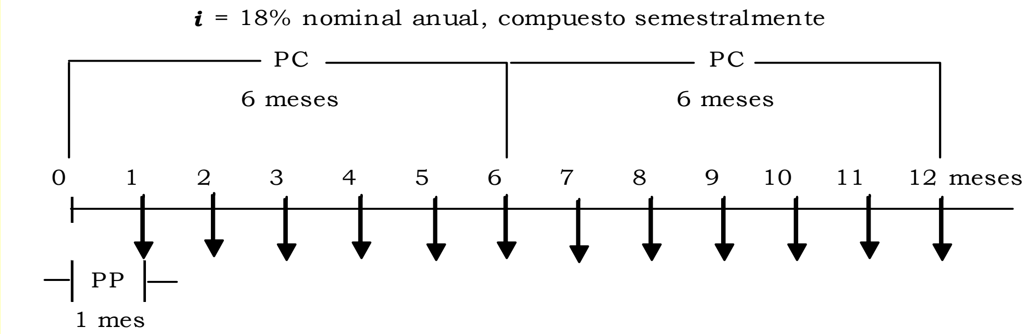



Diagrama de flujo de efectivo para un periodo de pago (PP) mensual y un periodo de capitalización semestral(PC).

| TIPO | FORMULA |
|---|---|
| **Tasa de interés Nominal y Efectiva**<br>**Tasa de Interés Efectiva Continua y Nominal** | [43] $\boldsymbol{i} = \left\langle 1+\frac{\boldsymbol{j}}{\boldsymbol{m}}\right\rangle^{\boldsymbol{m}} - 1$ [43B] $TEA=[1+\boldsymbol{i}]^{n}-1$<br>[43A] $\boldsymbol{i}=\sqrt[n]{(1+TEA)}-1$<br>[44] $\boldsymbol{j}=\boldsymbol{m}\left\langle(1+\boldsymbol{i})^{1/m}-1\right\rangle$, [44A] $\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}*n$<br>[44B] $\boldsymbol{i}=\frac{\boldsymbol{j}}{n}$<br>[45] $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j}} - 1$ [46] $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{ln}(1+\boldsymbol{i})$ |
| **Inflación**<br>**Rendimiento en Moneda Extranjera** | [47] $\text{UM en el periodo } t_1 = \frac{\text{UM en el periodo } t_2}{\text{tasa de inflación } t_1 \text{ y } t_2}$<br>[48] $\boldsymbol{VA} = \frac{\boldsymbol{VF}}{(1+\Phi)^{\boldsymbol{n}}}$<br>[49] $\boldsymbol{VA} = \boldsymbol{VF}\frac{1}{(1+\boldsymbol{i}_{\Phi})^{n}} = \boldsymbol{VF}\,(\boldsymbol{VA/VF},\ \boldsymbol{i}_{\Phi}, \boldsymbol{n})$<br>[50] $\boldsymbol{i}_{\Phi} = \boldsymbol{i} + \Phi + \boldsymbol{i}\cdot\Phi$<br>[51] $\boldsymbol{VF} = \boldsymbol{VA}(1+\boldsymbol{i}\,\Phi)^{\boldsymbol{n}}$<br>[52] $\boldsymbol{VF} = \frac{\boldsymbol{VA}(1+\boldsymbol{i}_{\Phi})^{n}}{(1+\Phi)^{n}} = \frac{\boldsymbol{VA}\,(\boldsymbol{VF/VA}, \boldsymbol{i}_{\Phi}, \boldsymbol{n})}{(1+\Phi)^{n}}$<br>[53] $\boldsymbol{i} = \frac{\boldsymbol{i}_{\Phi} - \Phi}{1+\Phi}$<br>[54] $\boldsymbol{i}$ M.E. = $\boldsymbol{i}$ EXT. + $\boldsymbol{i}$ DEV. + ($\boldsymbol{i}$ EXT. * $\boldsymbol{i}$ DEV.) |

# FORMULAS FINANCIERAS

| TIPO | FORMULA |
|---|---|
| | **CAPITULO VI** |
| **BONOS Y EMPRETITOS** | [55] $I = \frac{VN * ib}{nb}$<br>[56] $V_m = \frac{I_s}{i_m}$<br>[57] $VA_0 = C_P * A_0$<br>[58] **C1 = (VA*i*n) + (A1*VN)**<br>[59] $A = \frac{T}{p}$<br>[60] **C1 = (VA*i*n) + (1 + i)**<br>[61] **C1 = (A*VN) * (1 + i)^s** |
| **SISTEMA DE EQUILIBRIO** | [62] **A = W - CV**<br>[63] $BV = \frac{\text{Aportación}}{\text{Precio de Venta}}$ $BV = \frac{A}{PV}$<br>[64] $BV = PV - \frac{CV}{PV}$ [65] $BV = 1 - \frac{CV}{W}$<br>[66] $PE = \frac{CF}{BV}$ ó $PE = \frac{CF}{1 - \frac{CV}{W}}$ |
| | [67] **B = W - CF - CV**<br>[68] $B = (W * BV) - CF$<br>[69] $B = (W - PE) * BV$<br>[70] $MS = \frac{B}{A}$ [71] $MS = \frac{(W - PE)}{W}$ |
| | [72] **W = CF + CV + B**<br>[73] $W = \frac{(B + CF)}{BV}$<br>[74] **CF = W - CV - B**<br>[75] **CF = (W*BV) - B**<br>[76] **CV = W - CF - B**<br>[77] $BV = \frac{(B + CF)}{W}$<br>[78] $W = \frac{CV}{(1 - BV)}$<br>[79] **CV = W(1 - BV)** |

# Capítulo 1

# Introducción a las Matemáticas Financieras

*Desde el punto de vista matemático, la base de las matemáticas financieras la encontramos en la relación resultante de recibir una suma de dinero hoy (VA - valor actual) y otra diferente (VF - valor futuro) de mayor cantidad transcurrido un período. La diferencia entre VA y VF responde por el "valor" asignado por las personas al sacrificio de consumo actual y al riesgo que perciben y asumen al posponer el ingreso* [URL1].

## 1. Introducción

Nos dice Michael Parkin, en su obra Macroeconomía: «El dinero, el fuego y la rueda, han estado con nosotros durante muchos años. Nadie sabe con certeza desde cuándo existe -el dinero-, ni de cuál es su origen».

En forma similar nos acompaña la matemática financiera, cuya génesis está en el proceso de la transformación de la mercancía en dinero. Según la teoría del valor [URL 2]: el valor solo existe de forma objetiva en forma de dinero. Por ello, la riqueza se tiene que seguir produciendo como mercancía, en cualquier sistema social.

El sistema financiero esta esencialmente vinculado a las matemáticas financieras, por ello describiremos escuetamente su origen [URL 9]. Por el año 1,368 - 1,399 D.C. aparece el papel moneda convertible, primero en China y luego en la Europa medieval, donde fue muy extendido por los orfebres y sus clientes. Siendo el oro valioso, los orfebres lo mantenían a buen recaudo en cajas fuertes. Como estas cajas de seguridad eran amplias los orfebres alquilaban a los artesanos y a otros espacios para que guardaran su oro; a cambio les giraban un recibo que daba derecho al depositante para reclamarlo a la vista. Estos recibos comenzaron a circular como medio de pago para comprar propiedades u otras mercancías, cuyo respaldo era el oro depositado en la caja fuerte del orfebre. En este proceso el orfebre se dio cuenta que su caja de caudales estaba llena de oro en custodia y le nace la brillante idea, de prestar a las personas "recibos de depósitos de oro", cobrando por sus servicios un interés; el oro seguiría en custodia y solo entregaba un papel en que anotaba la cantidad prestada; tomando como previsión el no girar recibos que excedieran su capacidad de respaldo. Se dio cuenta de que intermediando entre los artesanos que tenían capacidad de ahorro en oro y los que lo necesitaban, podía ganar mucho dinero. Así es la forma en que nació el actual mercado de capitales, sobre la base de un sistema financiero muy simple, de carácter intermediario.

## 2. Matemáticas financieras

La Matemática Financiera es una derivación de la matemática aplicada que estudia el valor del dinero en el tiempo, combinando el capital, la tasa y el tiempo para obtener un rendimiento o interés, a través de métodos de evaluación que permiten tomar decisiones de inversión. Llamada también análisis de inversiones, administración de inversiones o ingeniería económica.

Se relaciona multidisciplinariamente, con la contabilidad, por cuanto suministra en momentos precisos o determinados, información razonada, en base a registros técnicos, de las operaciones realizadas por un ente privado o publico, que permiten tomar la decisión mas acertada en el momento de realizar una inversión; con el derecho, por cuanto las leyes regulan las ventas, los instrumentos financieros, transportes terrestres y marítimos, seguros, corretaje, garantías y embarque de mercancías, la propiedad de los bienes, la forma en que se pueden adquirir, los contratos de compra venta, hipotecas, préstamos a interés; con la economía, por cuanto brinda la posibilidad de determinar los mercados en los cuales, un negocio o empresa, podrían obtener mayores beneficios económicos; con la ciencia política, por cuanto las ciencias políticas estudian y resuelven problemas económicos que tienen que ver con la sociedad, donde existen empresas e instituciones en manos de los gobiernos. Las matemáticas financieras auxilian a esta disciplina en la toma de decisiones en cuento a inversiones, presupuestos, ajustes económicos y negociaciones que beneficien a toda la población; con la ingeniería, que controla costos de producción en el proceso fabril, en el cual influye de una manera directa la determinación del costo y depreciación de los equipos industriales de producción; con la informática, que permite optimizar procedimientos manuales relacionados con movimientos económicos, inversiones y negociaciones; con la sociología, la matemática financiera trabaja con inversiones y proporciona a la sociología las herramientas necesarias para que las empresas produzcan más y mejores beneficios económicos que permitan una mejor calidad de vida de la sociedad y con las finanzas, disciplina que trabaja con activos financieros o títulos valores e incluyen bonos, acciones y prestamos otorgados por instituciones financieras, que forman parte de los elementos fundamentales de las matemáticas financieras.

Por ello, las matemáticas financieras son de aplicación eminentemente práctica, su estudio esta íntimamente ligado a la resolución de problemas y ejercicios muy semejantes a los de la vida cotidiana, en el mundo de los negocios. Dinero y finanzas son indesligables.

## 3. El dinero

"*El dinero es el equivalente general, la mercancía donde el resto de las mercancías expresan su valor, el espejo donde todas las mercancías reflejan su igualdad y su proporcionalidad cuantitativa*" [URL 3].

Según la economía habitual [URL 4], dinero es cualquier cosa que los miembros de una comunidad estén dispuestos a aceptar como pago de bienes y deudas, cuya función especifica estriba en desempeñar la función de equivalente general. El dinero surgió espontáneamente en la remota antigüedad, en el proceso de desarrollo del cambio y de las formas del valor. A diferencia de las otras mercancías, el dinero posee la propiedad de ser directa y universalmente cambiable por cualquier otra mercancía.

"Marx procede en este terreno de modo distinto. Cuando analiza el trueque directo de mercancías descubre el dinero en forma germinal..." [URL 3].

### 3.1. Funciones del dinero

Formas concretas en que se manifiesta la esencia del dinero como equivalente general. En la economía mercantil desarrollada, el dinero cumple las cinco funciones siguientes:

1) medida del valor [URL 3] "Con el dinero podemos medir, por ejemplo, el patrimonio que tiene cada ciudadano. Y también podemos medir el precio de cada hora de trabajo social medio. De manera que si expresamos el valor del patrimonio personal en dinero, después debemos expresar este dinero en horas de trabajo..."

2) medio de circulación,

3) medio de acumulación o de atesoramiento,

4) medio de pago y

5) dinero mundial.

Siendo su función elemental la de intermediación en el proceso de cambio. El hecho de que los bienes tengan un precio proviene de los valores relativos de unos bienes con respecto a otros.

### 3.2. Tipos de dinero

Dinero – mercancía: Consiste en la utilización de una mercancía (oro, sal, cueros) como medio para el intercambio de bienes. La mercancía elegida debe ser: duradera, transportable, divisible, homogénea, de oferta limitada.

Dinero – signo: Billetes o monedas cuyo valor extrínseco, como medio de pago, es superior al valor intrínseco. El dinero signo es aceptado como medio de pago por imperio de la ley que determina su circulación (curso legal). El dinero signo descansa en la confianza que el público tiene en que puede utilizarse como medio de pago generalmente aceptado.

Dinero – giral: Representado por los depósitos bancarios.

#### **La transformación del dinero en capital** [URL 3]

"El dinero se transforma en capital cuando con él compramos los factores objetivos y los factores subjetivos para producir riqueza. Los factores objetivos son los medios de producción y los factores subjetivos son la fuerza de trabajo. Por lo tanto, el dinero como capital se diferencia del dinero como simple dinero por la clase peculiar de mercancías que compra: medios de producción y fuerza de trabajo. La economía convencional sólo capta el dinero como medio de cambio, y el dinero que funciona como capital igualmente lo capta como medio de cambio. Y es cierto que el dinero que circula como capital funciona como medio de cambio. La diferencia no estriba, por lo tanto, en la función que desempeña en el mercado, sino en la clase de mercancías que se compra con él. El dinero como simple dinero se emplea como medio de cambio de medios de consumo personal, mientras que el dinero como capital se emplea como medio de cambio de medios de producción y de fuerza de trabajo”…

### 3.3. Sistemas monetarios

Un sistema monetario es un conjunto de disposiciones que reglamentan la circulación de la moneda de un país.

Tradicionalmente, los países eligieron el oro y la plata como la base de un sistema monetario mono metalista. Cuando adoptaron ambos metales a la vez, se trataba de un sistema bi-metalista. Actualmente todas las divisas (dólar, Euro, yen, etc.) son dinero fiduciario.

En épocas de inflación, la gente trata de desprenderse inmediatamente del dinero que se desvaloriza y de retener aquellos bienes que conservan su valor.

### 3.4. Los bancos y el dinero bancario

El dinero bancario está constituido por los depósitos en los bancos, cajas de ahorro, compañías financieras o cajas de crédito.

Los bancos reciben depósitos de sus clientes y conceden préstamos a las familias y a las empresas. El volumen de los préstamos concedidos es superior al de los depósitos que mantienen sus clientes.

## 4. Los Bancos

*Al parecer, la palabra "banco" procede de los que utilizaban los cambistas para trabajar en las plazas públicas en las ciudades italianas medievales. El oficio de cambista era entonces una profesión muy especializada que requería amplios conocimientos ya que las docenas de pequeños Estados existentes entonces mantenían en circulación centenares de diferentes monedas que eran aceptadas para el comercio, no por su valor facial, sino por el peso y ley del metal en que se acuñaban y que sólo un experto discernimiento podía establecer* [URL 4].

Evolución histórica. Como señalábamos en la introducción, estas instituciones nacen en la Europa medieval, en las Repúblicas aristocráticas italianas, Venecia, Génova, Florencia, a mediados del siglo XII con la finalidad de prestar servicios de depósito. Al multiplicarse los bancos, amplían sus operaciones, agregan la emisión de certificados, antecedentes de nuestros actuales billetes.

Juan Fugger fue el iniciador en Alemania de una familia de banqueros y comerciantes que unió su destino empresarial a la corona. Se constituyó en el prestamista de Carlos V. Desde Italia la prominencia comercial y bancaria pasó a Holanda y al norte de Europa.

En 1605 nace el Banco de Amsterdam, primer banco moderno que no tuvo como todos los bancos italianos carácter de sociedad familiar o personal. Integrado por comerciantes a causa de la ubicación geográfica de su ciudad y puerto, fue un factor de primer orden para la economía de Holanda y Alemania.

El Banco de Inglaterra fundado en 1694, como consecuencia de los préstamos que otorga, el gobierno le autorizó a emitir billetes.

### 4.1. Clases de bancos

#### 4.1.1. Según el origen del capital

Bancos públicos: El capital es aportado por el estado.

Bancos privados: El capital es aportado por accionistas particulares.

Bancos mixtos o Banca Asociada: Su capital proviene de aportes privados y estatales.

#### 4.1.2. Según el tipo de operación

Bancos corrientes: Los más comunes, sus operaciones habituales incluyen depósitos en cuenta corriente, caja de ahorro, préstamos, cobranzas, pagos y cobranzas por cuentas de terceros, custodia de títulos y valores, alquileres de cajas de seguridad, financiación, etc.

Bancos especializados: Tienen una finalidad crediticia específica (Bancos Hipotecarios, Banco Industrial, Banco Agrario).

Bancos de emisión: Actualmente representados por bancos oficiales.

Bancos Centrales: Son las casas bancarias de categoría superior que autorizan el funcionamiento de entidades crediticias, las supervisan y controlan.

## 4.2. Sistema Bancario

### 4.2.1. Banco Central

Es la autoridad monetaria por excelencia en cualquier país que tenga desarrollado su sistema financiero. Es una institución casi siempre estatal que tiene la función y la obligación de dirigir la política monetaria del gobierno.

Funciones.

- Emisión de moneda de curso legal con carácter exclusivo.
- Es el «banco de los bancos». Los bancos comerciales tienen una cuenta corriente en el Banco Central de igual forma que los individuos tienen las suyas en los comerciales.
- Es el asesor financiero del gobierno y mantiene sus principales cuentas.
- Es el encargado de custodiar las reservas de divisas y oro del país.
- Es el prestamista en última instancia de los bancos comerciales.
- Determina la relación de cambio entre la moneda del país y las monedas extranjeras.
- Maneja la deuda pública.
- Ejecuta y controla la política financiera y bancaria del país.

### 4.2.2. Bancos Comerciales

Dedicados al negocio de recibir dinero en depósito, los cuales los presta, sea en forma de mutuo, de descuento de documentos o de cualquier otra forma. Son considerados además todas las operaciones que natural y legalmente constituyen el giro bancario.

Funciones.

- Aceptar depósitos.
- Otorgar adelantos y préstamos.

Los depósitos (pasivos) son deudas del banco hacia el público, por las cuales el banco paga un interés. Los préstamos (activos) son deudas del público al banco, por ellos el banco recibe un interés, la diferencia entre ambos constituye la ganancia (spread) que les otorga la actividad de intermediarios financieros.

## 4.3. Componentes del dinero y creación monetaria

Dinero son los billetes y monedas de circulación legal en un país, en poder del público, más los depósitos bancarios en cuenta corriente movilizados mediante el cheque.

O sea, el primer componente es el dinero en efectivo, el segundo es el denominado «dinero bancario» originado en la práctica de los negocios.

Los depósitos en cuenta corriente son denominados «depósitos a la vista» y son los que guardan mayor relación con el dinero en efectivo. En los países de elevado desarrollo económico-financiero, la masa de cheques en circulación representa una proporción muy significativa respecto del total monetario.

Los depósitos «a plazo» (cajas de ahorro, cuentas especiales, plazo fijo) poseen distintos grados de convertibilidad líquida.

Desde el punto de vista de la creación monetaria, existen dos tipos de dinero:

- Base monetaria o dinero primario (emitido por la autoridad financiera, BCR).
- Dinero secundario (inyectado por los bancos a través del poder adquisitivo generado por los préstamos).

Las entidades financieras tienen facultad de dar créditos hasta un determinado porcentaje de los depósitos captados. La autoridad monetaria establece una reserva obligatoria (efectivo mínimo o encaje), el resto puede ser afectado a operaciones de crédito.

Un cheque **no es dinero**, sino simplemente una orden a un banco para transferir una determinada cantidad de dinero, que estaba depositada en él.

Los depósitos no son una forma visible o tangible de dinero, sino que consisten en un asiento contable en las cuentas de los bancos.

En los países con un sistema financiero desarrollado, los billetes y las monedas representan una pequeña parte del total de la oferta monetaria.

### 4.4. La creación del dinero bancario

El dinero otorga a su poseedor capacidad de compra. Ese dinero puede ser creado de dos maneras:

- Por emisión, dispuesta por la entidad autorizada en cada país (BCR).
- Por los préstamos que otorgan las entidades financieras.

Dado que los depósitos bancarios son convertibles en dinero líquido, los bancos tienen que asegurarse de que en todas las circunstancias se encuentren en posición de hacer frente a las demandas de liquidez (billetes y monedas) por parte de sus depositantes.

La práctica bancaria muestra que el uso generalizado de cheques significa que cada día sólo un pequeño porcentaje de los depósitos bancarios son convertidos en dinero efectivo y esos retiros son compensados con los ingresos de efectivo que otras personas realizan. De esta forma, los banqueros han comprobado que pueden crear depósitos bancarios por encima de sus reservas líquidas.

Las **reservas líquidas legalmente requeridas** o **encaje bancario** es la fracción de depósitos que los bancos deben mantener como reservas.

Si en un determinado momento todos los clientes de un banco quisieran a la vez retirar sus depósitos, el banco no podría atender todas las peticiones.

<u>Activos financieros</u>

Los activos pueden ser:

- **Reales**: tienen valor por sí mismos (mercaderías, muebles).
- **Financieros**: tienen valor por lo que representan (billetes, depósitos bancarios).

a. <u>Efectivo:</u> activo financiero líquido por excelencia.

b. <u>Depósitos bancarios:</u> tienen mayor o menor liquidez según sean a la vista o a término.

c. <u>Títulos valores:</u>

- <u>Acciones:</u> títulos emitidos por las sociedades de capital a favor de sus socios, para acreditar su condición de tales.
- <u>Pagarés:</u> promesas de pago emitidas por una persona (librador) a favor de otra (beneficiario).
- <u>Letras de cambio:</u> órdenes de pago emitidas por un librador a favor de un beneficiario y a cargo de otra persona.
- <u>Títulos de deuda, públicos y privados:</u> sus titulares pasan a ser acreedores del ente emisor de aquellos. Reciben una renta fija.

## 5. Crédito

Término utilizado en el comercio y finanzas para referirse a las transacciones que implican una transferencia de dinero que debe devolverse transcurrido cierto tiempo. Por tanto, el que transfiere el dinero se convierte en acreedor y el que lo recibe en deudor; los términos crédito y deuda reflejan pues una misma transacción desde dos puntos de vista contrapuestos. Finalmente, el crédito implica el cambio de riqueza presente por riqueza futura.

## 5.1. Clases de crédito

### 5.1.1. Según el origen:

a. Créditos comerciales, son los que los fabricantes conceden a otros para financiar la producción y distribución de bienes; créditos a la inversión, demandados por las empresas para financiar la adquisición de bienes de equipo, las cuales también pueden financiar estas inversiones emitiendo bonos, pagarés de empresas y otros instrumentos financieros que, por lo tanto, constituyen un crédito que recibe la empresa;

b. Créditos bancarios, son los concedidos por los bancos como préstamos, créditos al consumo o créditos personales, que permiten a los individuos adquirir bienes y pagarlos a plazos;

c. Créditos hipotecarios, concedidos por los bancos y entidades financieras autorizadas, contra garantía del bien inmueble adquirido;

d. Créditos contra emisión de deuda pública. Que reciben los gobiernos centrales, regionales o locales al emitir deuda pública;

e. Créditos internacionales, son los que concede un gobierno a otro, o una institución internacional a un gobierno, como es el caso de los créditos que concede el Banco Mundial.

### 5.1.2. Según el destino:

De producción: Crédito aplicado a la agricultura, ganadería, pesca, comercios, industrias y transporte de las distintas actividades económicas.

De consumo: Para facilitar la adquisición de bienes personales.

Hipotecarios, destinados a la compra de bienes inmuebles,

### 5.1.3. Según el plazo:

A corto y mediano plazo: Otorgados por Bancos a proveedores de materia prima para la producción y consumo.

A largo plazo: Para viviendas familiares e inmuebles, equipamientos, maquinarias, etc.

### 5.1.4. Según la garantía:

Personal. Créditos a sola firma sobre sus antecedentes personales y comerciales.

Real (hipotecas). Prendarias cuando el acreedor puede garantizar sobre un objeto que afecta en beneficio del acreedor.

## 5.2. ¿Cómo está dividido y cuál es la finalidad de una cartera de créditos? [URL 5]

La cartera de créditos está dividida en: créditos comerciales, créditos a micro empresas (MES), créditos de consumo y créditos hipotecarios para vivienda. Los créditos comerciales y de micro empresas son otorgados a personas naturales o personas jurídicas y los créditos de consumo y créditos hipotecarios para vivienda son sólo destinados a personas naturales. Por lo demás los créditos comerciales, de micro empresas y de consumo, incluyen los créditos otorgados a las personas jurídicas a través de tarjetas de créditos, operaciones de arrendamiento financiero o cualquier otra forma de financiamiento que tuvieran fines similares a los de estas clases de créditos.

a) Créditos comerciales: Son aquellos que tienen por finalidad financiar la producción y comercialización de bienes y servicios en sus diferentes fases.

b) Créditos a las Micro Empresas MES): Son aquellos créditos destinados al financiamiento de actividades de producción, comercio o prestación de servicios siempre que reúnan éstas dos características:

- Que el cliente cuente con un total de activos que no supere o sea equivalente a los US $ 20,000. Para éste cálculo no toman en cuenta los inmuebles del cliente.
- El endeudamiento del cliente en el sistema financiero no debe exceder de US $ 20,000 o su equivalente en moneda nacional.

Cuando se trate de personas naturales su principal fuente de ingresos deberá ser la realización de actividades empresariales, por lo que no consideran en ésta categoría a las personas cuya principal fuente de ingresos provienen de rentas de quinta categoría.

c) Créditos de consumo: Son créditos que tienen como propósito atender el pago de bienes, servicios o gastos no relacionados con una actividad empresarial.

d) Créditos hipotecarios para vivienda: Son aquellos créditos destinados a la adquisición, construcción, refacción, remodelación, ampliación, mejoramiento y subdivisión de vivienda propia, siempre que tales créditos sean otorgados amparados con hipotecas debidamente inscritas, pudiendo otorgarse los mismos por el sistema convencional de préstamo hipotecario, de letras hipotecarias o por cualquier otro sistema de similares características.

## 5.3. ¿Cómo es clasificado un deudor? [URL 5]

La clasificación del deudor está determinada principalmente por su capacidad de pago, definida por el flujo de fondos y el grado de cumplimiento de sus obligaciones. Si un deudor es responsable de varios tipos de créditos con una misma empresa, la clasificación estará basada en la categoría de mayor riesgo. En caso que la responsabilidad del deudor en dos o más empresas financieras incluyen obligaciones que consideradas individualmente resulten con distintas clasificaciones, el deudor será clasificado a la categoría de mayor riesgo que le haya sido asignada por cualquiera de las empresas cuyas deudas representen mas del 20% en el sistema, considerándose para dicho efecto la última información disponible en la central de riesgo.

## 5.4. ¿En que categorías es clasificado un deudor de la cartera de créditos? [URL 5]

Cada deudor que es responsable de uno o varios tipos de créditos será clasificado de acuerdo a las siguientes categorías:

- Categoría Normal ( 0 )
- Categoría con problemas Potenciales (1)
- Categoría Deficiente ( 2 )
- Categoría Dudoso ( 3 )
- Categoría Pérdida ( 4 )

## 5.5. ¿Qué criterios son asignados en cada una de las categorías al clasificarse a un deudor de un crédito comercial? [URL 5]

Para determina la clasificación en éste tipo de crédito deberá considerarse fundamentalmente el análisis del flujo de fondos del deudor. Adicionalmente la empresa del sistema financiero considerará si el deudor tiene créditos vencidos y/o en cobranza judicial en la empresa y en otras empresas del sistema, así como la posición de la actividad económica del deudor y la competitividad de la misma, lo que en suma determinará las siguientes categorías:

a) Si el deudor es clasificado en categoría Normal (0), esto significa que es capaz de atender holgadamente todos sus compromisos financieros, es decir, que presenta una situación financiera líquida, bajo nivel de endeudamiento patrimonial y adecuada estructura del mismo con relación a su capacidad de generar utilidades, cumple puntualmente con el pago de sus obligaciones, entendiéndose que el cliente los cancela sin necesidad de recurrir a nueva financiación directa o indirecta de la empresa.

b) Si la clasificación está en la categoría con Problemas Potenciales (1), esto significa que el deudor puede atender la totalidad de sus obligaciones financieras, sin embargo existen situaciones que de no ser controladas o corregidas en su oportunidad, podrían comprometer la capacidad futura de pago del deudor. Los flujos de fondos del deudor tienden a debilitarse y se presentan incumplimientos ocasionales y reducidos.

c) Si es clasificado en categoría Deficiente (2), esto quiere decir que el deudor tiene problemas para atender normalmente la totalidad de sus compromisos financieros, que de no ser corregidos pueden resultar en una pérdida para la empresa del sistema financiero. En este caso el deudor presenta una situación financiera débil y un nivel de flujo de fondos que no le permite atender el pago de la totalidad del capital y de los intereses de las deudas, pudiendo cubrir sólo estos últimos y además incumplimientos mayores a 60 días y que no exceden de 120 días.

d) La categoría Dudoso (3), significa que es altamente improbable que el deudor pueda atender a la totalidad de sus compromisos financieros. El deudor no puede pagar ni capital ni intereses, presentando una situación financiera crítica y muy alto nivel de endeudamiento, con incumplimientos mayores a 120 días y que no exceden de 365 días.

e) Si la clasificación es considerada en categoría Pérdida (4), esto quiere decir que las deudas son consideradas incobrables pese a que pueda existir un valor de recuperación bajo en el futuro. El deudor ha suspendido sus pagos, siendo posible que incumpla eventuales acuerdos de reestructuración. Además, se encuentra en estado de insolvencia decretada, ha pedido su propia quiebra, presentando incumplimientos mayores a 365 días.

## 6. Toma de decisiones [URL 1]

*La unidad para la toma de decisiones es una persona o una organización pública o privada a través de sus autoridades y gerentes respectivamente.*

En el mundo real, las situaciones por resolver son múltiples y variadas y para solucionarlos los recursos son escasos. Las disciplinas que ayudan a tomar decisiones son la Economía y la Administración. Entre varias alternativas de solución obviamente optaremos por la mejor de ellas. La unidad para la toma de decisiones es una persona u organización pública o privada a través de sus autoridades y gerentes respectivamente.

Por lo general todo problema tiene los siguientes elementos: la unidad que toma la decisión, las variables controlables (internas o endógenas), las variables no controlables (del entorno o exógenos), las alternativas, la carencia de recursos y la decisión en sí misma que llevan a escoger alternativas más eficientes y óptimas o que produzcan resultados beneficiosos.

## 7. Análisis de inversiones

*En un sentido amplio inversión, es el flujo de dinero orientada a la creación o mantenimiento de bienes de capital y a la realización de proyectos supuestamente rentables.*

Conocemos al análisis de inversiones también como Matemáticas Financieras, Administración de Inversiones o Ingeniería Económica. El análisis de inversiones emplea como concepto fundamental la tasa de interés, con el que obtenemos elementos para efectuar infinidad de análisis de tipo económico-financiero, principalmente para:

1. Establecer el exacto costo de la alternativa de financiación o verdadera rentabilidad de la inversión.
2. Organizar planes de financiamiento en negocios de venta a crédito o a plazos.
3. Elegir planes más adecuados para la liquidación de obligaciones, según los criterios de liquidez y rentabilidad.
4. Determinar el costo de capital
5. Elegir las alternativas de inversión más apropiadas a corto y largo plazo.
6. Elegir entre alternativas de costos.

### 7.1. Estudio de la rentabilidad de inversiones [URL 1]

Para entender este tema es necesario aceptar tres niveles de comprensión:

**El conceptual** tiene que ver con los conceptos básicos de interés, tasa de interés, equivalencia y los métodos para la toma de decisiones.

**El operativo instrumental** referido al empleo de fórmulas y funciones financieras de hojas de cálculo como Excel.

**El situacional** comprende la descripción de la realidad. Puede ser: las cláusulas de un contrato o pagaré; es decir, un escenario a cambiar y para el cual contamos con varias alternativas de solución.

## 8. Valor del dinero en el tiempo

*Uno de los principios más importantes en todas las finanzas.*

El dinero es un activo que cuesta conforme transcurre el tiempo, permite comprar o pagar a tasas de interés periódicas (diarias, semanales, mensuales, trimestrales, etc.). Es el proceso del interés compuesto, los intereses pagados periódicamente son transformados automáticamente en capital. El interés compuesto es fundamental para la comprensión de las matemáticas financieras.

Encontramos los conceptos de valor del dinero en el tiempo agrupados en dos áreas: valor futuro y valor actual. El valor futuro (VF) describe el proceso de crecimiento de la inversión a futuro a un interés y períodos dados. El valor actual (VA) describe el proceso de flujos de dinero futuro que a un descuento y períodos dados representa valores actuales [URL 1].

**Ejemplos:** De las siguientes opciones ¿Cuál elegiría?

1) Tener UM 10 hoy u
2) Obtener UM 10 dentro de un año

   Ambas 100% seguras

Indudablemente, cualquier persona sensata elegirá la primera, UM 10 valen más hoy que dentro de un año.

1) Tener UM 10 hoy u
2) Obtener UM 15 dentro de un año

   Ambas 100% seguras.

Elección más difícil, la mayoría elegiría la segunda. Contiene un «premio por esperar» llamada tasa de interés, del 50%.

Generalmente en el mercado, esta tasa de interés lo determina el libre juego de la oferta y demanda.

**Otro Ejemplo:**

Un préstamo de UM 20,000 con 18% de interés anual para su uso durante los próximos cuatro años.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1º | Año del préstamo | UM | 20,000 | | |
| | 18% costo del capital | | 3,600 | FDA | 23,600 |
| 2º | Año del préstamo | UM | 23,600 | | |
| | 18% costo del capital | | 4,248 | FDA | 27,848 |
| 3º | Año del préstamo | UM | 27,848 | | |
| | 18% costo del capital | | 5,013 | FDA | 32,861 |
| 4º | Año del préstamo | UM | 32,861 | | |
| | 18% costo del capital | | 5,915 | FDA | 38,776 |

**FDA:** Fin de año

Aplicando al ejemplo el concepto de valor del dinero en el tiempo, vemos que UM 20,000 actuales tienen un valor en el tiempo de UM 23,600 pasado un año, 27,848 dos años después y, 38,776 pasado cuatro años. Inversamente el valor de UM 38,776 a cuatro años vista es UM 20,000 en la actualidad.

Los cálculos del valor del dinero en el tiempo lo efectuamos con 18% de costo anual, podría haberse calculado a tasa mayor o menor, pero este costo nunca será cero. En nuestro ejemplo el valor del dinero en el tiempo de UM 20,000 al final de cuatro años es UM 38,776, evaluando al 18% de costo de capital anual.

El proceso recíproco del interés compuesto es el valor futuro o «descontando el futuro», análogamente el VA reconoce tasas de rendimiento en todas las transacciones de dinero. El prestatario y el prestamista son dos partes de la misma transacción. El prestamista espera recibir UM 32,861 tres años después; no obstante, el valor actual de ese ingreso es sólo UM 20,000. Esto quiere decir, que el valor futuro de UM 32,861 ***descontado*** al presente es UM 20,000 al 18% de interés. El descuento es simplemente el reconocimiento del valor cronológico del dinero.

El factor tiempo juega papel decisivo a la hora de fijar el valor de un capital. No es lo mismo disponer de UM 10,000 hoy que dentro de un año, el valor del dinero cambia como consecuencia de:

1) La inflación.
2) La oportunidad de invertirlos en alguna actividad, que lo proteja de la inflación y al mismo tiempo produzca rentabilidad.
3) Riesgo de crédito.

Si la alternativa fuera recibir los UM 10,000 al final de un año, nosotros aceptaríamos la propuesta a condición de recibir una suma adicional que cubra los tres elementos indicados. Dicho esto, concluimos en que el dinero produce más dinero, o más claramente genera riqueza.

**Ejemplo:**
¿Me prestaría alguien UM 3,000 hoy, a condición de devolverle UM 3,000 dentro de un año? Si dicen no, quiere decir que los UM 3,000 dentro de un año no son los mismos a los actuales. Si piden devolver UM 3,450, esta suma al final de un año será el valor cronológico de UM 3,000 en la actualidad, en este caso, el valor del dinero ha sido evaluado al 15% anual.

## 9. Prohibidas: las Sumas y las Restas

*Las cantidades sólo pueden sumarse o restarse cuando ocurre en el mismo momento.*

En las matemáticas financieras están prohibidas las sumas y las restas, veamos esto con un ejemplo: tomemos seis pagos anuales de UM 100 al 12% de interés anual.

Cada UM 100 vale únicamente este valor en su momento en la escala temporal, en cualquier otro momento, su valor es distinto. No es posible sumar los UM 100 al final del año 3 a los UM 100 del final del año 5. Primero calculamos el valor cronológico en el año 5, o sea, convertimos la cifra a fin que corresponda al año 5, antes que la suma tenga sentido. Al 12% de interés anual: n = 2 (5-3).

$$VF = 100\,(1 + 0.12)^2 = UM\ 125.44$$

Luego la suma de los dos gastos en el año 2 será 125.44 + 100 = UM 225.44 y no UM 200. Es decir: Las cantidades sólo pueden sumarse o restarse cuando ocurren en el mismo momento (de tiempo). Los montos diferentes deben transformarse primeramente en equivalentes de un mismo momento, de acuerdo con el valor del dinero en el tiempo, antes de que puedan sumarse o restarse (o manipularse en alguna otra forma).

Volviendo al ejemplo, podríamos decir, que haremos seis pagos iguales a fines de año por UM 600, durante los próximos seis años, lo cual es correcto, pero en ningún caso esto significa evaluación de ellos.

## 10. La Equivalencia

*Es un concepto de mucha importancia en el ámbito financiero; utilizado como modelo para simplificar aspectos de la realidad* [URL 1].

Dos sumas son equivalentes (no iguales), cuando resulta indiferente recibir una suma de dinero hoy (VA - valor actual) y recibir otra diferente (VF - valor futuro) de mayor cantidad transcurrido un período; expresamos este concepto con la fórmula general del interés compuesto:

Fundamental en el análisis y evaluación financiera, esta fórmula, es la base de todo lo conocido como Matemáticas Financieras.

**Hay dos reglas básicas en la preferencia de liquidez, sustentadas en el sacrificio de consumo** [URL 6]**:**

1. Ante dos capitales de igual valor en distintos momentos, preferiremos aquel más cercano.
2. Ante dos capitales presentes en el mismo momento pero de diferente valor, preferiremos aquel de importe más elevado.

La preferencia de liquidez es subjetiva, el mercado de capitales le da un valor objetivo a través del precio que fija a la transacción financiera con la **tasa de interés.**

Para comparar dos capitales en distintos instantes, hallaremos el equivalente de los mismos en un mismo momento, y para ello utilizamos las fórmulas de las matemáticas financieras.

Como vimos, no es posible sumar unidades monetarias de diferentes períodos de tiempo, porque no son iguales. Cuando expusimos el concepto de inversión, vimos que la persona ahorra o invierte UM 10 para obtener más de UM 10 al final de un período, determinamos que invertirá hasta cuando el excedente pagado por su dinero, no sea menor al valor asignado al sacrificio de consumo actual, es decir, a la tasa a la cual está dispuesta a cambiar consumo actual por consumo futuro.

Equivalencia no quiere decir ausencia de utilidad o costos; justamente ésta permite cuantificar el beneficio o pérdida que significa el sacrificio de llevar a cabo una operación financiera.

Un modelo matemático representativo de estas ideas, consiste en la siguiente ecuación:

**VF = VA +** compensación por aplazar consumo

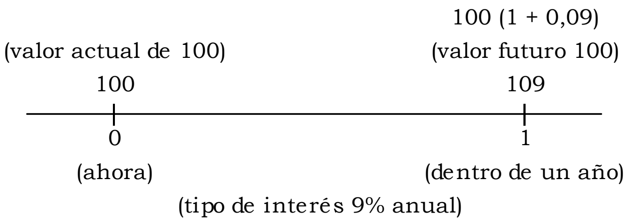
**Donde:**

VF = Suma futura poseída al final de n períodos, Valor Futuro.

VA = Suma de dinero colocado en el período 0, Valor Actual.

El valor actual (VA) es equivalente a mayor cantidad en fecha futura (VF), siempre y cuando la tasa de interés sea mayor a cero.

Diagrama de equivalencia de capitales




Al cabo de un año UM 100 invertido al 9% anual, es UM 109. Entonces decimos: el ***valor futuro*** de UM 100 dentro de un año, al 9% anual, es UM 109. En otras palabras: **el valor actual** de UM 109 dentro de un año, al 9% anual, es UM 100.

Es decir UM 100 es equivalente a UM 109 dentro de un año a partir de hoy cuando la tasa de interés es el 9% anual. Para una tasa de interés diferente al 9%, UM 100 hoy no es equivalente a UM 109 dentro de un año.

Aplicamos el mismo razonamiento al determinar la equivalencia para años anteriores.

UM 100 hoy es equivalente a UM 100 / 1.09 = UM 91.74, es decir:
UM 91.74 hace un año (anterior), UM 100 hoy y UM 109 dentro de un año (posterior) son equivalentes entre sí al 9% de capitalización o descuento. Con esto establecemos que:

$$\frac{\text{UM } 109}{\text{UM } 100} = \mathbf{1.09\%} \text{ anual} \qquad \frac{\text{UM } 100}{\text{UM } 91.74} = \mathbf{1.09\%} \text{ anual}$$

Estas tres sumas de dinero son equivalentes al 9% de interés anual, diferenciado por un año.

Las fórmulas financieras que permiten calcular el equivalente de capital en un momento posterior, son de **Capitalización Simple o Compuesta**, mientras aquéllas que permiten calcular el equivalente de capital en un momento anterior las conocemos como fórmulas de **Descuento Simple o Compuesto**. Estas fórmulas permiten también sumar o restar capitales en distintos momentos. Desarrollamos ampliamente el concepto de equivalencia cuando tratamos las clases de interés.

## 11. Operación Financiera [URL 6]

Entendemos por operación financiera el reemplazo de uno o más capitales por otro u otros equivalentes en distintos momentos de tiempo, mediante la aplicación del interés simple y compuesto.

Cualquier operación financiera es un conjunto de flujos de caja (cobros y pagos) de signo opuesto y distintas cuantías que ocurren en el tiempo. Así, por ejemplo, la concesión de un préstamo por parte de una entidad bancaria a un cliente supone para este último un cobro inicial (el importe del préstamo) y unos pagos periódicos (las cuotas) durante el tiempo que dure la operación. Por parte del banco, la operación implica un pago inicial único y unos cobros periódicos.

La realización de una operación financiera implica, el cumplimiento de tres puntos:

1°. Sustitución de capitales. Ha de existir un intercambio de un(os) capital(es) por otro(s).

2°. Equivalencia. Los capitales han de ser equivalentes, es decir, debe resultar de la aplicación del interés simple o compuesto.

3°. Aplicación del interés simple o compuesto. Debe existir acuerdo sobre la forma de determinar el importe de todos y cada uno de los capitales que conforman la operación.

## 11.1. Componentes

### 11.1.1. Personales

En una operación financiera básica intervienen un sujeto (acreedor) que pone a disposición de otra (deudor) uno o más capitales y que posteriormente lo recupera incrementado, es decir, el principal más los intereses.

La acción de entregar por parte del acreedor y de recibir por parte del deudor es la **prestación de la operación** financiera. La operación concluirá cuando el deudor termine de entregar al acreedor el capital (más los intereses); esta actuación por ambas partes es la **contraprestación de la operación** financiera.

En toda operación financiera las cantidades entregadas y recibidas por cada una de las partes no coinciden. El aplazamiento (o adelantamiento) de un capital en el tiempo supone la producción de intereses que formarán parte de la operación y que habrá que considerar y cuantificar. Por tanto, prestación y contraprestación nunca son aritméticamente iguales. No obstante, habrá una ley financiera que haga que resulten financieramente equivalentes, es decir, que si valorásemos prestación y contraprestación en el mismo momento, con la misma ley y con el mismo porcentaje, entonces sí se produciría la igualdad numérica entre ambas. Tanto la prestación como la contraprestación pueden estar formadas por más de un capital.

### 11.1.2. Temporales

El momento de tiempo donde comienza la prestación es el **origen**, donde concluye la contraprestación es el **final** y el intervalo de tiempo que transcurre entre ambas fechas es la **duración** de la operación financiera, durante el cual se generan los intereses.

### 11.1.3. Objetivos

La realización de la operación financiera exige un acuerdo sobre aspectos tales como: la suma inicial del capital, la ley financiera (simple o compuesto) a utilizar y la tasa de interés (costo/ganancia) acordado.

## 11.2. Clases

**A. Según la duración:**

A corto plazo: la duración de la operación no supera el año.

A largo plazo: aquellas con una duración superior al año.

**B. Según la ley financiera que opera:**

Según la generación de intereses:

En régimen de simple: los intereses generados en el pasado no se acumulan, no generan nuevos intereses.

En régimen de compuesta: los intereses generados en el pasado se acumulan al capital inicial y generan, a su vez, nuevos intereses.

Según el sentido en el que se aplica la ley financiera:

De capitalización: sustituye un capital presente por otro capital futuro.

De actualización o descuento: sustituye un capital futuro por otro capital presente.

**C. Según el número de capitales de que consta:**

Simples: constan de un solo capital en la prestación y en la contraprestación.

Complejas (o compuestas): formadas por más de un capital en la prestación y/o en la contraprestación.

## 12. Introducción al costo de oportunidad y costo de capital

Uno de los problemas más significativos en la administración financiera es la determinación de la tasa de descuento. La caracterización de esta tasa depende del origen de los fondos: cuando la inversión proviene de recursos propios la denominamos **costo de oportunidad** (que el inversionista deja de ganar por no haberlos invertido en otro proyecto alternativo de similar nivel de riesgo) o de terceros, llamado **costo de capital**, representado por el interés de los préstamos corregido por su efecto tributario, deducido los impuestos.

Cualquiera sea el caso, si disponemos del dinero o no para invertir, tendremos entonces que referirnos al Mercado de Capitales, lugar donde acuden agentes excedentarios (oferentes) y deficitarios (demandantes) de dinero para invertir o prestar este recurso.

Uno de los inconvenientes al determinar la tasa de descuento, es que depende no solamente de la fuente de donde provengan los recursos, sino además de la información manejada por el decisor. Justificamos esto con el siguiente **ejemplo**. ¿Cuántas opciones de inversión (o financiación) tendría el campesino, que vive donde existe únicamente un Banco o Caja Rural o Municipal de Ahorro y Crédito? La persona puede tener máximo tres opciones:

1. Guardar su dinero en la casa
2. Depositar su dinero en cuenta de ahorros, que le produzca apenas para cubrir la devaluación monetaria.
3. Invertir su dinero en un Bono del Estado, que le generará algunos rendimientos adicionales a la inflación.

Si en cambio consideramos una persona que trabaja en la ciudad de Lima (capital del Perú), veremos fácilmente que no solamente tiene las tres opciones mencionadas anteriormente, sino además considerará todos los productos ofertados por las demás entidades de la ciudad y si tiene conocimientos suficientes, evaluará las opciones de inversión en el mercado de valores peruano y porque no, mundial.

**Otro ejemplo**: Tengo UM 2,000. Puedo decidir guardarlos en mi bolsillo por un mes. A fin de mes voy a tener UM 2,000 iguales.

Inversamente, puedo decidir, invertir en un negocio de compraventa cuyo rédito es 25% mensual, es decir tengo la oportunidad de ganar UM 500 a fin de mes.

Luego, si prefiero guardar el dinero en mi bolsillo a pesar de todo, dejo de ganar UM 500. Así, diré que mi costo de oportunidad o costo alternativo por desaprovechar la oportunidad de obtener ganancia ofrecida por el negocio de compraventa es de UM 500.

Entonces, después de todo el costo de oportunidad no es un costo real o efectivo, ni pérdida verdadera, sino más bien un costo o pérdida referencial indica si estoy, o no, siendo eficiente en el manejo de mi dinero.

### 12.1. ¿Cómo determinar el costo de las deudas?

La forma más sencilla de determinar el costo de una deuda es a través del cálculo ponderado de las diferentes fuentes de financiamiento, con el que obtenemos el costo promedio de la deuda (WACC) de la empresa, antes o después de impuestos.

El proceso de cálculo consiste en multiplicar el costo del dinero por la proporción que tiene en el total de los aportes de los fondos, según el valor de mercado de la compañía.

**EJEMPLO:**

Una empresa tiene la estructura de financiamiento siguiente: Total UM 100,000, de este total corresponden: UM 20,000 con 42% de costo anual, UM 30,000 con 36% de costo anual, UM 28,000 al costo de 32% y UM 22,000 con 25% de costo anual; luego el costo promedio del capital de esta compañía es:

Ponderación:
0.42*0.20 = 0.0840
0.36*0.30 = 0.1080
0.32*0.28 = 0.0896
0.25*0.22 = 0.0550

| MONTO UM | PROPORCION | COSTO % | | PONDERACION |
|---|---|---|---|---|
| 20,000.00 | 20.00% | 0.42 | x | 0.0840 |
| 30,000.00 | 30.00% | 0.36 | x | 0.1080 |
| 28,000.00 | 28.00% | 0.32 | x | 0.0896 |
| 22,000.00 | 22.00% | 0.25 | x | 0.0550 |
| 100,000.00 | 100.00% | Costo total promedio WACC | | 0.3366 |

Es decir es una tasa de costo promedio de capital de 33.66%

## 12.2. ¿Cuál sería la tasa adecuada de descuento para determinar el Valor Actual Neto VAN de proyectos peruanos?

Tomado del trabajo de David Wong Cam, Magíster de la Universidad del Pacífico

Si disponemos de información limitada de la bolsa de valores y otras fuentes como la opinión de expertos, es factible lograr una conveniente tasa de descuento tomando en cuenta ciertos objetivos. Si no obtenemos una tasa de descuento, no existiría método para valorar negocios y la imprecisión sería peor que la búsqueda de «la mejor estimación posible con la información disponible». El mercado de capitales peruano, tiene pocos costos de oportunidad, en este campo la actividad empresarial es muy limitada.

Es cierto que es difícil encontrar una acción que replique el proyecto en evaluación y todos los evaluadores sienten que es imposible encontrar la tasa de descuento exacta. Pero olvidan que la tasa de descuento además de constituirse en una alternativa de colocación también debe reflejar el riesgo del proyecto. El evaluador debe exigir una mayor rentabilidad a aquellos proyectos que tenga una mayor posibilidad de pérdida. Este riesgo encierra muchos factores específicos como las plagas, volatilidad de los precios de los minerales, falta de competitividad frente a los mercados externos, etc. En muchas ocasiones, este factor riesgo es olvidado.

Un cálculo rápido de la tasa de descuento exige una combinación de conocimiento y sentido común. De no obtenerse una acción gemela en la bolsa de valores debe seguirse los siguientes pasos:

1. Determinar la tasa activa (tasa de los préstamos que otorga el sistema financiero) a la que acceden los gestores principales del proyecto.
2. Tener en cuenta el rendimiento esperado de las acciones en los Estados Unidos del 12. 2% anual.
3. La tasa de descuento debe ser superior al mayor valor de los hallados en el punto 1 y 2.
4. El evaluador debe definir, con criterio, que la tasa de descuento se encontrará entre la tasa hallada en el punto 3 y 30% anual.
5. Debe revisarse casos excepcionales, que por razones específicas, puedan diferir del resultado del procedimiento anterior.

*Es importante tomar en cuenta los siguientes criterios para hallar la tasa adecuada de descuento:*

1. *El mercado de capitales peruano no es totalmente incompleto, se transan unas 200 empresas y son líquidas unas 15. Los modelos extranjeros siguen siendo válidos para hallar la tasa de descuento de proyectos peruanos, sólo es más difícil su medición.*
2. *El riesgo en el Perú es mayor al riesgo en otros países como Estados Unidos. Por lo tanto su tasa de descuento debe ser mayor. La rentabilidad esperada de las acciones ordinarias del Standard and Poor´s (SP500), tomando la referencia histórica de 68 años (desde 1926 hasta 1994) es de 12.2% anual en dólares. La tasa de descuento de un proyecto riesgoso, salvo para algunos sectores de servicios públicos como Edegel, debe ser superior a esa tasa.*
3. *El riesgo del proyecto debe ser mayor al riesgo incluido en la tasa de préstamo al que acceden los principales gestores del proyecto. La tasa de descuento debe ser superior a la tasa de préstamo a la que accede aquel. Así por ejemplo, si el gestor de un proyecto no es uno preferente, accederá hoy, a una tasa activa de alrededor de 12%. Si asumimos que el banco ha realizado una evaluación adecuada del gestor y que el proyecto es más riesgoso que un préstamo, la tasa de descuento debe ser superior a la tasa de préstamo.*
4. *En un estudio, se tomó como referencia 15 acciones del índice selectivo de la bolsa de valores de Lima, en el período desde el 1 de junio de 1994 y julio de 1996. Se obtuvo que las tasas de descuento oscilaban entre 8% (Edegel) y 30% (Atacocha). Si asumimos que el proyecto evaluado se encuentra en este rango, la dispersión de tasas no es muy amplia.*

5. *La consistencia de datos ofrece mayores posibilidades de precisión en el cálculo de la tasa de descuento. Los flujos de caja libres deben ser descontados al costo promedio de capital (WACC siglas en inglés), mientras que los flujos de caja financieros al costo de capital de los accionistas corregidos por una prima de riesgo financiero. En muchas ocasiones el evaluador descuenta los flujos a la tasa equivocada.*

## 13. Valoración de intereses

Es una verdad a toda prueba, que las organizaciones, empresas, grupos o personas necesitan en algún momento obtener recursos para financiarse, estos recursos comúnmente son difíciles de conseguir y cuando ello sucede, las entidades o personas que realizan estos préstamos cobran una retribución por el tiempo que el dinero está en manos de sus deudores.

Como explicamos anteriormente, el mercado está formado por dos «agentes», los excedentarios, quienes poseen el recurso, y los deficitarios, aquellos que lo necesitan. El agente excedentario entrega el recurso al agente deficitario, por período determinado y a cambio recibe beneficios.

Los intereses percibidos por los agentes prestamistas a las empresas adquieren gran importancia en la actualidad, éstos son la principal fuente de obtención de recursos en el corto plazo, por ello es necesario hacer el análisis respectivo de los montos devueltos a los prestamistas y la forma de calcularlos, el interés cobrado por uno u otro préstamo puede variar su monto de acuerdo a factores que serán posteriormente explicados.

### 13.1. El interés

*«El concepto de* interés*, sin ser intuitivo, está profundamente arraigado en la mentalidad de quienes viven en un sistema capitalista. No necesitamos formación académica para entender que cuando recibimos dinero en calidad de préstamo, es «justo» pagar una suma adicional al devolverlo. La aceptación de esta realidad económica, es común a todos los estratos socioeconómicos»* [URL 1].
*"El dinero puede convertirse en capital a base de la producción capitalista. Y gracias a esta transformación de un valor dado se transforma en un valor que se valoriza, que se incrementa a sí mismo..."* [URL 2]

**El interés**, tiene importancia fundamental en los movimientos de capitales, la colosal infraestructura financiera y crediticia descansa sobre este concepto básico de pagar por el uso del dinero tomado en préstamo. Sin el interés el mercado de capitales o simplemente los negocios no existirían.

El **interés** es el monto pagado por la institución financiera para captar recursos, así como el monto cobrado por prestar recursos (colocar). El interés es la diferencia entre la cantidad acumulada menos el valor inicial; sea que tratemos con créditos o con inversiones.

Actualmente, con mercados financieros complejos y ampliamente desarrollado, las economías domésticas y las empresas intermediarias del mercado, canalizan los fondos desde los agentes excedentarios o inversores, prestando dinero, al agente deficitario, el cual utiliza estos recursos, para satisfacer sus necesidades. Todo esto genera el traspaso de fondos desde los ahorristas, hasta quienes compran realmente los bienes de capital.

El **interés es un precio**, el cual expresa el valor de un recurso o bien sujeto a intercambio, es la renta pagada por el uso de recursos prestados, por período determinado. Es un factor de equilibrio, hace que el dinero tenga el mismo valor en el tiempo. Si la tasa de interés anual es el 8%, quiere decir que el prestamista recibe por concepto de intereses UM 8, por cada UM 100 prestado al año.

Por otro lado si el inversionista está dispuesto a prestar UM 100 a cambio de UM 108 en dos años más, la tasa será de 8%, pero a diferente unidad de tiempo (2 años).

El tipo de interés depende directamente de dos factores reales no monetarios: la preferencia por tener los recursos a la promesa de recursos futuros y la productividad de la inversión. El interés es el precio del dinero en el tiempo.

El concepto del **riesgo por incertidumbre**, tiene carácter muy importante dentro de la magnitud del interés. Conociendo la preferencia de los agentes por un valor seguro, pero no la productividad a obtenerse por la inversión del recurso, nos encontramos frente a variables distintas, a esta productividad la llamamos «tasa de beneficio esperado». De esta manera, la tasa de interés es el precio del tiempo, mientras la tasa de rentabilidad es el precio del tiempo cuando existe riesgo. La tasa de rentabilidad es el precio del tiempo más una prima por riesgo (precio del riesgo).

Ahora veamos los distintos tipos de interés utilizados por los mercados financieros.

**Interés Fijo y Variable:** Conocemos como tipo de **interés fijo**, a la tasa de interés constante en el tiempo. La **tasa variable**, es el tipo de interés donde una parte la calculamos sobre una base fija más un índice de referencia. El índice de referencia varía según las condiciones del mercado. En el Perú las entidades financieras utilizan diferentes tasas de interés.

Clasificamos los plazos de las tasas de interés de dos formas:

**Interés de Corto Plazo:** Referido a los intereses que devengan o liquidan intereses en un período inferior a 12 meses.

**Interés de Largo Plazo:** Son intereses devengados o liquidados en períodos superiores a un año.

Actualmente esta es la única clasificación utilizada para señalar los plazos de las operaciones, si bien antiguamente utilizaban el concepto de «Mediano Plazo», a la fecha este ha pasado a formar parte del largo plazo.

## 13.2. Rédito y tasa de interés [URL 6]

Rédito (***r***), es el rendimiento generado por un capital representado en tanto por ciento (%) o tanto por uno.

$$[1]\quad \boldsymbol{r} = \frac{\text{VF-VA}}{\text{VA}} \qquad\qquad \boldsymbol{r} = \frac{\text{Costo del dinero}}{\text{Lo que recibimos}}$$

Esta fórmula no considera el factor temporal, es decir, en cuánto tiempo se ha generado ese rendimiento. La medida que toma en cuenta el tiempo es la tasa de interés (***i***), definida como el rédito por unidad de tiempo.

$$\boldsymbol{i} = \frac{\text{r}}{\text{n}}$$

Son las oportunidades de inversión o de financiación, las que determinan la existencia de la tasa de interés. Este fenómeno económico real, *es medido con la tasa de interés i, la cual, a su vez, es representada por un porcentaje*. Calculamos éste porcentaje dividiendo el costo del dinero (VF - VA = I) entre lo que recibimos (VA) y el tiempo de duración.

$$\boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{I}}{\boldsymbol{VA}} \qquad\qquad [1\text{A}]\quad \boldsymbol{i} = \frac{\text{r}}{\text{n}} = \frac{\frac{\text{VF-VA}}{\text{VA}}}{\text{n}}$$

Rédito y tasa de interés coinciden cuando el período ***n*** es la unidad.

Nomenclatura:
**r** = Rédito
**i** = Tasa de interés
**VA** = Valor actual
**VF** = Valor futuro
**n** = Periodo de capitalización o de actualización.

**Ejemplo:**
Una suma de UM 5,000 genera otro de UM 6,000 dentro de un año. Determinar el rédito y la tasa de interés de la operación financiera.

**Solución**:
VA = 5,000; VF = 6,000; n = 1; r =?; i =?

$$[1]\quad \boldsymbol{r} = \left(\frac{\text{6,000-5,000}}{\text{5,000}}\right)\times 100 = 20\% \qquad\qquad [1\text{A}]\quad \boldsymbol{i} = \left(\frac{\frac{\text{6,000-5,000}}{\text{5,000}}}{1}\right)\times 100 = 20\%$$

Veamos el caso cuando la transacción dura 2 años:

$$[1] \quad \boldsymbol{r} = \left(\frac{6{,}000\text{-}5{,}000}{5{,}000}\right) \times 100 = 20\%$$

$$[1A] \quad \boldsymbol{i} = \left(\frac{\frac{6{,}000\text{-}5{,}000}{5{,}000}}{2}\right) \times 100 = 10\%$$

20% (r) es la tasa global y 10% (i) es la tasa del período de capitalización o actualización según el caso. De aplicación cuando operamos con pagos únicos a interés simple.

Para el cálculo de la tasa de interés compuesto con pagos únicos operamos con la fórmula [22] o la función financiera TASA de Excel.

Para el cálculo de la tasa de interés de las anualidades o flujos variables, utilizamos la función financiera TASA (flujos uniformes) y TIR (flujos variables) de Excel, ambas funciones proporcionan la tasa periódica de actualización o capitalización a partir de las cuales obtendremos la tasa nominal o el costo efectivo de la operación financiera.

### Tasa de interés al rebatir

Es la tasa del período, aplicada al saldo deudor de una obligación pendiente de pago. Utilizada por el sistema financiero para la recuperación de los préstamos que otorgan.

## 13.3. Componentes de la tasa de interés [URL 1]

La tasa de **interés corriente** (**ic**), es la tasa del mercado, aplicado por los bancos y cualquier entidad financiera; la tasa efectivamente pagada por cualquier préstamo. Tiene tres componentes o causas:

**1. El efecto de la inflación** ($\Phi$): medida del aumento del nivel general de precios, valorada a través de la canasta familiar; notamos su efecto en la pérdida del poder adquisitivo de la moneda. A mayor inflación, mayor tasa de interés.

**2. El efecto del riesgo**, inherente al negocio o inversión. A mayor riesgo, mayor tasa de interés. Elemento de riesgo (**ip**).

**Ejemplos**:
De las siguientes opciones ¿Cuál elegiría?
1) Supongamos, decidimos invertir UM 10
- Obtener UM 15 dentro de un año (100% seguro) u
- Obtener UM 15 dentro de un año (Inseguro)

Obviamente cualquier persona racional elegirá la primera.

**Ahora veamos otras dos opciones**:
- Obtener UM 15 dentro de un año (100% seguro)
- Obtener UM 19 dentro de un año (Inseguro)

En la primera opción, la tasa de interés es del 50% anual (el premio por esperar), mientras en la segunda, la tasa de interés es del 90% anual (premio por esperar + premio por arriesgarse).

| | |
|---|---|
| TASA DE INTERÉS LIBRE DE RIESGO | = 50% + |
| PREMIO POR ARRIESGARSE O TASA DE RIESGO | = 40% |
| TASA DE INTERÉS CON RIESGO | = 90% |

La tasa de riesgo está determinada por las condiciones del mercado y el nivel de riesgo de la inversión, este nivel de riesgo está íntimamente ligado a la certeza del pago de la inversión.

Por lo general los determinantes del costo riesgo son: carencia de información, de garantías y dificultad de recuperación.

Fórmula General:

$$[2]\quad \boldsymbol{i}_c = (1+\boldsymbol{i})*(1+\Phi)*(1+\boldsymbol{ip})-1$$

**3. La tasa real** « ***i*** » propio del negocio, lo que el inversionista desea ganar, libre de riesgos e inflación. Rendimiento base. Generalmente los bonos del tesoro de EE.UU. son tomados como parámetro para la tasa libre de riesgo. Tasa de interés real (***i***).

**Ejemplo:**

Consideremos la Tasa Interna de Retorno TIR[3] de dos bonos y un negocio:

1. Bono del tesoro de Estados Unidos: TIR = 5.50% anual (inversión libre de riesgo por definición) y
2. Bono del gobierno peruano: TIR = 10% anual (inversión riesgosa), TIR de un negocio en el Perú = 22% (riesgo elevado).

Descomponiendo la TIR de estos bonos en sus premios, tenemos:

| Inversión | TIR | Premio por esperar | Premio por arriesgarse |
|---|---|---|---|
| Bono EE.UU. | 5.50% | 5.50% | 0.00% |
| Bono Peruano | 10.00% | 5.50% | 4.50% |
| Negocio en Perú | 22.00% | 5.50% | 16.50% |

Premio por arriesgarse:

| | | |
|---|---|---|
| Bono de EE. UU. | 5.50% - 5.50% | = 0.00% |
| Bono Peruano | 10.00% - 5.50% | = 4.50% |
| Negocio en Perú | 22.00% - 5.50% | = 16.50% |

### ¿Por qué la diferencia de tasas?

El gobierno de EE.UU. es considerado el pagador más solvente del planeta (tiene la «fábrica» de dólares), prestarle dinero en forma de un bono está prácticamente libre de riesgo, la tasa pagada por los bonos de EE.UU., es la tasa libre de riesgo usada como referencia. En forma diferente, el gobierno peruano es considerado un pagador muy poco solvente, prestarle dinero en forma de un bono es considerado arriesgado.

El premio por arriesgarse es mayor en el negocio que en el caso del bono. Analizando los componentes del premio por arriesgarse en el negocio vemos:

| | |
|---|---|
| RIESGO PAIS | = 4.50% + |
| RIESGO PROPIO DEL NEGOCIO | = 12.00% |
| PREMIO POR ARRIESGARSE | = 16.50% |

Existe un premio por el riesgo propio del negocio, ésta tasa es exclusiva de la actividad y varía muy poco con el paso del tiempo. El riesgo país influye en el premio por arriesgarse a hacer negocios en el Perú. Luego: cuando el riesgo país es alto el premio por arriesgarse a invertir en el Perú será alto.

**Fórmulas para calcular *ic*, e *i*, cuando *ip* = 0, a partir de la fórmula general**

Para calcular la tasa de interés corriente o comercial (**ic**) no sumamos estos componentes; la tasa corriente es el resultado del producto de estos elementos:

$$[2A]\quad \boldsymbol{ic} = (1+\boldsymbol{i})(1+\Phi)-1 \qquad\qquad [3]\quad \boldsymbol{i} = \frac{(1+\boldsymbol{ic})}{(1+\Phi)}-1$$

Nomenclatura:

**ic** = tasa de interés corriente
**i** = tasa de interés real
$\Phi$ = porcentaje de inflación en el período

**Fórmula para la obtención de la inflación acumulada**:

[4] $\Phi = (1+\Phi_1)(1+\Phi_2)\ \dots\ (1+\Phi_3) - 1$

El propósito de la **tasa de interés real** « ***i*** » es quitar a la tasa de interés efectiva el efecto de la variación del poder adquisitivo de la moneda. En contextos inflacionarios es imprescindible hablar de tasas de interés real, dado que evaluar el costo de la deuda o el rendimiento de una inversión en términos efectivos puede llevarnos a tomar decisiones equivocadas.

Seremos muy cuidadosos al determinar la tasa de interés corriente (***ic***), para evitar que los asalariados, micros y pequeños empresarios terminen pagando tasas excesivas; es recomendable, operar con tasas no subsidiadas ni de usura. No es posible que en países con índices de inflación menor al 2.5% anual las entidades financieras cobren tasas entre 3.8 y 4.5% mensual. Al evaluar alternativas de inversión y al objeto de estimar la tasa futura de interés, proyectaremos la inflación, la tasa real y el riesgo.

Existen entidades financieras (Bancos) que cobran e indican por separado el ajuste monetario (inflación Φ) y el interés real (**i**) además de mecanismos de protección como seguros, hipotecas, garantes, etc., razón por la cual deberían estar libres de riesgo (**ip**).

Según el sistema financiero, el componente riesgo es mayor cuando los préstamos son para micros y pequeñas empresas (MYPES), más aún si están ubicadas en zonas populares. No así cuando corresponden a «grandes empresas», con mayor razón si pertenecen al conglomerado financiero del Banco prestamista.

Tasas excesivas frenan el desarrollo del aparato productivo de un país**.**

### EJERCICIO 1 (Cálculo de la tasa de interés real)

En el sistema financiero la tasa de interés de julio a octubre fue de 5.8%, siendo la inflación mensual la siguiente: julio 3.25%; agosto 2.96%; setiembre 1.25% y octubre 4.66%. Determinar la tasa de interés real.

1º Calculamos la inflación acumulada del período julio-octubre: con la fórmula:

[4] = (1+0.0325)(1+0.0296)(1+0.0125)(1+0.0466) = 0.1265

2º Calculamos el interés real:
ic = 0.058; Φ = 0.1265; i = ?

[3] $\boldsymbol{i} = \left\langle \frac{1.058}{1.1265} - 1 \right\rangle = \ -0.0608$

El resultado indica pérdidas por -6.08% en términos de poder adquisitivo.

## 13.4. Definición de riesgo

*Tomado del documento: «Calificaciones de crédito y riesgo país» elaborado por Jorge Morales y Pedro Tuesta, Banco Central de Reserva, Departamento de Análisis del Sector Externo de la Gerencia de Estudios Económicos (Perú). Los agregados y subrayados son nuestros* [URL 7].

En las operaciones financieras y de inversión en el ámbito internacional existe diversidad de factores o riesgos que afectan la percepción de rentabilidad y seguridad. El «riesgo» puede estar asociado al tipo de deudor (soberano o no soberano), al tipo de riesgo (político, financiero o económico), o a la posibilidad del repago (libertad de transferencia de divisas, voluntad de cumplimiento y ejecución del pago). El objetivo de este numeral es dar las pautas para distinguir entre «riesgo país», «riesgo soberano», «riesgo comercial» y «riesgo crediticio».

### 13.4.1. Riesgo país, riesgo soberano y riesgo no soberano

Nagy (1979) define «riesgo país» como la exposición a dificultades de repago en una operación de endeudamiento con acreedores extranjeros o con deuda emitida fuera del país de origen. El **«RIESGO PAÍS»** califica a todos los deudores del país, sean éstos públicos o privados. El **«RIESGO SOBERANO»** es un subconjunto del riesgo país y califica a las deudas garantizadas por el gobierno o un agente del gobierno. El «**RIESGO NO SOBERANO**» es, por excepción, la calificación asignada a las deudas de las corporaciones o empresas privadas.

Sin embargo, Hefferman (1986) y Ciarrapico (1992) consideran «riesgo país» y «riesgo soberano» como sinónimos. En su opinión, riesgo país y riesgo soberano están referidos al riesgo que proviene de préstamos o deudas públicamente garantizadas por el gobierno o tomadas directamente por el gobierno o agentes del gobierno. En general, el «riesgo país» trata de medir la probabilidad de que un país sea incapaz de cumplir con sus obligaciones financieras en materia de deuda externa, esto puede ocurrir por repudio de deudas, atrasos, moratorias, renegociaciones forzadas, o por «atrasos técnicos».

### 13.4.2. Riesgo país, riesgo comercial y riesgo crediticio

El «riesgo país» está referido al país en su conjunto. El «**RIESGO COMERCIAL**» corresponde al riesgo que surge por alguna transacción o actividad comercial (de intercambio de bienes y servicios, emisión de deuda o inversión) o por operaciones fuera del país deudor. El «riesgo comercial» está asociado a las acciones del sector privado que pueden elevar la exposición o la probabilidad de una pérdida. Algunos autores como De Boysson (1997) denominan «riesgo comercial» como «riesgo mercado».

El «**RIESGO CREDITICIO**» es el riesgo proveniente de actividades crediticias y evalúa la probabilidad de incumplimiento en los compromisos de una deuda. Para un banco, el «riesgo crediticio» es una parte importante en la evaluación de su «riesgo comercial». En este sentido, los bancos (o acreedores) están interesados en aislar y reducir su exposición al riesgo y, por lo tanto, en calificarlo. En este contexto, entre los 70´s y 80´s se hace extensivo el análisis sistemático del riesgo país y/o del riesgo crediticio.

**EL concepto de RIESGO PAÍS** está asociado a la probabilidad de incumplimiento en el pago de la deuda externa de un país [URL 8], expresado en un Índice Riesgo-País. Este índice representa en un momento determinado el nivel de riesgo de inversión en un país emergente.

En la determinación de esta prima de riesgo influyen factores económicos, financieros y políticos que afectan la capacidad de pago del país. Algunos de ellos son de difícil medición, y de allí la utilización de diferentes metodologías para cuantificar dicha prima.

El Riesgo País es un índice denominado Emerging Markets Bond Index Plus (EMBI+) y mide el grado de «peligro» que entraña un país para las inversiones extranjeras. J. P. Morgan analiza el rendimiento de los instrumentos de la deuda de un país, principalmente el dinero en forma de bonos. Este indicador es aplicado a naciones emergentes.

No todos los países están bajo el foco del análisis de riesgo país, según las trasnacionales financieras (léase FMI, BM, Club de París, etc.) éstos están divididos en dos grupos: países latinoamericanos y países no latinoamericanos. Ver Glosario.

Integran la **región latinoamericana** Argentina, Brasil, Colombia, Ecuador, México, Panamá, Perú y Venezuela.

La **región no latina** está conformada por Bulgaria, Corea del Sur, Marruecos, Nigeria, Filipinas, Polonia y Rusia.

**El EMBI+** es elaborado por el banco de inversiones J. P. Morgan, de Estados Unidos, que posee filiales en varios países latinoamericanos. J. P. Morgan analiza el rendimiento de los instrumentos de la deuda de un país, principalmente el dinero en forma de bonos, por los cuales es abonada una determinada tasa de interés en los mercados.

El **VALOR DEL RIESGO PAÍS** es igual a la diferencia entre las tasas pagadas por los bonos del Tesoro de los Estados Unidos y las pagadas por los bonos del respectivo país. La tasa de los bonos del Tesoro de los Estados Unidos es utilizada como base, es considerada la de menor riesgo en el mercado («dicen» si algún país tiene la capacidad de honrar sus deudas, ese es los Estados Unidos).

TASA DE RENDIMIENTO DE LOS BONOS DE UN PAIS (-)
TASA DE RENDIMIENTO DE LOS BONOS DEL TESORO DE EE. UU.
= RIESGO PAIS

Herring (1983) considera que el riesgo país está compuesto por riesgo político, económico, social y cultural, mientras que Erb, Harvey y Viskanta (1996), siguiendo la metodología del «International Country Risk Guide», consideran que el riesgo país está constituido por riesgo político, financiero y económico. De otro lado, Kobrin (1982) y Overholt (1982) consideran que existe una estrecha interrelación entre el riesgo político y económico razón por la cual el trato diferencial no debería realizarse.

Sobre el particular Simon (1992) define «riesgo político» como el desarrollo de aspectos políticos y sociales que puedan afectar la posibilidad de repatriación de inversión extranjera o el repago de deuda externa. Demirag y Goddard (1994) añaden a esta definición el componente de interferencia por parte del gobierno que podrían afectar la rentabilidad o estabilidad de la inversión extranjera o el pago de la deuda externa. En términos generales, el riesgo político está asociado a la inestabilidad política y a la voluntad de pago (*willingness to pay*) por parte del gobierno (o de la autoridad responsable).

Según la metodología del International Country Risk Guide, el riesgo financiero y el riesgo económico están asociados a la capacidad de pago del país. El «**riesgo financiero**» evalúa el riesgo al que están expuestos por potenciales pérdidas ante controles de cambios, expropiaciones, repudios y atrasos de deudas, o por problemas operativos en el procedimiento de pagos por el sistema financiero local. El «**riesgo económico**» está referido a la posibilidad de incumplimiento debido al debilitamiento de la economía del país tanto en el campo externo como en el campo interno.

### 13.4.3. ¿Cómo es medido el riesgo país?

El Riesgo País es medido en puntos básicos (cada 100 puntos equivalen a 1%), por ello cuando escuchamos que el índice de Riesgo País es de 1,500 puntos, en realidad significa que el bono del país emisor paga 15% adicional sobre la tasa de los bonos norteamericanos.

El Riesgo País es calculado de la siguiente manera: compara cuánto mayor es la TIR de un bono de largo plazo emitido por un gobierno dado respecto de la TIR de los bonos del Tesoro de los Estados Unidos, también por el mismo plazo.

Finalmente, el **riesgo país** es una medida unilateral, impuesta por los prestamistas a la mayoría de países latinoamericanos y algunos de Europa del Este y África [URL 9]. Representa un componente subjetivo de la tasa de interés, orienta las inversiones a actividades especulativas (operaciones de corto plazo, comprar barato hoy para venderlo caro en poco tiempo).

## 13.5. ¿Qué es Spread?

Término inglés que en castellano significa diferencial. Principalmente es utilizado en inglés referido al diferencial de interés de los eurocréditos, es decir, el porcentaje añadido al tipo de interés interbancario en los préstamos con divisas y en su acepción en el mercado de opciones, referido a aquellas estrategias en la utilización de opciones consistentes en ocupar dos o más posiciones comprando y vendiendo opciones del mismo tipo con diferentes precios de ejercicio (diferencial vertical) o con distintas fechas de vencimiento (diferencial horizontal).

**Spread Soberano.-** Descrito como la capacidad y predisposición que tiene un país, para pagar sus obligaciones contraídas con sus acreedores. El Benchmark o Indice de Clasificación, que elaboran calificadoras de riesgo como Standard & Poor's o Moody's Investors Service, establecen las siguientes categorías:

| | | |
|---|---|---|
| AAA | - | Máxima capacidad de pago |
| AA | - | Alta capacidad de pago |
| A | - | Buena capacidad de pago |
| BBB | - | Media capacidad de pago (s/monto de inversión) |
| BB | - | Nivel de inversión con carácter especulativo y bajo riesgo |
| B | - | Nivel de inversión con carácter especulativo y alto riesgo |
| CCC | - | Alto riesgo de no pago pero con buen potencial de recuperación |
| C | - | Alto riesgo de no pago y bajo potencial de recuperación |
| D | - | No existe posibilidad de pago ni potencial de recuperación |
| E | - | No están clasificados por falta de información ni tienen garantías suficientes. |

Cuando la clasificación lleva el signo (+), significa que tiene un menor riesgo, contrariamente si le precede un signo (-), tiene un mayor riesgo de incumplimiento.

## 13.6. ¿Cómo obtiene el banco la tasa activa y de qué depende la tasa pasiva?

Respondemos la interrogante definiendo qué es **Spread o margen financiero** (tiene su base en el riesgo crediticio):

Un Spread de tasas de interés es la diferencia entre la tasa pasiva (tasa que pagan los bancos por depósitos a los ahorristas) y la tasa activa (que cobran los bancos por créditos o préstamos otorgados). Para comprender con mayor facilidad explicamos cómo el banco obtiene la tasa activa, lo único que haremos es restar la tasa pasiva y obtendremos el Spread.

Para obtener la tasa activa el banco toma en cuenta la tasa pasiva, los gastos operativos propios del banco, su ganancia, el encaje promedio del sistema que tienen que depositar en el BCR por cada dólar ahorrado en los bancos, más el componente inflacionario y riesgo. Es así cómo los bancos obtienen su tasa activa, si le quitamos la tasa pasiva el Spread lo componen, los gastos de los bancos, el encaje, las ganancias por realizar esta intermediación, más los componentes inflacionario y riesgo.

**TASA ACTIVA**
= TASA PASIVA
+ GASTOS OPERATIVOS
+ GANANCIA
+ ENCAJE PROMEDIO DEL SISTEMA
+ EL COMPONENTE INFLACIONARIO
+ EL COMPONENTE RIESGO

**SPREAD** = Tasa Activa - Tasa Pasiva

Luego la magnitud de la tasa activa es el resultado de la suma de estos componentes.

Finalmente, la **tasa pasiva** lo conforma:

1. La tasa de rendimiento que esperan ganar los bancos e instituciones financieras sobre el capital invertido.
2. Las preferencias de tiempo de los ahorristas en aras de consumo futuro versus consumo actual.
3. El grado de riesgo del préstamo y
4. La tasa de inflación esperada en el futuro

**Por ejemplo:** Si la tasa activa anual promedio del banco es 30.36% y la tasa pasiva anual de 3.37%, el Spread será:

**SPREAD** = 30.36% - 3.37% = 26.99%

## 13.7. Tipos de interés

**a) Interés ordinario, comercial o bancario**. Este presupone que un año tiene 360 días y cada mes 30 días. Año bancario según el BCR.

**b) Interés Exacto**. Basado en el calendario natural: 1 año 365 o 366 días, y el mes entre 28, 29, 30 o 31 días.

El uso del año de 360 días simplifica los cálculos, pero aumenta el interés cobrado por el acreedor.

Desarrollamos la mayoría de ejercicios en la presente obra considerando el año bancario o comercial; cuando utilicemos el calendario natural indicaremos operar con el interés exacto.

### Tiempo transcurrido entre dos fechas

Lo explicamos con el siguiente ejemplo:

| Mes | Días del Mes | Períodos Transcurridos | |
|---|---|---|---|
| Enero | 31 | 30 | No considera el 1º de Enero |
| Febrero | 28 | 28 | |
| Marzo | 31 | 31 | |
| Abril | 30 | 30 | |
| Mayo | 31 | 31 | |
| Junio | 30 | 30 | |
| Julio | 31 | 15 | Considera los 15 días de Julio |
| **TOTAL** | | **195** | |

¿Cuál es el tiempo transcurrido entre el 1º de enero al 15 de julio del 2004? Para determinar el tiempo transcurrido entre dos fechas excluimos la primera (1/1/04), es decir, únicamente consideramos la segunda (15/7/04). Sobre este tema la normatividad vigente establece: un depósito o inversión generan interés siempre y cuando éstos permanezcan como mínimo un día en la entidad financiera desde el momento del abono o retiro.

Aplicando Excel tenemos:

| | | |
|---|---|---|
| 15/07/2004 | 02/01/2004 | 195 |

**Respuesta:**
195 días.

### 13.8. Clases de Interés

El interés pagado y recibido puede considerarse como simple o compuesto.

## 14. Letra devuelta

Es la letra que el banco devuelve al cliente por no haberse efectivizado la cobranza en su vencimiento. Si la letra fue descontada previamente, el banco cargará en cuenta del cedente, el monto nominal del documento más los gastos originados por el impago, como son: gastos de devolución (comisión de devolución y correo) y gastos de protesto (comisión de protesto y costo del protesto). Intereses: Aplicable cuando el banco cobra con posterioridad a la fecha de vencimiento de la letra devuelta por impagada. Calculada sobre la suma del nominal de la letra no pagada más todos los gastos originados por el impago, por el período transcurrido entre vencimiento y cargo.

### EJERCICIO 2 (Letra devuelta)

Una letra por UM 8,000, es devuelta por falta de pago, cargándose en la cuenta del cedente los siguientes gastos: comisión de devolución 1.5%, comisión de protesto 2.5% y correo UM 4.00. Calcule el monto adeudado en la cuenta corriente del cliente.

| | | |
|---|---|---|
| Valor Nominal de la letra | | 8,000 |
| Comisión devolución [8,000*0.015] | 120 | |
| Comisión protesto [8,000*0.025] | 200 | |
| Correo | 4 | |
| Total Gastos | | 324 |
| Adeudo en Cta. Cte. | | 8,324 |

## 15. Letra de renovación

Es aquella letra emitida para recuperar una anterior devuelta por falta de pago incluido los gastos originados por su devolución. Debemos establecer el valor nominal de esta nueva letra de tal forma que los gastos ocasionados por su falta de pago los abone quien los originó (el librador).

Giramos la letra como aquella emitida y descontada en condiciones normales, con la diferencia de que ahora el efectivo que deseamos recuperar es conocido: el valor nominal no pagado, los gastos de devolución, los gastos del giro y descuento de la nueva letra; siendo desconocido el valor nominal que debemos determinar.

**EJERCICIO 3 (Letra de renovación)**
Para recuperar la letra devuelta por falta de pago del ejemplo 2, acordamos con el deudor, emitir una nueva con vencimiento a 30 días, en las siguientes condiciones tipo de descuento 18%, comisión 3% y otros gastos UM 20.00. Calcular el valor que deberá tener la nueva letra.

**Solución**:
VA = 8,324; n = 30/360; i = 0.18; Coms. = 0.03; Otros GG = 20; VN = ?

1º Calculamos el adeudo en cta. cte.:

**Adeudos en Cta. Cte.** = 8,324[1+0.18*(30/360)] = UM 8,449

2º Finalmente determinamos el valor nominal de la nueva letra:

| | | |
|---|---|---|
| Valor futuro del adeudo en Cta. Cte. | | 8,449 |
| Comisión de renovación [8,324*0.03] | 250 | |
| Otros gastos | 20 | |
| Total Gastos | | 270 |
| Valor Nominal de la letra renovada | | 8,719 |

## 16. Descuento de una remesa de efectos

***Efecto.-*** *Documento o valor mercantil, sea nominativo, endosable o al portador.*

Por lo general el descuento de los efectos no es de uno en uno, normalmente el cliente acude al banco con un conjunto de ellos, una remesa de efectos, agrupados por períodos, para descontarlos conjuntamente en condiciones normales.

La liquidación de la remesa origina la factura de negociación. Siendo el procedimiento de liquidación:

Confeccionar la factura con todos los efectos que componen la remesa.

Sumar cada una de las tres siguientes columnas:

– Importe nominal.
– Importe intereses.
– Importe comisiones.

De existir los gastos éstos vienen expresados aparte (correo, timbres, etc.).

Calculamos el valor líquido de la negociación restando del nominal total de la remesa el monto de los gastos efectuados.

**EJERCICIO 4 (Remesa de efectos)**
Tenemos para descuento la siguiente remesa de efectos:

| Efecto | Nominal | Días de descuento |
|---|---|---|
| A | 20,000 | 15 |
| B | 15,000 | 25 |
| C | 10,000 | 30 |

Las condiciones del descuento son: el tipo descuento es de 15% anual, las comisiones son de 4 por mil (mínimo UM 120) y correo UM 5.00/efecto.

Intereses = 20,000*15*(0.15/360) = 125.00, así sucesivamente
Comisión = (20,000/1000)*4 = 80.00, así sucesivamente

1º Descontamos la remesa:

| Efecto | Nominal | Días | Tasa | Intereses | Porcentaje | Comisión | Correo |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 20,000 | 15 | 15% | 125.00 | 4 por mil | 80.00 | 5.00 |
| B | 15,000 | 25 | 15% | 156.25 | 4 por mil | 60.00 | 5.00 |
| C | 10,000 | 30 | 15% | 125.00 | mínimo | 120.00 | 5.00 |
| | 45,000 | | | 406.25 | | 260.00 | 15.00 |

| | | |
|---|---|---|
| Valor Nominal de la Remesa | | 45,000 |
| Intereses | 406.25 | |
| Comisiones | 260 | |
| Correo | 15 | |
| Total Gastos | | 681 |
| Efectivo recibido | | 44,319 |

## 17. Crédito bancario, la póliza de crédito

Actualmente, la mayoría de empresas disponen de al menos una póliza de crédito contratada con una entidad financiera, esto les permite disponer de un medio de financiación y articular los cobros y pagos de la actividad ordinaria.

Es importante diferenciar el crédito frente al préstamo bancario. La diferencia está básicamente en lo siguiente:

- El crédito permite la disposición gradual de dinero, en los montos y por el tiempo requerido. Mientras que el préstamo lo obtenemos de una sola vez en la cantidad aprobada por la entidad financiera.
- En la póliza pagamos por la cantidad dispuesta y en función del tiempo de utilización. Contrariamente, en el préstamo pagamos por el total aunque no lo hayamos utilizado.

Los créditos son formalizados a través de una póliza que estipula las condiciones de funcionamiento: límite del crédito, tipo de interés, comisiones, frecuencia de liquidación, etc., instrumentándose a través de una **cuenta bancaria** que funciona y liquida de forma parecida a las cuentas corrientes y asimismo permite cuantificar el dinero utilizado y calcular el costo de la operación.

## 18. Flujos de caja libre

En este trabajo, veremos el llamado flujo de caja libre. Denominamos **flujo de caja libre** a los ingresos y egresos netos de un proyecto de inversión y al estado financiero que mide la liquidez, **flujo de caja o pronóstico de efectivo** o de fondos.

El valor actual neto (VAN) y otros métodos de descuento consideran siempre cifras de flujos de efectivo de caja y no de beneficios.

Las cifras contables de beneficios son útiles para conocer los resultados anuales de la empresa, considerados de vida ilimitada. El empleo de estas cifras para calcular el flujo de caja podría llevarnos a resultados erróneos. Las cifras contables suponen que la inversión llevada a cabo al inicio del proyecto, con horizonte temporal de varios períodos son consumidos gradualmente, lo cual no es cierto, descarta el costo de oportunidad de la inversión.

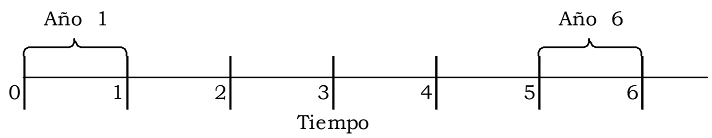
El flujo neto de efectivo (FNE) lo representamos como:

**FNE** = Ingresos - egresos
= entradas de efectivo - salidas de efectivo

Todo flujo de efectivo ocurre al final del período de interés, conocido como la convención de final del periodo. Aunque los valores de VF o C corresponden al final de dicho período, el final del período no es necesariamente el 31 de diciembre.

### 18.1. Diagrama de flujo de caja libre

El diagrama del flujo de caja libre es un modelo gráfico utilizado para representar los desembolsos e ingresos de efectivo a través del tiempo, trazados en escala temporal. Es importante la comprensión y la construcción del diagrama de flujo de efectivo, es una herramienta importante en la solución de problemas.



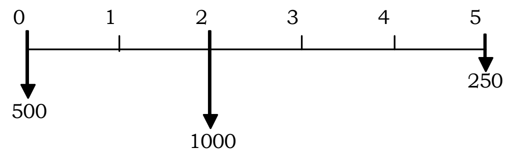

Típico diagrama de flujo de efectivo durante 6 años

En el eje del tiempo cada número indica el final del período correspondiente. El número cero indica el presente; es decir, el momento en que tomamos la decisión. El número uno indica el final del período uno y así sucesivamente. En la escala temporal el período puede ser un día, un mes, un año o cualquier otra unidad de tiempo.

La dirección de las flechas en el diagrama de flujo de caja libre es importante. La flecha vertical hacia arriba indicará flujos de efectivo positivo (ingresos) y a la inversa, indicará flujos de efectivo negativo (egresos).

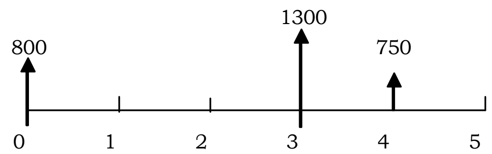
**1) Ejemplo**: Diagrama de egresos

En este diagrama al final del período cero realizamos desembolsos por UM 500; al final del período dos, por UM 1,000 y al final del período cinco, por UM 250.



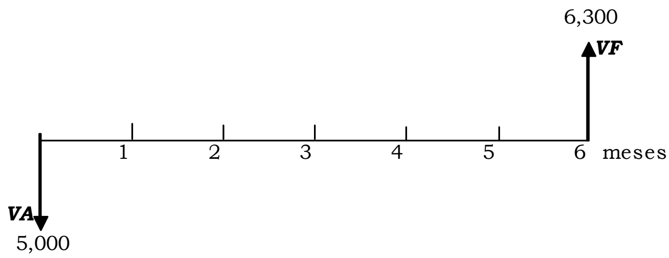

**2) Ejemplo:** Diagrama de ingresos

Aquí recibimos en el período 0 UM 800; en el tres, UM 1,300 y en el cuatro UM 750.




**3) Ejemplo**: Diagrama de depósito y retiro

El diagrama indica que por un depósito UM 5,000 recibimos UM 6,300 después de seis meses.




## 19. Contabilidad versus Análisis Económico

Las diferencias entre ambas unidades de la empresa es que la primera opera con datos del pasado y la segunda proyecta el futuro. Desde luego ambas cumplen un importante papel en la empresa de acuerdo a sus propias funciones y objetivos.

El contador después de conocer los ingresos y los egresos determina las utilidades obtenidas en operaciones del pasado. Calcula cual fue el rendimiento del capital. Para obtener la utilidad sobre la inversión resta los gastos de los ingresos. No añade una tasa de rendimiento a sus costos. Su misión es determinar cual fue la tasa de rendimiento en operaciones pasadas, excepto por las cargas de intereses en deudas contractuales (intereses de un préstamo bancario, hipoteca).

El analista económico, busca la productividad de las alternativas de inversión (carga cada unidad monetaria con la responsabilidad de ganar un costo de capital). Para ello requerimos tasas mínimas atractivas de rendimiento que garanticen utilidades para cuando llevemos a cabo el cierre del período.

## 20. Solución de los problemas

Para la solución de los problemas, primero aplicamos el método formulístico y seguidamente las funciones financieras de Excel (que la denominaremos únicamente como LA FUNCION), siguiendo un proceso básico:

1° Identificación y ordenamiento de los datos,

2° Aplicación de la fórmula o fórmulas y,

3° Empleo de las funciones financieras de Excel.

Cuando operamos con porcentajes, lo hacemos en su expresión decimal (0.20), por ejemplo 20% = 0.20 (20/100), que es la forma correcta de trabajar con las fórmulas.

En las matemáticas financieras tratamos de encontrar la variable entre cinco, dadas tres de ellas; en todos los problemas el elemento común es el tiempo ***t***. De los cinco elementos restantes, ***VA, VF, C, n,*** e ***i***, cada problema contendrá al menos cuatro en donde mínimo tres de ellos son conocidos. Para determinar la variable desconocida es necesario mantener válida la equivalencia entre flujos de caja.

El éxito para la solución de un caso o ejercicio, parte de la correcta clasificación de datos, solo así es posible identificar la notación o función financiera a utilizar.

Los resultados de las operaciones lo expresamos generalmente con cinco o cuatro decimales, en el caso de los factores o índices. Las respuestas finales de los ejercicios vienen con dos decimales. En ambos casos los resultados los redondeamos por exceso o por defecto.

## 21. Interpolación

Según el diccionario de la RAE: Interpolar es calcular el valor aproximado de una magnitud en un intervalo cuando conocemos algunos de los valores que toma a uno y otro lado de dicho intervalo.

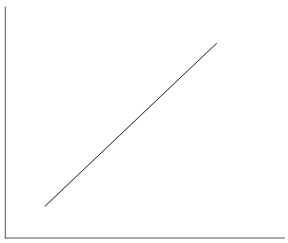
En la vida real, encontramos situaciones carentes de información que permiten determinar valores dependientes (y), en función de una o más variables independientes. Es aquí cuando utilizamos la interpolación. Los métodos más utilizados son: método lineal, logaritmo y el exponencial.

Sólo aplicaremos la interpolación lineal, debido a su sencillez y gran utilidad. La interpolación lineal implica la utilización de la ecuación de la recta.

$$y = mx + c$$

| | | |
|---|---|---|
| ***y*** | = | Variable Dependiente |
| ***x*** | = | Variable Independiente |
| ***m*** | = | Pendiente de la recta |
| ***c*** | = | Coeficiente de posición |

La manera de utilizar esta fórmula, es calculándola a partir de dos puntos. Para ello utilizamos la ecuación de la pendiente. Graficando el método lineal, obtenemos:



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Veamos lo expuesto con algunos ejemplos, en los cuales operamos aplicando las tablas financieras T2 y T3; para ilustración del lector adjuntamos la tabla T1.

Efectuamos la solución de problemas de este grupo utilizando la respectiva fórmula de la tasa de interés.

## EJERCICIO 5 (Tasa de rendimiento de una inversión)

Existe la posibilidad de invertir, abonando ocho cuotas iguales de UM 5,000 cada una y, al efectuar el último pago tendremos la posibilidad de obtener una suma de UM 48,600. ¿Cuál es la tasa de interés de esta inversión?

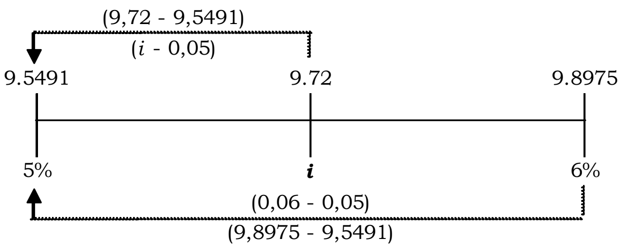
**Solución:**

VF = 48,600; C = 5,000; n = 8; i = ?

Con la tabla $\boldsymbol{T}_3 = \boldsymbol{VF}/\boldsymbol{C}$, encontramos el factor:

$$\boldsymbol{T}_3 = \frac{48{,}600}{5{,}000} = 9.72$$

Con $n$ = 8 y el factor 9.72 en $\boldsymbol{T_3}$ ubicamos la fila 8 del $n$, nos desplazamos a la derecha y encontramos los factores 9.5491 y 9.8975, debajo de las columnas del 5% y 6% respectivamente. Para encontrar la tasa de interés (*i)* con mayor grado de precisión efectuaremos un conjunto de operaciones para obtener a partir de las tablas financieras valores muy aproximados a la tasa de interés buscada. Graficando, tenemos:




Determinamos el valor de *i*, por interpolación a través de la proporción entre la diferencia del valor central (9.72) menos el valor inferior (9.5491), dividiendo el resultado entre la diferencia de los factores extremos (9.8975 - 9.5491), finalmente con esta relación establecemos la igualdad con los intereses:

$$\frac{9.72 - 9.5491}{9.8975 - 9.5491} = \frac{\boldsymbol{i} - 0.05}{0.06 - 0.05}$$ , despejando *i* obtenemos:

$$\boldsymbol{i} = 0.05 + 0.01\left\langle\frac{0.1709}{0.3484}\right\rangle$$

$$\boldsymbol{i} = 0.05 + 0.01(0.4953) = 0.549 \quad \text{ó} \quad \mathbf{5.49\%}$$

**Respuesta:**

Graficando al factor 9.72 le corresponde la tasa de interés de 5.49%.

## EJERCICIO 6 (Tasa de rendimiento de una inversión)

Necesitamos saber el rendimiento sobre la inversión de UM 228,000, considerando el rendimiento de esta inversión como UM 32,000 al final de cada año durante 10 años.

**Solución:**

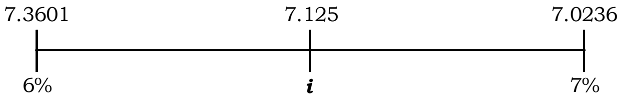
VA = 228,000; C = 32,000; n = 10; i =?

1º Con la $\boldsymbol{T}_2 = \boldsymbol{VA}/\boldsymbol{C}$ tabla, encontramos el factor:

$$\boldsymbol{T}_2 = \frac{228{,}000}{32{,}000} = 7.125$$

Aplicando el procedimiento establecido, en la tabla ***T2,*** ubicamos los factores 7.3601 y 7.0236 debajo de las columnas del 6% y 7% respectivamente.

2º Graficamos el ejercicio:




3º Interpolando, en forma similar al ejercicio anterior, obtenemos:

$$\frac{7.125 - 7.3601}{7.0236 - 7.3601} = \frac{\boldsymbol{i} - 0.06}{0.07 - 0.06}$$ , despejando *i* tenemos:

$$\boldsymbol{i} = 0.06 + 0.01\left(\frac{0.12351}{0.3365}\right)$$

$$\boldsymbol{i} = 0.06 + 0.01(0.33725) = 0.0637 \quad ó \quad 6.37\%$$

**Respuesta**:
El rendimiento de la inversión de UM 228,000 es de 6.37% anual.

# EJERCICIOS DESARROLLADOS

## Tasas de Interés

### Ejercicio 7 (Tasa de interés real)

Calcule el interés real pagado en el año 89, si sabemos que la tasa efectiva anual cobrada por el banco en esa época era del 48%, la tasa de inflación anual era del 55%.

**Solución:**
TEA = 0.48; Φ= 0.55 anual; $i_{real}$ = ?

$$[3] \quad \boldsymbol{i}_{real} = \left(\frac{(1+0.48)}{(1+0.55)} - 1\right) = -0.0452$$

**Respuesta:**
El interés real anual al año 89 fue negativo (-4.52%).

### Ejercicio 8 (Tasa de interés corriente)

Si deseamos obtener la rentabilidad real del 12% anual, y estimamos la inflación acumulada como 10% en ese mismo período ¿A cuánto ascendería la tasa de interés ajustada por la inflación?

**Solución:**
i = 0.12; Φ= 0.10 anual; $i_c$ = ?

$$[2] \quad \boldsymbol{i}_c = \left((1+0.12) * (1+0.10) - 1\right) = 0.2320$$

**Respuesta:**
La tasa ajustada por la inflación o tasa de interés corriente ($ic_)$ debe ser de 23.20% anual.

## Ejercicio 9 (Tasa de interés real)
¿Cuál será la tasa de interés real, correspondiente a la tasa corriente efectiva anual de 28%, si durante este período la inflación fue del 15%?

**Solución**:
Ic = 0.28;   $\Phi = 0.15$;   ***i***=?

[3] $\boldsymbol{i_r} = \left\langle \frac{(1+0.28)}{(1+0.15)} - 1 \right\rangle = 0.1130$

**Respuesta:**
Esto quiere decir, que en términos reales tenemos pérdidas en capacidad adquisitiva de 28% - 11,30% = **16,7%**. La tasa de interés real es de 11.30%.

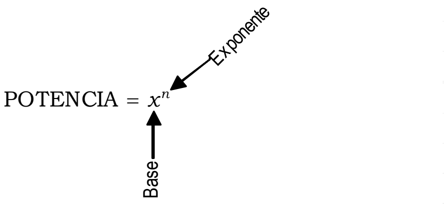
## Ejercicio 10 (Tasas anuales)
Calcular las tasas anuales de: a) 5% semestral; b) 4% cuatrimestral; c) 7% trimestral; d) 3% mensual. Calculando las tasas anuales:

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) | 5% semestral | : 5% * 2 | = 10% anual |
| b) | 4% cuatrimestral | : 4% * 3 | = 12% anual |
| c) | 7% trimestral | : 7% * 4 | = 28% anual |
| d) | 3% mensual | : 3% * 12 | = 36% anual |

## 22. Fundamentos Matemáticos
A continuación pasamos a desarrollar las operaciones matemáticas más utilizadas en el texto, como son los exponentes, la radicación y los logaritmos.

### 22.1. Exponentes
Operación matemática en el que se basa el interés compuesto y todas las fórmulas derivadas de ella.

La aplicación de los exponentes es la potenciación, que consiste en repetir un número base tantas veces como indica otro número llamado exponente, el resultado se conoce como potencia. Si denotamos a la base con la literal «x» y al exponente o potencia con la literal «n» la operación de potenciación se representara como:




La expresión xn se lee como «x elevado a n». Si n es un número entero positivo:

xn = x * x * x * x...* ...x, n veces.

**Ejemplo:**
1. Si x = 2 y n = 4, entonces 24 = 2 * 2 * 2 * 2 = 16
2. Si x = (1 + i) y n = 4, entonces x4 = (1 + i)4

y si asignamos a **i** un valor, por ejemplo 7% (siete por ciento, 7/100, indica que el entero se ha dividido en cien partes y hemos tomado siete, esto equivale en una expresión de tanto por uno a 0.07), la expresión sería:

(1 + i)4 = (1+0.07)4 = 1.3108

En Excel para elevar un número a una potencia, debemos utilizar el operador « ^ » o la función potencia para realizar esta operación. Para obtener el operador «^» en Excel, pulsar simultáneamente ALT seguido del número 94.

Ejemplo:

| Fórmula | Resultado |
|---|---|
| =2^4 | 16 |
| =8^3 | 512 |

Ejemplo de aplicación:
(11) **VF = VA** (1 + i)n

22.1.2. Teoría de los signos
1º. Toda cantidad positiva o negativa elevado a una potencia par es positiva,
2º. Toda cantidad elevada a una potencia impar conserva su propio signo

| 1º | 2º |
|---|---|
| $\langle + \rangle^{2n} = +$<br>$\langle - \rangle^{2n} = +$ | $\langle + \rangle^{2n+1} = +$<br>$\langle - \rangle^{2n+1} = -$ |

### 22.1.3. Reglas en el uso de los exponentes

#### 22.1.3.1. Exponente cero, negativo

**a) Exponente cero**.- Por definición matemática, todo número real distinto de cero, elevado al exponente cero es igual a 1.

$x^0 = 1, \quad x \neq 0$

**b) Exponente negativo**.- Por definición matemática, todo número real distinto de cero elevado a un exponente negativo, es igual a la fracción de 1 dividido por dicho número elevado a su exponente con signo positivo:

$x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \quad x \neq 0$ siendo n un entero positivo

<u>A la inversa</u>, toda fracción, cuyo denominador es un número real distinto de cero, elevado a una potencia con signo negativo, es igual a dicho número elevado a la misma potencia con exponente positivo:

$x^{n} = \frac{1}{x^{-n}}, \quad x \neq 0$ siendo n un entero positivo

**<u>Ejemplo de aplicación</u>:**

$[12] \quad \boldsymbol{VA} = \frac{\boldsymbol{VF}}{(1+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}}}$

#### 22.1.3.2. Producto de potencias de bases iguales

Veamos el siguiente producto de potencias:
22 * 24 = 4 * 16

si descomponemos 4 y 16 como productos consecutivos de 2 obtendríamos:
22 * 24 = (2 * 2) (2 * 2* 2* 2) = 2 * 2 * 2 * 2* 2* 2

al reagruparlos podemos expresarlo como:
22 * 24 = 2 * 2 * 2 * 2* 2* 2 = 26

Así, generalizando podemos decir que
xm * xn = xm + n

El producto o multiplicación de dos potencias de igual base, es igual a la base común elevada a la suma de los exponentes.

#### 22.1.3.3. División de dos potencias de igual base

Veamos la siguiente división de potencias:
22 /24 = 4/16

Si descomponemos 4 y 16 como productos consecutivos y cancelamos términos semejantes obtendríamos:
22 / 24 = ($\cancel{2}$ * $\cancel{2}$ ) /( $\cancel{2}$ * $\cancel{2}$ * $\cancel{2}$ * $\cancel{2}$ ) = 1 / ($\cancel{2}$ * $\cancel{2}$)

Al reagruparlos y tomando en cuenta la definición del exponente negativo tendremos que:
22 /24 = 1 / (*) =1/22 = 2-2=22-4

Así, generalizando podemos decir que

$x^m \div x^n = \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$

La división  o cociente de dos potencias de igual base, es igual a la base común elevada a la diferencia o resta de los exponentes  (restamos del exponente del numerador el exponente del denominador).

**22.1.3.4. Potencia de una Potencia**
Veamos la siguiente potencia de potencias:
(22)3  = (4)2=4*4*4=64

si descomponemos 4 como productos consecutivos de 2 obtendríamos:
(22 )2  = (2*2)*(2*2)*(2*2)=2*2*2*2*2*2

al reagruparlos podemos expresarlo como:
(22)2  = 2*2*2*2*2*2=26=22*3

así entonces generalizando, tenemos que:
( xm )n  = xm * n

La potencia de una potencia, es igual a la base elevada al producto de los exponentes.

**22.1.3.5. Potencia del producto de dos factores**
Veamos la siguiente potencia de productos:      (2*3)2  = 62 = 36

si descomponemos el 6 en dos factores tendríamos por ejemplo:
(2 * 3)2  = (2 * 3) (2 * 3) = 2 * 3 * 2 * 3

los cuales al reagruparlos podemos expresarlo como:
(2 * 2) (3 * 3), o bien  22  *  32  = 4 * 9 = 36

Así, generalizando podemos decir que:
(x * y)n = xn * yn

El producto de dos factores elevados a una potencia, es igual al producto de los factores elevados a dicha potencia.

**22.1.3.6. Potencia del cociente de dos factores**
Veamos la siguiente potencia del cociente de dos factores:

$$\left\langle \frac{4}{2} \right\rangle^2 = 2^2 = 4$$

Y utilizando las propiedades antes mencionadas tenemos que:

$$\left\langle 4 * \frac{1}{2} \right\rangle^2 = 4^2 * \left\langle \frac{1^2}{2^2} \right\rangle = 4^2 * \left\langle \frac{1*1}{2*2} \right\rangle = \frac{16*1}{4} = 4$$

Generalizando decimos que:

$$\left\langle \frac{x}{y} \right\rangle^n = \frac{x^n}{y^n}$$

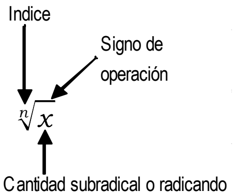
El cociente de dos factores elevados a una potencia, es igual al cociente de los  factores elevados a dicha potencia.

| PROPIEDADES DE LOS EXPONENTES | |
|---|---|
| $x^n * x^m = x^{n+m}$ | $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ |
| $\langle x * y \rangle^n = x^n * y^n$ | $\left\langle \frac{x}{y} \right\rangle^n = \frac{x^n}{y^n}$ |
| $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ | $\left\langle \frac{x}{y} \right\rangle^{-n} = \left\langle \frac{y}{x} \right\rangle^n$ |

**22.2. Radicación**

Operación matemática utilizada en las matemáticas financieras para determinar la tasa de interés del monto compuesto, cuando operamos con cantidades únicas.

La raíz, enésima de un número real, x, es otro número, y, cuya potencia enésima es x. Denotamos la operación de radicación mediante la expresión:




Donde, es llamado radical, x es el radicando y n el índice de la raíz. El índice es un número entero mayor que $1: n \geq 2$.

La raíz de índice dos es la raíz cuadrada y se escribe obviando el índice: $\sqrt{\ }$ .

La raíz de índice tres es la raíz cúbica.

Si el índice es par, x es positivo, existiendo dos raíces enésimas reales de x, una positiva y otra negativa. Pero la expresión $\sqrt[n]{x}$ sólo esta referida a la positiva. Es decir, las dos raíces n-ésimas de x son $\sqrt[n]{x}$ y $-\sqrt[n]{x}$ . Sin embargo, los números reales negativos carecen de raíz real de índice par.

Por ejemplo, 25 tiene dos raíces cuadradas, 5 y –5, pues 52 = 25 y (-5)2 = 25; y el número 10 tiene dos raíces cuartas $\sqrt[4]{10}$ y $-\sqrt[4]{10}$ . Sin embargo, –25 no tiene raíz cuadrada porque ningún número real elevado al cuadrado da –25. Por lo mismo, –10 no tiene raíz cuarta.

Si el índice es impar, cualquiera sea el número real, x, tiene una única raíz n-ésima. Por ejemplo, la raíz cúbica de 8 es 2, la raíz cúbica de –8 es –2, y 20 tiene una única raíz cúbica denominada $\sqrt[3]{20}$ .

22.2.1. Reglas en el uso de los exponentes para la radicación

22.2.1.1. Forma exponencial de una raíz

La raíz n-ésima de un número puede ponerse en forma de potencia:

$$\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$$

Por tanto:

$$\sqrt[n]{x^m} = \langle \sqrt[x]{x} \rangle^m = \left\langle x^{1/n} \right\rangle^m = x^{m/n}$$

**22.2.1.2. Potencia de una raíz**

Veamos la siguiente potencia de una raíz:

$$\left(\sqrt{2^3}\right)^2 = \left(2^{\frac{3}{2}}\right)^2 = 2^{\frac{3}{2}}.2^{\frac{3}{2}}$$

Si utilizamos la regla del producto de potencias de bases iguales obtendremos:

$$\left(\sqrt{2^3}\right)^2 = 2^{\frac{3}{2}}.2^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{2}+\frac{3}{2}} = 2^{2*\frac{3}{2}} = 2^{\frac{2*3}{2}} = 2^{\frac{3*2}{2}} = \sqrt{2^{3*2}}$$

Así, generalizando podemos decir que

$$\left(\sqrt[n]{x^m}\right)^p = \sqrt[n]{(x^m)^p} = \sqrt[n]{x^{mp}}$$

La potencia de una raíz es igual a la raíz de la potencia de potencia.

**22.2.1.3. Raíz de un producto**

Veamos la siguiente raíz de un producto:

$$\sqrt[3]{2*3} = (2*3)^{\frac{1}{3}}$$

Si utilizamos la regla de la potencia del producto de dos factores llegamos a la expresión:

$$\sqrt[3]{2*3} = (2*3)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} * 3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2} * \sqrt[3]{3}$$

Así, generalizando podemos decir que:

$$\sqrt[n]{x*y} = \sqrt[n]{x} * \sqrt[n]{y}$$

La raíz del producto de dos factores es igual al producto de las raíces de los factores.

**22.2.1.4. Raíz de un cociente**

Veamos la siguiente raíz de un cociente

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{2*\frac{1}{3}}$$

Si aplicamos las reglas de la raíz de un producto y del exponente negativo obtendremos:

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{2*\frac{1}{3}} = \sqrt{2} * \sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{2} * \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Así entonces generalizando, tenemos que:

$$\sqrt[n]{\left(\frac{x}{y}\right)^m} = \frac{\sqrt[n]{x^m}}{\sqrt[n]{y^m}}$$

El cociente de la raíz de dos factores, es igual al cociente de las raíces de los factores.

| PROPIEDADES DE LOS RADICALES |
|---|
| $\sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m = \left(x^{1/n}\right)^m = x^{m/n}$ |
| $\sqrt[n]{x*y} = \sqrt[n]{x} * \sqrt[n]{y}$ |
| $\left(\sqrt[n]{x^m}\right)^p = \sqrt[n]{(x^m)^p} = \sqrt[n]{x^{mp}}$ |
| $\sqrt[n]{\left(\frac{x}{y}\right)^m} = \frac{\sqrt[n]{x^m}}{\sqrt[n]{y^m}}$ |

## 22.3. Logaritmos

Utilizado para derivar las fórmulas del período (**n**) de composición del capital a partir de la fórmula general del interés compuesto para pagos únicos o de anualidades.

Los logaritmos son de mucha utilidad en la elaboración de cálculos, debido al tiempo que se ahorra. Actualmente, la mayoría de calculadoras de bolsillo y la plantilla Excel, permiten operar con mucha rapidez los logaritmos, obviando el uso de las tablas y los procedimientos de cálculo manual.

Si «N» y «b» son números positivos distintos de 1, entonces el logaritmo en base b del número N, es el exponente «L» de la base b, tal que: bL = N L = logb N

**Ejemplos**
a) log2 32 = 5, ya que, 25 = 32 y log5 125 = 3, ya que, 53 = 125
b) 3 = log2 8, implica que 23 = 8

Son comunes los llamados logaritmos neperianos cuya base es el número e = 2.718281829 y los logaritmos comunes cuya base es 10. Para los propósitos del presente libro, utilizaremos los logaritmos comunes escribiendo log N en vez de log10 N. Por definición tenemos:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| log | 1.000 | = | 3 | ya que | 103 | = | 1.000 |
| log | 10 | = | 1 | ya que | 101 | = | 10 |
| log | 1 | = | 0 | ya que | 100 | = | 1 |
| log | 0.10 | = | -1 | ya que | 10-1 | = | 0.10 |

22.3.1. Reglas en el uso de logaritmos

**22.3.1.1. Logaritmo de un producto**
Veamos el logaritmo del siguiente producto:
L=log ( 100* 1000)=log(100000)=5

Expresemos al logaritmo a través de su equivalente exponencial y utilicemos la regla de la potencia del producto de dos factores para llegar a la expresión:
10L = 100* 1000=102 *103=102+3

Igualando exponentes es obvio que: L=2+3

Reemplazando a L a través del logaritmo que lo define y a 2 y 3 por sus logaritmos equivalentes obtendremos:
log ( 100* 1000)=log (100)+log (1000)

Así, generalizando podemos decir que:
log ( A * B ) = log A + log B

El logaritmo del producto de dos o más números positivos es igual a la suma de los logaritmos de los números.

**22.3.1.2. Logaritmo de un cociente**
Veamos el logaritmo del siguiente cociente:
L=log ( 1000/100)=log(10)=1

Expresemos al logaritmo a través de su equivalente exponencial y utilicemos la regla de la potencia del cociente de dos factores para llegar a la expresión:
10L = 1000/100=103 /102=103-2

Igualando exponentes es obvio que:
L=3-2

Reemplazando a L a través del logaritmo que lo define y a 3 y 2 por sus logaritmos equivalentes obtendremos:
log ( 1000/100)=log (1000)-log (100)

Así, generalizando podemos decir que:
log ( A / B ) = log A - log B

El logaritmo del cociente de dos números positivos es igual a la diferencia del logaritmo del numerador con el logaritmo del denominador.

**22.3.1.3. Logaritmo de una potencia**
Veamos el logaritmo de la siguiente potencia:
L=log ( 105)=5

Expresemos al logaritmo a través de su equivalente exponencial y utilicemos la regla de la potencia del cociente de dos factores para llegar a la expresión:
10L = 105
Igualando exponentes es obvio que: L=5

Reemplazando a L a través del logaritmo que lo define y a 5 por su logaritmo equivalentes obtendremos:
log (105)=5log (10)

Así, generalizando podemos decir que: log An = n log A

El logaritmo de un número elevado a la potencia n, es n veces el logaritmo del número:

| PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS |
|---|
| bL = N L = logb N |
| log ( A * B ) = log A + log B |
| log ( A / B ) = log A - log B |

**22.4. Progresiones aritméticas**
De aplicación en el interés simple.

Una progresión aritmética es una sucesión de números, llamados términos, como pueden ser:
a) 4, 7, 10, 13, 16, 19, 21, 24
b) 40, 35, 30, 25, 20, 15

Como vemos en la sucesión a y b, los términos están separados por una misma cantidad, llamada diferencia. Así tenemos en (a) una sucesión de 8 términos, el primero es 4 y cada uno de los términos siguientes lo obtenemos sumando la diferencia común de 3, al término anterior. En (b) tenemos 6 términos, el primero es 40 y cada uno de los términos siguientes lo obtenemos sumando la diferencia común de -5 al término anterior.
Ahora vamos a generar una progresión aritmética de 7 términos, siendo x el primer término y d la diferencia. La progresión será:

$x, x + d, x + 2d, x + 3d, x + 4d, x + 5d, x + 6d$

Asumimos que la progresión tiene n términos. El n-ésimo término, es decir, el último, sería **l**:

$l = x + (n - 1)d$

Luego podemos escribir la progresión como:

c) $x, x + d, x + 2d, \ldots x + (n - 3)d, x + (n - 2)d, x + (n - 1)d$ ó
d) $x, x + d, x + 2d, \ldots, (l - 2d), (l - d), l$

Representando con **s** la suma de los términos de (d), tenemos que:
$\mathbf{s} = x + (x + d) + (x + 2d) + \ldots + (l - 2d) + (l - d) + l$

o sea:
$\mathbf{s} = l + (l - d) + (l - 2d) + \ldots + (x + 2d) + (x + d) + x$

Sumando término a término cada una de las expresiones anteriores tenemos:

$2\mathbf{s} = (x + l) + (x + l) + (x + l) + \ldots + (x + l) + (x + l) + (x + l) = n(x + 1)$

Luego:

Es decir, la suma de una progresión aritmética es igual a la mitad del número de términos multiplicado por la suma del primero y último términos.

Ejemplo
Encontrar el 12o. término y la suma de los 10 primeros términos de la progresión aritmética:

x = 8; d = 6; n = 10; l = ?

l = x + (n - 1)d l = 8 + (10 - 1)6 = 62 y

$s = \frac{n}{2}(x+l) \quad \rightarrow \quad s = \frac{10}{2}(8+62) = 350$

**22.5. Progresión geométrica**
De aplicación en el interés compuesto.

Una progresión geométrica es una sucesión de números, llamados términos, como son:

a) 4, -8, 16, -32, 64, -128, 256, -512, 1024, -2048
c) 729, 486, 324, 216, 144, 96, 64

En la cual cualquier término posterior al primero puede ser obtenido del anterior, multiplicándolo por un número constante llamado razón (o cociente común). Así tenemos:
En (a) hay 10 términos; el primer término es 4 y cada uno de los términos siguientes lo obtenemos multiplicando el anterior por la razón -2.
En (b) hay 7 términos; el primero es 729 y cada uno de los términos siguientes lo obtenemos del anterior multiplicándolo por la razón 2/3.
Generando una progresión aritmética de 8 términos, en el que x es el primer término y **r** la razón. La progresión es:

x, xr, xr2, xr3, xr4, xr5, xr6, xr7

Si asumimos que la progresión tiene n términos, el n-ésimo término l, es decir, el último sería:
l = xrn-1

Representamos por s la suma de los n primeros términos de la progresión geométrica.
x, xr, xr2, xr3, ... xrn-1

Es decir, que
**s** = x + xr + xr2 + xr3 + xr4 + ... + xrn-2 + xrn-1
s - rs = x + (xr - xr) + (xr2 - xr2) + (xr3 - xr3) + ... + (xrn-1 - xrn-1) - xrn
o sea que,
(1 - r)s = x - xrn
Y

$s = \frac{x - xr^n}{1-r}$ cuando r $\prec$ 1 y $s = \frac{xr^n - x}{r-1}$

De las ecuaciones anteriores tenemos que: xl = xrn

Por lo cual las ecuaciones precedentes pueden ser escritas:

$s = \frac{x - rl}{1-r}$ cuando r $\prec$ 1 y $s = \frac{rl - x}{r-1}$ cuando r $\succ$ 1

Ejemplos:
a) Obtener el 15o. término y la suma de los 15 primeros términos de la progresión geométrica 5, 15, 45, 135, ...

**Solución**:
x = 5;   r = 3;   n = 15;  l = ?;   s = ?

l = xrn-1, de donde  l = 5*(3)15-1 = 23,915

$$s = \frac{rl - x}{r - 1} \xrightarrow{\text{Reemplazando valores, tenemos}} \frac{(3 * 23{,}915)\text{-}5}{3\text{-}1} = 35{,}870$$

b) Obtener la suma de los 15 primeros términos de la progresión geométrica 5, -15, 45, -135, ...

**Solución**:
x = 5;   r = -3;   n = 15;  l = ?;   s = ?

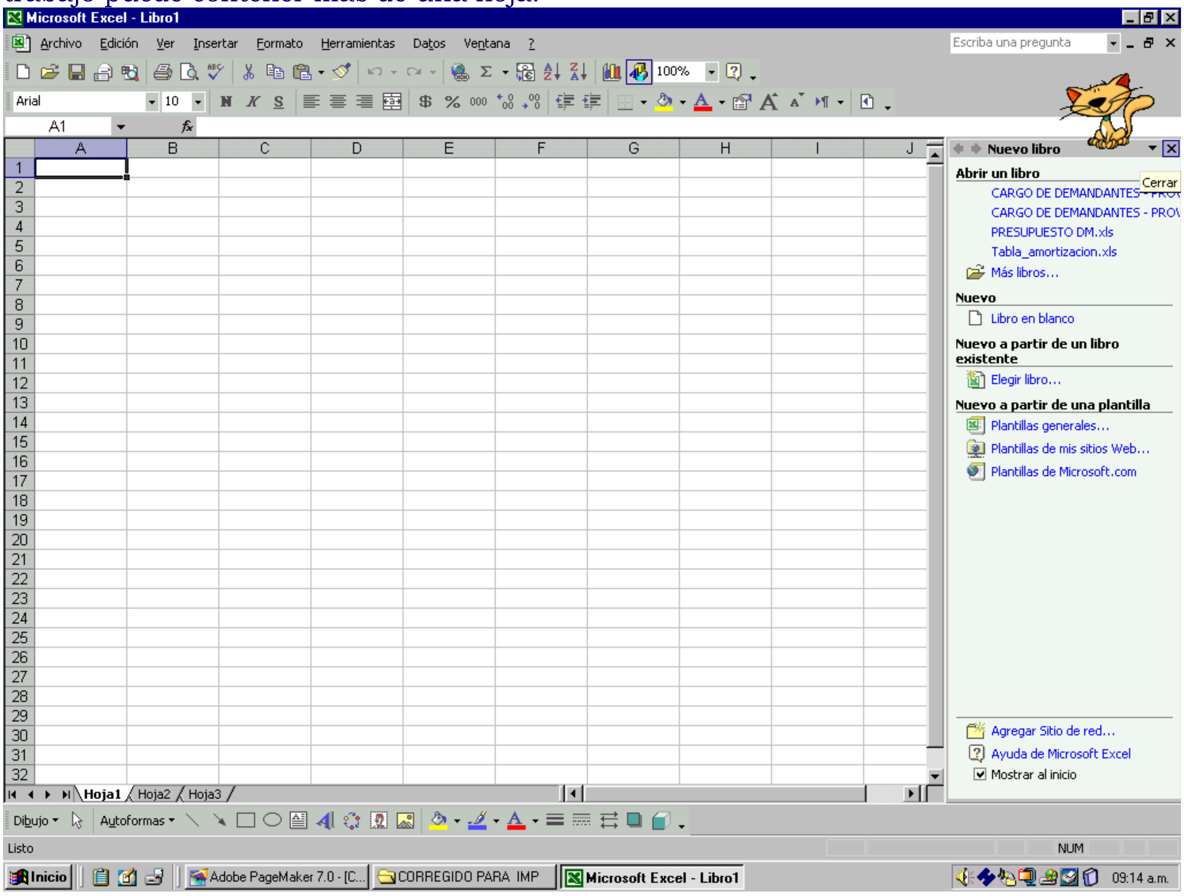
$$s = \frac{x - xr^n}{1 - r} \xrightarrow{\text{Reemplazando valores tenemos}} \frac{5 - \left\langle 5(-3)^{15-1} \right\rangle}{1 - (-3)} = 5{,}979$$

## 23. Funciones Financieras de Excel

### 23.1. Microsoft Excel Xp

**Excel** es la más potente hoja de cálculo que existe en el mercado. Combina perfectamente potencia y facilidad de uso.

Excel de Microsoft Office Xp contiene 256 columnas, 65,536 filas (cuatro veces más filas que en las versiones anteriores) y 16’777,216 celdas. Todo esto en una sola hoja de cálculo y un libro de trabajo puede contener más de una hoja.



### 23.2. Funciones

Las funciones son fórmulas predefinidas ejecutan cálculos utilizando valores específicos, denominados argumentos, en orden determinado o estructura. Las funciones pueden utilizarse para ejecutar operaciones simples o complejas.

### 23.3. Estructura de una función

Excel cuenta con una amplia gama de funciones integradas. Soporta fórmulas matriciales (tipo especial de fórmulas, pueden hacer maravillas).

**1. Estructura**

La estructura de una función comienza por el signo igual (=) seguido por el nombre de la función, paréntesis de apertura, los argumentos de la función separados por comas y paréntesis de cierre.

**2. Nombre de función**

Para obtener una lista de funciones disponibles, haga clic en una celda y presione MAYÚSC+F3.

**3. Argumentos**

Los argumentos pueden ser números, texto, valores lógicos como VERDADERO o FALSO, matrices, valores de error como #N/A o referencias de celda. El argumento que designemos deberá generar valor para el mismo. Los argumentos pueden ser también constantes, fórmulas u otras funciones.

**4. Información sobre herramientas de argumentos**

Cuando escribamos la función, aparece una información sobre herramientas con su sintaxis y sus argumentos. Por ejemplo, escriba =REDONDEAR y aparecerá la información. La información sobre herramientas sólo aparece para las funciones integradas.

## 24. Escribir fórmulas

Cuando escriba fórmulas con funciones, el cuadro de diálogo Insertar función le ayudará a introducir las funciones de la hoja de cálculo. A medida que introduzcamos funciones en la fórmula, el cuadro de diálogo **Insertar función** irá mostrando el nombre de la función, cada uno de sus argumentos, la descripción de la función y de cada argumento, el resultado actual de la función y el resultado actual de toda la fórmula.

## 25. Crear una fórmula

Las fórmulas permiten que la hoja de cálculo sea justamente eso: hoja de cálculo.

Las fórmulas son ecuaciones que efectúan cálculos con los valores de la hoja de cálculo. Una fórmula comienza por un signo igual (=). Por ejemplo, multiplicar 2 por 3 y, a continuación, sumar 5 al resultado. =5+2*3

## 26. Sugerencias

Para introducir la misma fórmula en un rango de celdas, seleccione en primer lugar el rango, introduzca la fórmula y, a continuación, presione CTRL+ENTRAR.
Si está familiarizado con los argumentos de la función, puede utilizar la información sobre herramientas de funciones que aparecen después de escribir el nombre de la función y el paréntesis de apertura. Haga clic en el nombre de la función para ver el tema de la Ayuda correspondiente a la función o haga clic en un nombre de argumento para seleccionar el argumento correspondiente de la fórmula. Para ocultar la información sobre herramientas de funciones, en el menú **Herramientas** haga clic en **Opciones** y desactive la casilla de verificación **Información sobre herramientas de funciones** de la ficha **General.**
Si una función no está disponible y devuelve el error #¿NOMBRE?, instale y cargue el programa de complementos Herramientas para análisis.
**¿Cómo?** :
En el menú **Herramientas**, elija **Complementos**.
En la lista **Complementos disponibles**, seleccione el cuadro **Herramientas para análisis** y, a continuación, haga clic en **Aceptar**.
Si es necesario, siga las instrucciones del programa de instalación.

## 27. En Excel sólo requerimos tres funciones para transformar entre sumas de dinero VA, VF y C:

| | | |
|---|---|---|
| **VF**(tasa(i);nper(n);pago(C);va;tipo) | para transformar | VA a VF o C a VF |
| **VA**(tasa;nper;pago;vf;tipo) | para transformar | VF a VA o C a VA |
| **PAGO**(tasa;nper;va;vf;tipo) | para transformar | VA a C o VF a C |

Es posible utilizar estas funciones con más de una variable. Así calculamos la cuota uniforme equivalente a una suma inicial (VA o VF) y suma futura (VF). Es posible calcular el VA equivalente a series de cuotas uniformes (pago C) y suma futura (VF), etc.

## 28. Funciones Financieras

Aún con la rapidez que brinda la hoja de cálculo Excel, la solución de problemas complejos requiere de tiempo y esfuerzo. Para conocer la operación real de estas funciones, en especial el significado de las respuestas es de mucha utilidad el estudio concienzudo de los diferentes capítulos del presente libro.
El tema de las funciones financieras lo dividimos en dos grandes grupos: 9. Funciones para conversión de tasas de interés y 10. Funciones para series uniformes. Además, incluimos dos funciones financieras utilizadas en la evaluación financiera de proyectos: VAN y TIR.

## 29. Funciones para conversión de tasas de interés

Dentro de este grupo clasificamos dos funciones que sirven para convertir tasas de interés efectivas en nominales y viceversa. Los argumentos que utilizan las funciones financieras para conversión de tasas son los siguientes:
**Núm_per:** Es el número de períodos de interés compuesto por año. (Cuando operamos con TASA.NOMINAL).
**Núm_per_año:** Es el número de períodos de interés compuesto por año. (Cuando operamos con INT.EFECTIVO).
**Int_nominal:** Es la tasa de interés **nominal anual** expresada en términos decimales.
**Tasa_efectiva:** Es la tasa de interés **efectiva anual**, es decir, la rentabilidad efectiva que recibiríamos si los intereses fueran reinvertidos en las mismas condiciones por el tiempo que resta del año.
**Período de interés compuesto:** Entendemos el tiempo transcurrido entre dos fechas de pago de interés. En el caso de estas funciones suponemos que el interés pagado no es retirado ni consumido, si no reinvertido por el tiempo restante del año.

### 29.1.INT.EFECTIVO

Devuelve la tasa efectiva del interés anual si conocemos la tasa de interés anual nominal y el número de períodos de interés compuesto por año. De aplicación cuando los períodos de pago son exactos.

**Sintaxis**
**INT.EFECTIVO(int_nominal;núm_per_año)**
Si alguno de los argumentos es menor o igual a cero o si el argumento núm_per_año es menor a uno, la función devuelve el valor de error #¡NUM!
La respuesta obtenida viene enunciada en términos decimales y debe expresarse en formato de porcentaje. Nunca divida ni multiplique por cien el resultado de estas funciones.
Esta función proporciona la tasa efectiva de interés del pago de intereses vencidos. Para intereses anticipados debe calcularse la tasa efectiva aplicando la fórmula.
El argumento núm_per_año trunca a entero cuando los períodos son irregulares, hay que tener especial cuidado con esta función, sólo produce resultados confiables cuando la cantidad de períodos de pago en el año (núm_per_año) tiene valores exactos; por ejemplo: mensual (12), trimestral (4), semestral (2) o anual (1).
El resultado proporcionado por esta función lo obtenemos también con la siguiente fórmula:

[43] $$\boldsymbol{i} = \left\langle 1 + \frac{\boldsymbol{j}}{\boldsymbol{m}} \right\rangle^{m} - 1$$

**Ejemplo 1: Cuando los períodos de pago son exactos y el resultado es confiable:**
FECHA INICIAL : 15-03-2004
FECHA FINAL : 15-06-2004
TASA NOMINAL : 68% anual, compuesto trimestralmente

**Solución**:
n = (15/03/2004 - 15/06/2004) = 90/30 = 3, m = (12/3) = 4

Aplicando ambos métodos:

[43] $\boldsymbol{i} = \left\langle 1+\frac{0.68}{4}\right\rangle^{4} -1 = 0.8739$

**Sintaxis**
**INT.EFECTIVO(int_nominal;núm_per_año)**

| int_nominal | núm_per_año | INT.EFECTIVO |
|---|---|---|
| 0.68 | 4 | 0.8739 |

**Ejemplo 2: Cuando los períodos de pago son inexactos y por lo tanto el resultado es irreal.**
FECHA INICIAL : 15-03-2004
FECHA FINAL : 15-06-2004
TASA NOMINAL : 68% anual, compuesto cada 2.20 meses

**Solución**:
n = (15/03/2004 - 21/05/2004) = 66/30 = 2.2, m = (12/2.2) = 5.2174

Aplicando ambos métodos:

[43] $\boldsymbol{i} = \left\langle 1+\frac{0.68}{5.2174}\right\rangle^{5.2174} -1 = 0.8739$

**Sintaxis**
**INT.EFECTIVO(int_nominal;núm_per_año)**

| int_nominal | núm_per_año | INT.EFECTIVO |
|---|---|---|
| 0.68 | 5.2174 | 0.8919 |

Observando ambos resultados, constatamos que son diferentes. En estos casos es recomendable el uso de las fórmulas, sus resultados son más reales.

### 29.2. TASA.NOMINAL

Devuelve la tasa de interés nominal anual si conocemos la tasa efectiva y el número de períodos de interés compuesto por año.

**Sintaxis**
**TASA.NOMINAL(tasa_efectiva; núm_per)**
El argumento núm_per se trunca a entero, hay que tener especial cuidado con esta función, sólo produce resultados confiables cuando la cantidad de períodos de pago en el año (núm_per) tiene valores exactos; por ejemplo: mensual (12), trimestral (4), semestral (2) o anual (1).
Si alguno de los argumentos es menor o igual a cero o si el argumento núm_per es menor a uno, la función devuelve el valor de error #¡NUM!
La respuesta obtenida viene enunciada en términos decimales y debe expresarse en formato de porcentaje. Nunca divida ni multiplique por cien el resultado de estas funciones.
Esta función proporciona la tasa nominal del pago de intereses vencidos. Para el interés anticipado debe calcularse la tasa nominal aplicando la fórmula (B):

[B] $\boldsymbol{ia} = \frac{\boldsymbol{ia}}{1+\boldsymbol{iv}}$

## 30. Funciones para el manejo de series uniformes

Presenta las funciones que sirven para resolver problemas en los cuales entre el valor inicial y el valor final de un negocio existen pagos de cuotas o valores recibidos.

En todas las funciones de series uniformes suponemos que los valores recibidos o pagados durante el tiempo del negocio son reinvertidos razón por la cual debe restase del plazo total, en las mismas condiciones existentes para la inversión original.
Un problema es de series uniformes cuando reúne las siguientes condiciones en su totalidad:
a) El monto de los pagos efectuados dentro del tiempo de la inversión es constante
b) La periodicidad de los pagos efectuados dentro del tiempo de la inversión es constante
c) La tasa de interés de liquidación de pagos dentro del tiempo de la inversión es constante.
Los argumentos utilizados por las funciones financieras de series uniformes son los siguientes:
**VA**: Es el valor actual de la serie de pagos futuros iguales. Si este argumento es omitido, significa que es 0.
**Pago (C)**: Es el pago efectuado periódicamente y no cambia durante la vida de la anualidad. El Pago incluye el capital y el interés pero no incluye ningún otro cargo o impuesto. Este argumento debe tener signo contrario al de VA, para conservar las condiciones del flujo de caja: expresamos los ingresos con signo positivo y los egresos con signo negativo.
**Nper**: Es la cantidad total de períodos en una anualidad; es decir, el plazo total del negocio.
**Tasa (i):** Es la tasa de interés por período. Tener en cuenta que no es la tasa anual, si no la tasa nominal del período de pago expresada en términos decimales. Es importante mantener la uniformidad en el uso de las unidades con las que especificamos Tasa y Nper.
**VF**: Es el valor futuro o el saldo en efectivo que desea lograrse después de efectuar el último pago. Si el argumento VF es omitido, asumimos que el valor es 0.
**Tipo:** Es el número 0 ó 1 e indica la forma de pago de la cuota entre vencida y anticipada.

**Defina tipo**
Es cero (0) o omitido, cuando el pago de la cuota es vencida.
Ponemos 1, cuando el pago de la cuota es anticipada.
**Período** Especifica el número ordinal de la cuota y debe encontrarse en el intervalo comprendido entre 1 y Nper.
**Per_inicial y Per_final** Especifica el número ordinal de la primera y la última cuota del período en el cual analizaremos las cuotas pagadas.
**Estimar** Es la tasa de interés estimada para que Excel empiece las iteraciones en el cálculo de la tasa de interés de series uniformes. Si el argumento Estimar es omitido, suponemos que es 10%.

### 30.1. VF
Permite calcular VF a partir de C o de VA. También sirve para calcular el valor de VF indicando si es cuota anticipada (tipo=1) o vencida (tipo=0). Si lo que queremos calcular es VF a partir de VA omitimos el valor de C; si la cuota es vencida, omitimos el valor tipo.
Devuelve el valor futuro de la inversión, equivalente a los pagos periódicos uniformes a una tasa de interés constante.

**Sintaxis: VF(tasa;nper;pago;va;tipo)**
El resultado proporcionado por esta función lo obtenemos también con la siguiente fórmula:

**Por ejemplo**:
Si ahorramos UM 350 mensuales durante 3 años en un banco que paga el 18% nominal anual y deseamos saber cuánto dinero tendremos ahorrado al final de los 3 años:

$$[27]\quad \boldsymbol{VF} = \boldsymbol{C}\left\langle\frac{(1+\boldsymbol{i})^{n}-1}{\boldsymbol{i}}\right\rangle$$

**Solución:**
C = 350; n = (3*12) = 36; i = 0.015 (0.18/12); VF = ?

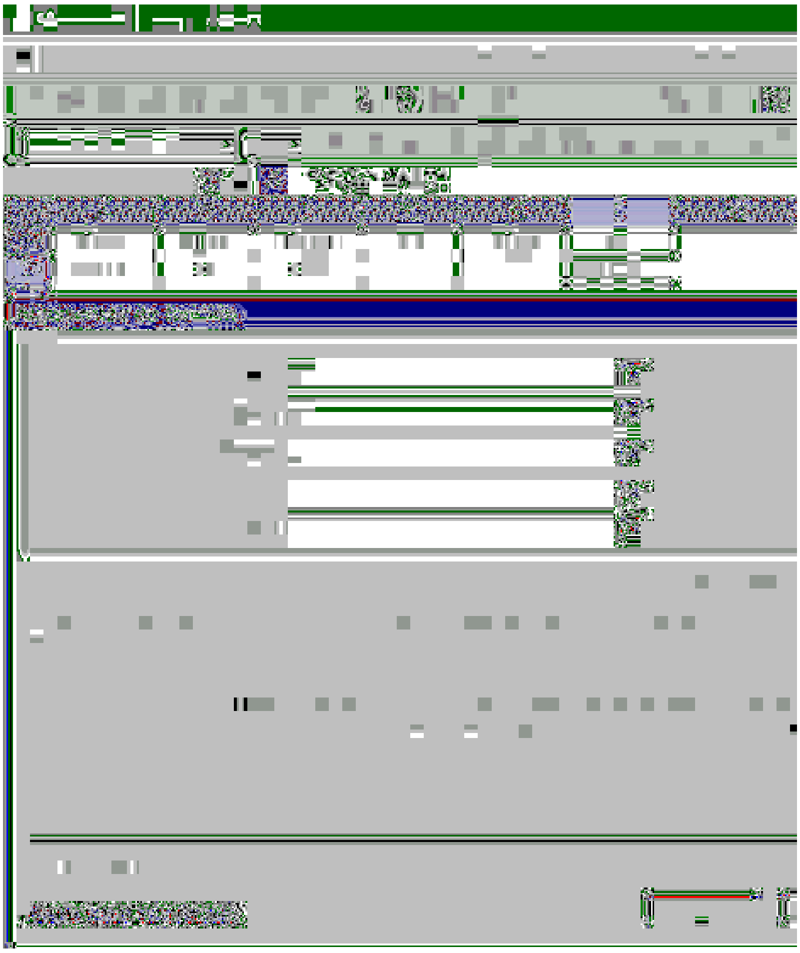
Aplicando ambos métodos, tenemos:

$$[27]\quad \boldsymbol{VF} = 350\left\langle\frac{(1+0.015)^{36}-1}{0.015}\right\rangle = \text{ UM } 16{,}546.59$$

**Sintaxis**
**VF(tasa;nper;pago;**va;tipo)

| TASA | NPER | PAGO | VA | TIPO | VF |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.015 | 36 | -350 | | | 16,546.59 |

Ingresamos los datos en los argumentos de función en el orden indicado en el cuadro de la sintaxis:



En la solución de los ejemplos y ejercicios en el presente libro, utilizaremos el formato simplificado indicado en el cuadro de la Sintaxis, cuando operemos con la herramienta Funciones Financieras de Excel. Esta metodología de ingresar los datos es aplicable a todas las funciones de Excel, utilizadas en la obra, desde luego, cada con su propia persiana de argumentos de función.

**Hay tres aspectos a considerar en este ejemplo:**

a) El interés incluido en el argumento **Tasa** debe estar en la misma unidad de tiempo utilizada para el argumento Nper. En este caso, como son cuotas mensuales, la tasa de interés debe ser mensual, es necesario dividir por doce la tasa anual nominal.
b) VA puede omitirse como apreciamos en el asistente para funciones y en la barra de fórmulas automáticamente deja el espacio en la función, asumiéndolo como cero.
c) Si deseamos que las cifras en la hoja de cálculo sean positivas, introducimos el argumento **Pago** con signo negativo, como apreciamos en el asistente para funciones (-350, en C2).

**30.2. VA**

Permite calcular VA a partir de C o de VF. También sirve para calcular el valor de VF indicando si es cuota anticipada (tipo=1) o vencida (tipo=0). Para calcular VA a partir de VF, omitir el valor de C; y cuando operemos con cuotas vencidas, omitir el valor tipo. Devuelve el valor actual de la inversión. El valor actual es la suma de una serie de pagos a futuro. Por ejemplo, cuando pedimos dinero prestado, la cantidad del préstamo es el valor actual para el prestamista.
La versión XP de Excel, recomienda el empleo de **fx** insertar función de la **barra de fórmulas**. Al oprimir **fx** aparece el menú de funciones y escogemos la función buscada.
Esta función conserva las mismas observaciones efectuadas para VF.

**Sintaxis**: **VA**(**tasa**;**nper**;**pago**;vf;tipo)

El resultado proporcionado por esta función lo obtenemos también con la siguiente fórmula:

$$[24] \quad \boldsymbol{VA} = \boldsymbol{C}\left\langle \frac{(1+\boldsymbol{i})^n - 1}{\boldsymbol{i}\left((1+\boldsymbol{i})^n\right)} \right\rangle$$

**Por ejemplo**:
Si ahorramos UM 350 mensuales durante 3 años en un banco que paga el 18% nominal anual y deseamos saber cuánto representan estas mensualidades al día de hoy.

**Solución:**
C = 350; n = (3*12) = 36; i = 0.015 (0.18/12); VA = ?

Aplicando ambos métodos, tenemos:

$$[24] \quad \boldsymbol{VA} = 350\left\langle \frac{1.015^{36} - 1}{0.015 \times 1.015^{36}} \right\rangle = \text{ UM } 9{,}681.24$$

**Sintaxis**
**VA**(**tasa**;**nper**;**pago**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VF | Tipo | VA |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.015 | 36 | -350 | | | 9,681.24 |

### 30.3. PAGO

Calcula el pago de un préstamo basándose en pagos constantes y con la tasa de interés constante.

**Sintaxis**:
**PAGO**(**tasa**;**nper**;**va**;vf;tipo)

**Sugerencia**: Para encontrar la cantidad total pagada durante el período del préstamo, multiplique el valor devuelto por PAGO por el argumento nper.
El resultado proporcionado por esta función lo obtenemos también con la siguiente fórmula:

$$[25] \quad \boldsymbol{C} = \boldsymbol{VA}\left\langle \frac{\boldsymbol{i}\left((1+\boldsymbol{i})^n\right)}{(1+\boldsymbol{i})^n - 1} \right\rangle$$

**Por ejemplo:**
Obtenemos un crédito de UM 10,000 para su pago en 24 cuotas trimestrales iguales, a la tasa nominal anual de 36% por trimestre vencido:

**Solución:**
VA = 10,000; n = 24; i = (0.36/12) = 0.03; C = ?

Aplicando ambos métodos, tenemos:

$$[25] \quad \boldsymbol{C} = 10{,}000\left\langle \frac{0.03\left((1+0.03)^{24}\right)}{(1+0.03)^{24} - 1} \right\rangle = \text{ UM } 590.47$$

**Sintaxis**
**PAGO**(**tasa**;**nper**;**va**;vf;tipo)

| TASA | NPER | VA | VF | TIPO | PAGO |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.03 | 24 | -10,000 | | | 590.47 |

En algunos casos puede darse la necesidad de requerir tanto el VA como el VF; como en el caso del **leasing**, en el cual, además del valor inicial de un equipo tenemos cuotas mensuales iguales y al final del pago existe la opción de compra para que el usuario adquiera el bien.

**Por ejemplo**:
En un leasing de UM 50,000 a 24 meses con la tasa de interés del 2.87% mensual y la opción de compra del 12%, la función Pago para calcular la cuota mensual a pagar operaría de la siguiente forma:

**Solución:**
VA = 50,000; i = 0.0287; n = 24; VF = 12%; C = ?

**Sintaxis**
**PAGO**(**tasa**;**nper**;**va**;vf;tipo)

| TASA | NPER | VA | VF | TIPO | PAGO |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.0287 | 24 | -50,000 | 12% | | 3,088.32 |

### 30.4. TASA, calcula la tasa del período

Devuelve la **tasa de interés por período** de la anualidad. La TASA es calculada por iteración y puede tener cero o más soluciones. Si los resultados sucesivos de TASA no convergen dentro de 0,0000001 después de 20 iteraciones, TASA devuelve el valor de error #¡NUM!.

Con esta función es posible calcular la tasa de interés, combinando no sólo VA y VF, sino también VA y C, C y VF y VA, C y VF.

Por ser la tasa del período tiene la característica de ser simultáneamente nominal y efectiva, para convertir ésta tasa en tasa anual debe tenerse cuidado con la fórmula utilizada, dependiendo de qué tasa queremos calcular: la tasa nominal o la tasa efectiva anual (TEA).

**Sintaxis**
**TASA**(**nper**;**pago**;**va**;vf;tipo;estimar)

**Por ejmeplo**:
VA = 5,000; n = 5; C = 1,250; i =?

**Sintaxis**
**TASA**(**nper**;**pago**;**va**;vf;tipo;estimar)

| Nper | Pago | VA | VF | Tipo | Tasa |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | -1,250.00 | 5,000 | | | 0.07931 |

Función utilizada para calcular la tasa periódica de las anualidades. No existen fórmulas para obtener la tasa de las anualidades.

### 30.5. NPER

Devuelve la cantidad de períodos que debe tener la inversión para que sea equivalente a la serie de pagos periódicos iguales.

**Sintaxis**
**NPER(tasa, pago, va, vf, tipo)**
La unidad de tiempo consignada en la función Nper debe ser la misma que la utilizada en la tasa de interés.
El resultado proporcionado por esta función lo obtenemos también con las siguientes fórmulas, según los casos:

[23] $\boldsymbol{n}=\dfrac{\log\frac{\text{VF}}{\text{VA}}}{\log(1+\boldsymbol{i})}$, [26] $\boldsymbol{n}=\dfrac{\log\left(1-\left(\frac{\text{VA}}{\text{C}}\right)\boldsymbol{i}\right)}{\log\left(\frac{1}{(1+\boldsymbol{i})}\right)}$,

$$[28] \quad \boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{log}\left(1 - \left(\frac{VA}{C} * \boldsymbol{i}\right) + 1\right)}{\boldsymbol{log}\left(\frac{1}{(1+\boldsymbol{i})}\right)}$$

**Por ejemplo**:
i = 0.06;   C = 14,000;   VA = 93,345.50;   n =?

**Sintaxis**
**NPER**(**tasa**; **pago**; **va**; vf; tipo)

| Tasa | Pago | VA | VF | Tipo | *n* |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.06 | 14000 | -93,345.50 | | | 8.7682 |

## 31. Funciones de Evaluación de proyectos

La evaluación financiera de proyectos consiste en la aplicación de algunos indicadores de conveniencia económica al flujo de caja estimado de un negocio. En esta parte presentaremos solamente las funciones financieras del Excel utilizadas en el presente libro como indicadores de conveniencia económica (VAN y TIR). En Excel existen otras funciones financieras para este propósito.

**En un proyecto real el flujo de efectivo resultante no obedece a las series conocidas (anualidades, gradientes, etc.)**, puesto que depende de cantidad de variables, por lo tanto no existe una fórmula para calcular el valor presente neto o la tasa de retorno (las fórmulas del VAN y la TIR insertos en el presente libro son solamente ilustrativas). Es necesario trabajar cada componente del flujo como elemento independiente. Es aquí donde el Excel presenta un gran aporte para la evaluación financiera de proyectos. Marcando la opción aceptar, obtenemos el VA del flujo. Para el cálculo del VAN sumamos la celda donde está la inversión con signo negativo.

Los argumentos que utilizan las funciones de evaluación de proyectos VAN o VNA y TIR, son los siguientes:

**Tasa** : Es la tasa de descuento utilizada para calcular el valor presente. Debe expresarse en el mismo período que empleamos para la serie de datos.

**Valor1, valor2:** Son los rangos que contienen los valores (ingresos y egresos) a los cuales calcularemos el valor presente. La función acepta hasta 29 rangos.

**Valores**: Rango que contiene los valores (flujo de caja) a los cuales deseamos calcular la tasa interna de retorno. El argumento valores debe contener al menos un valor positivo y uno negativo para calcular la tasa interna de retorno. Estos flujos de caja no tienen por que ser constantes, como es el caso en una anualidad; sin embargo, los flujos de caja deben ocurrir en intervalos regulares.

**Estimar**: Es el número estimado por el usuario que considera aproximará al resultado de TIR.

### 31.1. VNA o VAN

Calcula el valor actual neto de la inversión a partir de la tasa de descuento y pagos futuros (valores negativos) e ingresos (valores positivos).

**Sintaxis**
**VNA**(**tasa**;**valor1**;valor2; ...)

Los valores incluidos en el flujo de caja no tienen que ser constantes. Esta es la principal diferencia frente a la función **VA**, conserva la condición de que tanto la tasa de interés como la periodicidad son constantes; es decir, todo el flujo de caja descuenta a la misma tasa y los valores incluidos en él ocurren a intervalos iguales.

**Dentro del rango del flujo de caja excluimos el valor presente ubicado en el período cero (0),** dicho valor está en UM de hoy. La inversión inicial de la celda con período 0 no ingresa en el argumento valores, posteriormente restamos del resultado que arroje la función.

La fórmula relacionada con ésta función es:

$$[41] \quad \boldsymbol{VAN} = \left\langle \frac{FC_1}{(1+i)} + \frac{FC_2}{(1+i)^2} + \frac{FC_3}{(1+i)^3} + \frac{FC_4}{(1+i)^4} + \frac{FC_n}{(1+i)^n} \right\rangle - I_0$$

**Por ejemplo**:
Tenemos los siguientes flujos netos de un proyecto

**FLUJO DE CAJA**

| AÑOS | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Flujos Netos | -50,000 | 16,000 | 14,000 | 17,000 | 15,000 | 18,000 |

Aplicando la función VNA y con un costo de oportunidad del capital de 15% calculamos el VAN del flujo precedente:

**Sintaxis**
**VNA(tasa;valor1**;valor2; ...)

| AÑO | Tasa | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | VAN |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **FLUJO** | 0.15 | -50,000 | 16,000 | 14,000 | 17,000 | 15,000 | 18,000 | 3,202.31 |

El valor actual neto es un indicador sobre la conveniencia económica de la inversión, involucra la subjetividad del inversionista, que debe seleccionar la tasa de interés para descontar el flujo de caja. Al calcular con dos tasas diferentes obtenemos dos resultados, para evaluar estos casos debe tenerse en cuenta que la respuesta esta expresada en UM del período cero y su significado puede interpretarse de la siguiente manera:

a) **VNA > 0**, un resultado positivo indica que el negocio estudiado arroja rentabilidad superior a la exigida por el inversionista, deducida la inversión, luego es conveniente llevar a cabo el negocio.
b) **VNA = 0**, en caso de presentarse, un resultado igual a cero indica que el negocio arroja rentabilidad igual a la exigida por el inversionista, la ejecución del proyecto es opcional.
c) **VNA < 0**, valor presente neto negativo no significa que el negocio estudiado arroje pérdidas, únicamente la rentabilidad es inferior a la exigida por el inversionista y para él, particularmente, no es conveniente el negocio.

De lo anterior concluimos **cuando anunciemos el VNA de un proyecto debe aclararse cuál fue la tasa de descuento utilizada para calcularlo**, es decir, cuál fue el valor ingresado en el argumento Tasa.

### 31.2. TIR

Devuelve la tasa interna de retorno (tasa de rentabilidad) de los flujos de caja representados por los números del argumento valores. Estos flujos de caja no son constantes, como en las anualidades. Sin embargo, los flujos de caja deben ocurrir en intervalos regulares, como meses o años. La tasa interna de retorno equivale a la tasa de interés producida por un proyecto de inversión con pagos (valores negativos) e ingresos (valores positivos) que ocurren en períodos regulares.

**Sintaxis**
**TIR(valores**;estimar)
Para el cálculo de la función TIR incluimos en el rango de valores todo el flujo de caja y es necesario que existan valores positivos y negativos. El argumento Estimar es opcional. En caso de omitirse, el Excel asume la tasa inicial del 10%.

La fórmula relacionada con ésta función es:

$$[\textit{TIR}] \quad -I_0+\frac{FC_1}{(1+i)}+\frac{FC_2}{(1+i)^2}+\frac{FC_3}{(1+i)^3}+\frac{FC_4}{(1+i)^4}+\frac{FC_n}{(1+i)^n}=0$$

**Por ejemplo**:
Tenemos el siguiente flujo de caja de un proyecto:

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| -60,000 | 8,000 | 15,000 | 15,000 | 15,000 | 20,000 | 28,000 |

Aplicando la función calculamos la TIR del proyecto:

**Sintaxis**

**TIR**(**valores**;estimar)

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | TIR |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -60,000 | 8,000 | 15,000 | 15,000 | 15,000 | 20,000 | 28,000 | 0.1436 |

La **TIR** sólo involucra las condiciones particulares de un proyecto y no está afecta por la subjetividad del inversionista. Sin embargo, dificultades de orden matemático llevan a desconfiar de los resultados que arroja. Para ilustrar el caso presentamos el siguiente flujo.

| 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|
| -42,000 | 120,000 | -80,000 |

Aplicando la función calculamos la TIR del proyecto:

Con el argumento estimar = 6%

**Sintaxis**

**TIR**(**valores**;estimar)

| 0 | 1 | 2 | TIR |
|---|---|---|---|
| -42,000 | 120,000 | -80,000 | 0.0597 |

Con el argumento estimar = 35%

**Sintaxis**

**TIR**(**valores**;estimar)

| 0 | 1 | 2 | TIR |
|---|---|---|---|
| -42,000 | 120,000 | -80,000 | 0.7974 |

Como apreciamos, ante el mismo flujo de caja la función TIR arroja dos resultados diferentes, dependiendo del valor utilizado en el argumento Estimar. Es recomendable tener cuidado al utilizar esta función, puede llevarnos a conclusiones erróneas.
Por otra parte, la TIR no toma en cuenta los costos de financiación ni la reinversión de utilidades generadas al realizar la inversión. Es decir sólo está mostrando la rentabilidad por mantener en un negocio el saldo no recuperado de la inversión inicial. Para resolver esta dificultad utilizamos otra forma de calcular la TIR llamada la Tasa Verdadera de Rentabilidad (TVR) o la Tasa Interna de Rendimiento Modificada (TIRM).
La TIRM: Devuelve la tasa interna de retorno modificada para una serie de flujos de caja periódicos. TIRM toma en cuenta el costo de la inversión y el interés obtenido por la reinversión del dinero.

**Sintaxis**

**TIRM**(**valores**;**tasa_financiamiento**;**tasa_reinversión**)

Valores es una matriz o una referencia a celdas que contienen números. Estos números representan el flujo de caja, expresado en una serie de pagos (valores negativos) e ingresos (valores positivos) efectuados en períodos regulares.
El argumento **valores** debe contener por lo menos un valor positivo y uno negativo para poder calcular la tasa interna de retorno modificada. De lo contrario, TIRM devuelve el valor de error #¡DIV/0!
Si el argumento matricial o de referencia contiene texto, valores lógicos o celdas vacías, estos valores se pasan por alto; sin embargo, se incluirán las celdas con el valor cero.
**Tasa_financiamiento** es la tasa de interés que se paga por el dinero utilizado en los flujos de caja.
**Tasa_reinversión** es la tasa de interés obtenida por los flujos de caja a medida que se reinvierten.
Esta función en el presente libro es referencial, todos los casos son resueltpos aplicando la función TIR.

## 32. Tablas de amortización

La tabla de amortización indica cómo el pago de una deuda está dividida entre interés y abono o amortización de la deuda. Con la tabla de amortización podemos también establecer el saldo pendiente al final de cada período. Igualmente podemos operar con la tabla de capitalización; la diferencia radica en que en lugar de amortizar (disminuir la deuda), los ahorros y los intereses

que ellos producen capitalizan luego, es posible calcular también el saldo acumulado del capital ahorrado con sus intereses.
Con la ayuda de Excel, las tablas de amortización pueden elaborarse con variados esquemas de pago, el límite lo impone la imaginación y capacidad del usuario. Algunos ejemplos son las cuotas escalonadas del pago de deudas. La **clave** para manipular estos esquemas es hacer depender todas las cuotas futuras de la primera cuota y construir el «modelo» en función de esa primera cuota; hecho esto, hay que encontrar el valor de la primera cuota que haga cero el saldo final. Esto es posible lograrlo con la opción de Excel que está en **Herramientas** del menú, llamada **Buscar objetivo**.

Ajustar el valor de una celda para obtener un resultado específico para otra celda.

1. En el **menú Herramientas**, haga clic en Buscar objetivo.
2. En el cuadro **Definir celda**, escriba la referencia de la celda que contenga la fórmula (**fórmula**: secuencia de valores, referencias de celda, nombres, funciones u operadores de la celda que producen juntos un valor nuevo. Una fórmula comienza siempre con el signo (=).) que desee resolver.
3. En el cuadro **Con el valor**, introduzca el resultado que desee.
4. En el cuadro **Para cambiar la celda** introduzca la referencia de la celda que contenga el valor que desee ajustar. A esta celda debe hacer referencia la fórmula en la celda especificada del cuadro Definir celda.
5. Haga clic en **Aceptar**.

Lo más conveniente al construir la tabla de amortización es su estructura básica, así:

## 1º Caso cuando fijamos la cuota o pago

| SALDO INICIAL | INTERÉS | AMORTIZACIÓN | PAGO | SALDO FINAL |
|---|---|---|---|---|
| Saldo final del período anterior | Saldo inicial por tasa de interés | Pago menos interés | Definida a voluntad | Saldo inicial menos amortización |

**Por ejemplo**: Un préstamo de UM 10,000 al 4.5% mensual, cuyos 6 pagos, se duplican cada dos meses.

**Solución:**
VA=10,000; i = 0.045; n = 6; C1...6 **= ?**

La primera cuota puede ser cualquier valor; lo importante es que las demás cuotas (de la segunda en adelante) dependan de la primera; de modo que cuando cambie la primera, las demás cuotas y el resto de la tabla también cambien. Habrá que cambiar el valor de la primera cuota hasta cuando el saldo final sea cero. Es posible hacer esto a mano, pero el computador lo hace más rápido con la opción **Buscar objetivo** ya mencionada. Definimos la celda donde está el saldo final del último período con el valor cero y pedimos que cambie la celda donde está la primera cuota.

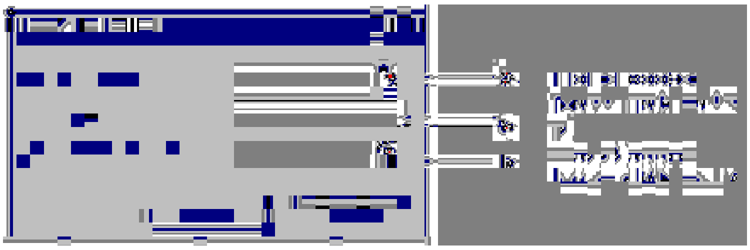
**Operando con** Buscar Objetivo **de Excel.**

1º. Elaboramos la tabla de amortización, como ilustramos en el extracto de la hoja de Excel.

En la columna E4 (Pago), ingresamos 10 un valor arbitrario, de la siguiente forma:

Celda E4 10 [Ingresamos a la celda sin poner el signo (=)]
Celda E5 =E4
Celda E6 =E5*2 (de acuerdo a la condición del problema).
Celda E7 =E6
Celda E8 =E7*2
Celda E9 =E8

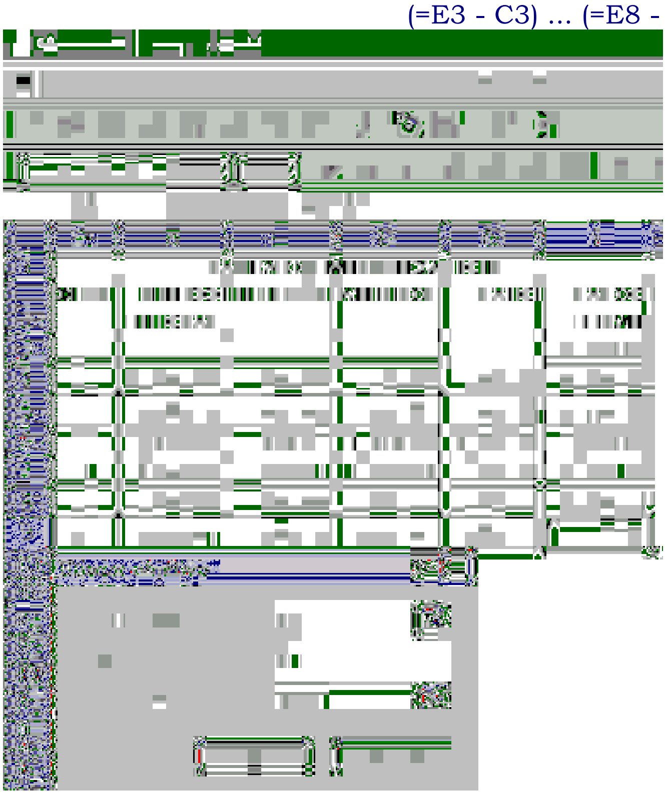
Cuando la tabla es de muchos períodos (filas) y no exista la condición doble o UM X más cada 2, 3, etc. cuotas; la forma más rápida de operar, es ingresar a la primera celda (PAGO) cualquier número, luego ingresamos a la segunda celda (PAGO) el signo (=) y hacemos clic con el mouse en la primera celda PAGO. Finalmente, colocamos el puntero en la 2° celda PAGO y del ángulo inferior arrastramos el puntero en forma de cruz hasta la celda PAGO final de la tabla.



Aplicando la opción buscar objetivo obtenemos el valor de cada cuota:

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **MES** | **SALDO INICIAL** | **INTERÉS** | **AMORTZ** | **PAGO** | **SALDO FINAL** |
| 2 | 0 | | | | | 10,000.00 |
| 3 | 1 | 10,000.00 | 450.00 | 413.28 | 863.28 | 9,586.72 |
| 4 | 2 | 9,586.72 | 431.40 | 431.87 | 863.28 | 9,154.85 |
| 5 | 3 | 9,154.85 | 411.97 | 1,314.59 | 1,726.55 | 7,840.26 |
| 6 | 4 | 7,840.26 | 352.81 | 1,373.74 | 1,726.55 | 6,466.52 |
| 7 | 5 | 6,466.52 | 290.99 | 3,162.11 | 3,453.11 | 3,304.41 |
| 8 | 6 | 3,304.41 | 148.70 | 3,304.41 | 3,453.11 | 0.00 |

INTERES = SALDO INICIAL x 0.045
PAGO = BUSCAR OBJETIVO
AMORTIZACION = PAGO - INTERES
(=E3 - C3) … (=E8 - C8)



## 2º Caso cuando fijamos el abono o amortización

Caso que confirma que la suma de las amortizaciones es igual a la deuda.

| SALDO INICIAL | INTERÉS | AMORTIZACIÓN | PAGO | SALDO FINAL |
|---|---|---|---|---|
| Saldo final del período anterior | Saldo inicial por tasa de interés | Definida a voluntad | Amortización más interés | Saldo inicial menos amortización |

Considerando el ejemplo anterior con amortización constante:

Elaboramos la Tabla de Amortización

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | MES | SALDO INICIAL | INTERÉS | AMORTZ | PAGO | SALDO FINAL |
| 2 | 0 | | | | | 10,000.00 |
| 3 | 1 | 10,000.00 | 450.00 | 1,666.67 | 2,116.67 | 8,333.33 |
| 4 | 2 | 8,333.33 | 375.00 | 1,666.67 | 2,041.67 | 6,666.67 |
| 5 | 3 | 6,666.67 | 300.00 | 1,666.67 | 1,966.67 | 5,000.00 |
| 6 | 4 | 5,000.00 | 225.00 | 1,666.67 | 1,891.67 | 3,333.33 |
| 7 | 5 | 3,333.33 | 150.00 | 1,666.67 | 1,816.67 | 1,666.67 |
| 8 | 6 | 1,666.67 | 75.00 | 1,666.67 | 1,741.67 | 0.00 |

INTERES = SALDO INICIAL x 0.045
AMORTIZACION = 10,000/6 = 1,666.67
PAGO = Amortización + Interés
(=C3 + D3) … (=C8 + D8)

El ejemplo anterior con pagos en cuotas uniformes:

**Solución**:
VA = 10,000; i = 0.045; n = 6; C = ?

El **pago C** también es calculado aplicando la fórmula [25], la función financiera **PAGO** o **Buscar Objetivo** de Excel:

$$[25] \quad \mathbf{C} = 10{,}000\left\langle\frac{0.045(1+0.045)^{6}}{(1+0.045)^{6}-1}\right\rangle = \text{UM } 1{,}938.78$$

**Sintaxis**
**PAGO**(**tasa**;**nper**;**va**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | VA | VF | Tipo | PAGO |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.045 | 6 | -10,000 | | | 1,938.78 |

Elaboramos la tabla de amortización, como ilustramos en el extracto de la hoja de Excel. Aplicamos el proceso ya conocido y obtenemos la siguiente tabla:

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | MES | SALDO INICIAL | INTERÉS | AMORTZ | PAGO | SALDO FINAL |
| 2 | 0 | | | | | 10,000.00 |
| 3 | 1 | 10,000.00 | 450.00 | 1,488.78 | 1,938.78 | 8,511.22 |
| 4 | 2 | 8,511.22 | 383.00 | 1,555.78 | 1,938.78 | 6,955.44 |
| 5 | 3 | 6,955.44 | 312.99 | 1,625.79 | 1,938.78 | 5,329.65 |
| 6 | 4 | 5,329.65 | 239.83 | 1,698.95 | 1,938.78 | 3,630.70 |
| 7 | 5 | 3,630.70 | 163.38 | 1,775.40 | 1,938.78 | 1,855.30 |
| 8 | 6 | 1,855.30 | 83.49 | 1,855.30 | 1,938.78 | 0.00 |

Ejemplo de cuota o **pagos escalonados** es la liquidación de un préstamo de UM 5,000 a la tasa del 3.8% mensual con cuotas que crecen UM 30 cada mes. El primer esquema sería:

**Solución**:
VA = 5,000; i = 0.038; n = 5; C =?

En la celda E3 (Pago), ingresamos un valor arbitrario, de la siguiente forma:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Celda E3 | 10 | Celda E6 | =E5+30 |
| Celda E4 | =E3+30 | Celda E7 | =E6+30 |
| Celda E5 | =E4+30 | Celda E8 | =E7+30 |

En buscar Objetivo**:**
Definir la celda : Con el mouse hacemos clic en la celda F8
con el valor : 0
para cambiar la celda: Con el mouse hacemos clic en la celda E3

Aplicando este procedimiento obtenemos la siguiente tabla:

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **MES** | **SALDO INICIAL** | **INTERÉS** | **AMORTZ** | **PAGO** | **SALDO FINAL** |
| 2 | 0 | | | | | 5,000.00 |
| 3 | 1 | 5,000.00 | 190.00 | 685.87 | 875.87 | 4,314.13 |
| 4 | 2 | 4,314.13 | 163.94 | 741.93 | 905.87 | 3,572.20 |
| 5 | 3 | 3,572.20 | 135.74 | 800.13 | 935.87 | 2,772.07 |
| 6 | 4 | 2,772.07 | 105.34 | 860.53 | 965.87 | 1,911.54 |
| 7 | 5 | 1,911.54 | 72.64 | 923.23 | 995.87 | 988.31 |
| 8 | 6 | 988.31 | 37.56 | 988.31 | 1,025.87 | 0.00 |

Con estos ejemplos demostramos que es posible construir tablas de amortización con cualquier esquema de pagos y siempre podremos encontrar el saldo final igual a cero. El esquema de pagos puede ser tal que la cuota sea menor que los intereses que deben pagarse; en este caso el saldo final aumentará en lugar de disminuir.

## 33. Calcular la diferencia entre dos fechas

### 33.1. Calcular el número de días entre dos fechas

Utilice el operador de sustracción (-) o la función DIAS.LAB para realizar esta tarea.

**FUNCION DIAS.LAB**
Devuelve el número de días laborables entre fecha_inicial y fecha_final. Los días laborables no incluyen los fines de semana ni otras fechas que se identifiquen en el argumento festivos. Utilice DIAS.LAB para calcular el incremento de los beneficios acumulados de los empleados basándose en el número de días trabajados durante un período específico.
Si esta función no está disponible y devuelve el error #¿NOMBRE?, instale y cargue el programa de complementos Herramientas para análisis.

**Sintaxis**
**DIAS.LAB**(**fecha_inicial**;**fecha_final**;festivos)
**Importante**. Las fechas deben introducirse mediante la función FECHA o como resultado de otras fórmulas o funciones. Por ejemplo, utilice FECHA(2008;5;23) para el día 23 de mayo de 2008. Pueden producirse problemas si las fechas se introducen como texto.
Fecha_inicial es una fecha que representa la fecha inicial.
Fecha_final es una fecha que representa la fecha final.
Festivos es un rango opcional de una o varias fechas que deben excluirse del calendario laboral, como los días festivos nacionales y locales. La lista puede ser un rango de celdas que contengan las fechas o una constante matricial de los números de serie que representen las fechas.

**Observaciones**

- Microsoft Excel almacena las fechas como números de serie secuenciales para que puedan utilizarse en los cálculos. De forma predeterminada, el 1 de enero de 1900 es el número de serie 1 y el 1 de enero de 2008 es el número de serie 39448 porque viene 39.448 días después del 1 de enero de 1900. Microsoft Excel para Macintosh utiliza un sistema de fechas predeterminado diferente.
- Si uno de los argumentos no es una fecha válida DIAS.LAB devuelve el valor de error #¡VALOR!. Ejemplo del ejercicio 78.

**Sintaxis**

**DIAS.LAB(fecha_inicial;fecha_final;**festivos**)**

| Fecha inicial | Fecha final | Festivos | DIAS |
|---|---|---|---|
| 2003-05-15 | 2003-07-28 | | 53 |

Nota: Para que el resultado sea en números (no en fechas), la celda días debe estar configurado como número.

**33.2. Calcular el número de meses entre dos fechas**

Utilice las funciones MES y AÑO para realizar esta tarea.

**FUNCION MES**

Devuelve el mes de una fecha representada por un número de serie. El mes se expresa como número entero comprendido entre 1 (enero) y 12 (diciembre).

**Sintaxis**

**MES(núm_de_serie)**

Núm_de_serie es la fecha del mes que intenta buscar. Las fechas deben introducirse mediante la función FECHA o como resultados de otras fórmulas o funciones. Por ejemplo, utilice FECHA(2008;5;23) para el día 23 de mayo de 2008. Pueden producirse problemas si las fechas se introducen como texto.

**Observaciones**

Microsoft Excel almacena las fechas como números de serie secuenciales para que puedan utilizarse en los cálculos. De forma predeterminada, el 1 de enero de 1900 es el número de serie 1 y el 1 de enero de 2008 es el número de serie 39448 porque viene 39.448 días después del 1 de enero de 1900. Microsoft Excel para Macintosh utiliza un sistema de fechas predeterminado diferente.

Los valores devueltos por las funciones AÑO, MES Y DIA serán valores gregorianos independientemente del formato de visualización del valor de fecha suministrado. Por ejemplo, si el formato de visualización de la fecha suministrada es Hijri, los valores devueltos para las funciones AÑO, MES Y DIA serán valores asociados con la fecha gregoriana equivalente.

**33.3. Calcular el número de años entre dos fechas**

Utilice la función AÑO para esta tarea.

**FUNCION AÑO**

Devuelve el año correspondiente a una fecha. El año se devuelve como número entero comprendido entre 1900 y 9999.

**Sintaxis**

**AÑO(núm_de_serie)**

Núm_de_serie es la fecha del año que desee buscar. Las fechas deben introducirse mediante la función FECHA o como resultados de otras fórmulas o funciones. Por ejemplo, utilice FECHA(2008;5;23) para el día 23 de mayo de 2008. Pueden producirse problemas si las fechas se introducen como texto.

**Observaciones**

Microsoft Excel almacena las fechas como números de serie secuenciales para que puedan utilizarse en los cálculos. De forma predeterminada, el 1 de enero de 1900 es el número de serie 1

y el 1 de enero de 2008 es el número de serie 39448 porque viene 39.448 días después del 1 de enero de 1900. Microsoft Excel para Macintosh utiliza un sistema de fechas predeterminado diferente.
Los valores que devuelven las funciones AÑO, MES Y DIA serán valores gregorianos independientemente del formato de visualización del valor de fecha suministrado. Por ejemplo, si el formato de visualización de la fecha suministrada es Hijri, los valores devueltos para las funciones AÑO, MES Y DIA serán valores asociados con la fecha gregoriana equivalente.
Si no están disponibles estas funciones, instale y cargue el programa de complementos Herramientas para análisis.

¿Cómo?
1. En el menú **Herramientas**, elija **Complementos**.
2. En la lista **Complementos disponibles**, seleccione el cuadro **Herramientas para análisis** y, a continuación, haga clic en **Aceptar**.
3. Si es necesario, siga las instrucciones del programa de instalación.

**Ejemplo de hoja de cálculo**
El ejemplo puede resultar más fácil si lo copia en una hoja de cálculo en blanco.
¿Cómo?
1. Cree un libro o una hoja de cálculo en blanco.
2. Seleccione el ejemplo en el tema de Ayuda. No seleccione los encabezados de fila o de columna.
Seleccionar un ejemplo de la Ayuda
3. Presione CTRL+C.
4. En la hoja de cálculo, seleccione la celda A1 y presione CTRL+V.
5. Para alternar entre ver los resultados y ver las fórmulas que devuelven los resultados, presione CTRL+‘ (acento grave) o, en el menú **Herramientas**, elija **Auditoría de fórmulas** y, a continuación, haga clic en **Modo de auditoría de fórmulas**.
**Nota** Para ver las fechas como números, seleccione la celda y haga clic en **Celdas** en el menú **Formato**.

## 34. Funciones matemáticas

### 34.1. POTENCIA
Devuelve el resultado de elevar el argumento número a una potencia.

**Sintaxis**
**POTENCIA(número;potencia)**
Número es el número base. Puede ser cualquier número real.
Potencia es el exponente al que desea elevar el número base.
**Observación**
Se puede utilizar el operador «^» en lugar de la función POTENCIA para indicar a qué potencia se eleva el número base, por ejemplo 5^2.

**Ejemplo:** El ejemplo puede resultar más fácil de entender si lo copia en una hoja de cálculo en blanco.

¿Cómo?
1. Cree un libro o una hoja de cálculo en blanco.
2. Seleccione el ejemplo en el tema de Ayuda. No seleccione los encabezados de fila o de columna.
3. Seleccionar un ejemplo de la Ayuda
4. Presione CTRL+C.
5. En la hoja de cálculo, seleccione la celda A1 y presione CTRL+V.
6. Para alternar entre ver los resultados y ver las fórmulas que devuelven los resultados, presione CTRL+‘ (acento grave) o, en el menú **Herramientas**, elija **Auditoría de fórmulas** y, a continuación, haga clic en **Modo de auditoría de fórmulas**.

Del ejercicio 36:
[11] $\boldsymbol{VF} = 20{,}000(1+0.20)^5 = \text{ UM } 49{,}766.40$

**Sintaxis**
**POTENCIA(número;potencia)**

| Número | Potencia | Resultado | VA | VF |
|---|---|---|---|---|
| 1,2 | 5 | 2,4883 | 20.000,00 | 49.766,40 |

### 34.2. Logaritmos

#### 34.2.1. LOG
Devuelve el logaritmo de un número en la base especificada.

**Sintaxis**
**LOG**(**número**;base)
Número   es el número real positivo cuyo logaritmo desea obtener.
Base   es la base del logaritmo. Si base se omite, el valor predeterminado es 10.

Ejemplo
El ejemplo puede resultar más fácil de entender si lo copia en una hoja de cálculo en blanco.

¿Cómo?
1. Cree un libro o una hoja de cálculo en blanco.
2. Seleccione el ejemplo en el tema de Ayuda. No seleccione los encabezados de fila o de columna.

Seleccionar un ejemplo de la Ayuda
1. Presione CTRL+C.
2. En la hoja de cálculo, seleccione la celda A1 y presione CTRL+V.
3. Para alternar entre ver los resultados y ver las fórmulas que devuelven los resultados, presione CTRL+‘ (acento grave) o, en el menú **Herramientas**, elija **Auditoría de fórmulas** y, a continuación, haga clic en **Modo de auditoría de fórmulas**.

#### 34.2.2. LN
Devuelve el logaritmo natural (neperiano) de un número. Los logaritmos naturales son logaritmos que se basan en la constante **e** (2,71828182845904).

**Sintaxis**
**LN**(**número**)
Número es el número real positivo cuyo logaritmo natural desea obtener.
**Observación**
LN es la función inversa de la función EXP.

Ejemplo
El ejemplo puede resultar más fácil de entender si lo copia en una hoja de cálculo en blanco.

¿Cómo?
1. Cree un libro o una hoja de cálculo en blanco.
2. Seleccione el ejemplo en el tema de Ayuda. No seleccione los encabezados de fila o de columna.

Seleccionar un ejemplo de la Ayuda
1. Presione CTRL+C.
2. En la hoja de cálculo, seleccione la celda A1 y presione CTRL+V.
3. Para alternar entre ver los resultados y ver las fórmulas que devuelven los resultados, presione CTRL+‘ (acento grave) o, en el menú **Herramientas**, elija **Auditoría de fórmulas** y, a continuación, haga clic en **Modo de auditoría de fórmulas**.

### 34.2.3. LOG10

Devuelve el logaritmo en base 10 de un número.

**Sintaxis**
**LOG10**(**número**)
Número es el número real positivo cuyo logaritmo en base 10 desea obtener.

**Ejemplo**
El ejemplo puede resultar más fácil de entender si lo copia en una hoja de cálculo en blanco.

¿Cómo?
1. Cree un libro o una hoja de cálculo en blanco.
2. Seleccione el ejemplo en el tema de Ayuda. No seleccione los encabezados de fila o de columna.

Seleccionar un ejemplo de la Ayuda
1. Presione CTRL+C.
2. En la hoja de cálculo, seleccione la celda A1 y presione CTRL+V.
3. Para alternar entre ver los resultados y ver las fórmulas que devuelven los resultados, presione CTRL+‘ (acento grave) o, en el menú **Herramientas**, elija **Auditoría de fórmulas** y, a continuación, haga clic en **Modo de auditoría de fórmulas**.

# Capítulo 2

## Interés Simple e Interés Compuesto

*El interés pagado y recibido puede considerarse como simple o compuesto.*

### 1. Interés Simple

El interés simple, es pagado sobre el capital primitivo que permanece invariable. En consecuencia, el interés obtenido en cada intervalo unitario de tiempo es el mismo. Es decir, la retribución económica causada y pagada **no** es reinvertida, por cuanto, el monto del interés es calculado sobre la misma base.
Interés simple, es también la ganancia sólo del Capital (principal, stock inicial de efectivo) a la tasa de interés por unidad de tiempo, durante todo el período de transacción comercial.
La fórmula de la capitalización simple permite calcular el equivalente de un capital en un momento posterior. Generalmente, el interés simple es utilizado en el corto plazo (períodos menores de 1 año). Ver en éste Capítulo, numeral 2.3.
Al calcularse el interés simple sobre el importe inicial es indiferente la frecuencia en la que éstos son cobrados o pagados. El interés simple, NO capitaliza.

**Fórmula general del interés simple**:

[5] $\boldsymbol{VF} = \boldsymbol{VA}(1+\boldsymbol{n}*\boldsymbol{i})$

#### 1.1. Valor actual

La longitud de una escalera es la misma contada de arriba abajo como de abajo arriba. El valor futuro *VF* puede considerarse como la cima vista desde abajo y el valor actual *VA* como el fondo visto desde arriba.
**El valor actual** de una cantidad con vencimiento en el futuro, es el capital que a un tipo de interés dado, en períodos también dados, ascenderá a la suma debida.
Si conocemos el monto para tiempo y tasa dados, el problema será entonces hallar el capital, en realidad no es otra cosa que el valor actual del monto. Derivamos el VA de la fórmula general:

[6] $\boldsymbol{VA} = \dfrac{\boldsymbol{VF}}{(1+\boldsymbol{n}*\boldsymbol{i})}$

Siendo ésta la fórmula para el valor actual a interés simple, sirve no sólo para períodos de año, sino para cualquier fracción del año.
El descuento es la inversa de la capitalización. Con ésta fórmula calculamos el capital equivalente en un momento anterior de importe futuro.

Otras fórmulas derivadas de la fórmula general:
Si llamamos **I** a los intereses percibidos en el período considerado, convendremos:
[7] $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{VF} - \boldsymbol{VA}$

La diferencia entre VF y VA es el interés (**I**) generado por VA.
Y también, dada la fórmula general, obtenemos la fórmula del importe de los intereses:

$$\mathbf{I} = VA(1+n*i) - VA = VA + VA*n*i - VA$$

[8] $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{VA}*\boldsymbol{n}*\boldsymbol{i}$

***I*** = (principal)*(tasa de interés)*(número de períodos)

**(Inversiones)** $I$ = monto total hoy - inversión original
**(Préstamos)** $I$ = saldo de deuda - préstamo inicial

Con la fórmula [8] igual calculamos el interés (I) de una inversión o préstamo.
Sí sumamos el interés I al principal VA, el monto VF o valor futuro será.

[9] $VF = VA + I$ **o** $VF = VA(1+i*n)$

Despejando éstas fórmulas obtenemos el tipo de interés y el plazo:

[10] $i = \frac{I}{VA * n}$ [11] $i = \frac{\frac{VF}{VA} - 1}{n}$ [12] $n = \frac{I}{VA * i}$ [13] $n = \frac{\frac{VF}{VA} - 1}{i}$

El tipo de interés (***i***) y el plazo (***n***) deben referirse a la misma unidad de tiempo (si el tipo de interés es anual, el plazo debe ser anual, si el tipo de interés es mensual, el plazo irá en meses, etc.). Siendo indiferente adecuar la tasa al tiempo o viceversa.
Al utilizar tasas de interés mensual, el resultado de ***n*** estará expresado en meses. En estas fórmulas la tasa de interés (i***)*** está indicada en forma decimal.

Nomenclatura:
**I** = Interés expresado en valores monetarios
**VA** = Valor actual, expresado en unidades monetarias
**VF** = Valor futuro, expresado en unidades monetarias
**n** = Periodo de capitalización, unidad de tiempo, años, meses, diario,...
**i** =Tasa de interés, porcentaje anual, mensual, diario, llamado también tasa de interés real.

**Ejercicio 11** **(VA a interés simple)**
Encontrar el valor actual, al 5% de interés simple, de UM 1,800 con vencimiento en 9 meses.

**Solución:**
VF= 1,800; i = 0.05; n = 9/4; VA = ?

**Ejercicio 12** **(Interés simple - Inversión inicial)**
¿Cuál fue nuestra inversión inicial, si hemos obtenido utilidades de UM 300, después de 8 meses, a interés simple y con el 48% de tasa anual?

**Solución:**
I = 300; n = 8 i = 0.04 (0.48/12); VA =?

[6] $VA = \frac{1{,}800}{1 + (9/4 \times 0.05)} =$ UM 1,617.98

[8] 300 = ***VA***(0.04*8), de donde:

$VA = \frac{300}{0.04*8} =$ UM 937.50

**Ejercicio 13** **(VF a interés simple)**
Si tenemos UM 10,000 y lo invertimos por un año con el 28% de interés anual. ¿Cuánto dinero tendremos al finalizar el año?
Como es normal exigiremos la devolución del monto inicial incrementado algo más mensual, que compense la pérdida del valor de la moneda, el riesgo corrido y el interés del dinero. Generalmente es preferible utilizar el dinero en el presente y no en el futuro. El incremento es el interés y es consecuencia de la capacidad que tiene el dinero de «producir más dinero”. El interés como todo precio, depende del mercado y de las condiciones de cada negociación, fundamentalmente del plazo y del riesgo.

**Solución**:
VA = 10,000; i = 0.28; n = 1; VF =?

[5] ***VF*** = 10,000 (1+ 0.28%*1) = UM 12,800

Con este sencillo ejemplo demostramos que es indiferente recibir hoy UM 10,000 ó UM 12,800 dentro de un año.

**Ejercicio 14 (VF a interés simple)**
Necesitamos saber el monto que retiraríamos dentro de 4 años, sí hoy invertimos UM 2,000 al 8% para el primer año con incrementos del 1% para los próximos tres años.
En estos casos no aplicamos directamente la fórmula general del interés simple, por cuanto el tipo de interés en cada período es diferente. Debemos sumar al principal los intereses de cada período, calculado siempre sobre el capital inicial pero a la tasa vigente en cada momento.

**Solución**:
VA = 2,000; n = 4; i1...4 = 0.08, 09, 0.10 y 0.11; VF =?

Al ejemplo corresponde la relación siguiente:

$$VF = VA + (VA \times i_1) + (VA \times i_2) + (VA \times i_3) + (VA \times i_4)$$

$$VF = 2{,}000+(2{,}000\times0.08)+(2{,}000\times0.09)+(2{,}000\times0.10)+(2{,}000\times0.11) = \text{UM } 2{,}760$$

**Respuesta:**
El monto a retirar es UM 2,760.00

**Ejercicio 15 (Interés simple: interés y tasa de interés)**
El día de hoy obtenemos un préstamo por UM 5,000 y después de un año pagamos UM 5,900. Determinar el interés y la tasa de interés.

**Solución**:
VA = 5,000; n = 1; VF = 5,900; I =? i =?;

[7] ***I*** = 5,900 - 5,000 = UM 900

$$[11]\quad i = \frac{\frac{5{,}900}{5{,}000} - 1}{1} = 0.18$$

**Respuesta:**
El interés es UM 900 y la tasa de interés 18%.

**Ejercicio 16 (Interés simple ordinario y comercial)**
Calcular el interés simple ordinario o comercial y exacto de un préstamo por UM 600 con una tasa de interés del 15% durante un año.

**Solución**: (operamos en base anual)
VA = 600; nCOMERCIAL= 1; nEXACTO (30/365)*12 = 0.9863; i = 0.15; I =?

[8] ***I*** (ORDINARIO) = 600*0.15*1 = UM 90.00
[8] ***I*** (EXACTO) = 600*0.15*0.9863 = UM 88.77

Con el interés simple **ordinario** pagamos mayores cantidades de dinero que con el **exacto**, en casos como éste, de sumas pequeñas, la diferencia es mínima; en montos mayores ésta puede convertirse en fuente de pagos mayores. Por lo general los bancos y empresas de venta al crédito operan aplicando el interés ordinario.

**Ejercicio 17 (Interés y VF a interés simple)**
Determinar los intereses y el capital final producido por UM 10,000 con una tasa del 18% en un año.

**Solución:**
VA = 10,000; i = 0.18; n = 1; I =?

[5] ***I*** **=** 10,000*1*0.18 = UM 1,800
Calculado el importe de los intereses, es posible determinar el importe del capital final:

[7] ***VF*** **=** 10,000 + 1,800 = UM 11,800

**Respuesta:**
Los intereses producidos son UM 1,800 y el capital final UM 11,800.

**Ejercicio 18 (Interés simple, tasa de interés, tasa periódica y tasa global)**
En la fecha obtenemos un préstamo por UM 5,000 para ser pagado después de 3 años a UM 9,800. Deseamos saber: 1º El interés y 2º la tasa de interés periódica y global del préstamo.

**Solución**:
VA = 5,000; VF = 9,800; n = 3; I =?; i =?

1º Encontramos el interés con la fórmula [7]:

[7] **I** = 9,800 - 5,000 = UM 4,800

2º Con la fórmula [11] obtenemos la tasa periódica anual y global del préstamo:

$$[11]\quad \boldsymbol{i} = \frac{\frac{9,800}{5,000}-1}{3}\times 100 = \quad 32\% \text{ tasa anual}$$

Aplicando la fórmula del rédito calculamos la tasa global:

$$[1]\quad \boldsymbol{i} = \left\langle \frac{9,800-5,000}{5,000} \right\rangle = \; 0.96$$

Tasa global del préstamo

**Respuesta:**
El interés es UM 4,800, la tasa anual 32% y la tasa global 96%.

## 1.2. Tasas equivalentes

Generalmente las tasas de interés vienen expresadas en términos anuales; en la realidad no siempre se presentan así, en la mayoría de veces, la acumulación de los intereses al capital inicial es en períodos más pequeños (meses, trimestres, semestres, semanas, días, etc.).
Modificar la frecuencia de cálculo de intereses, ¿significa beneficio o perjuicio? A este respecto, cualquiera sea el número de veces que los intereses son calculados, al final el importe total es el mismo, es decir, los resultados finales de la negociación no varían.
Si cambiamos la frecuencia (m) de cálculo de los intereses debe cambiarse también el importe de la tasa de interés aplicado en cada caso. Es así como surge el concepto de tasas equivalentes, que significa: dos tasas expresadas en distintas unidades de tiempo, son equivalentes cuando aplicadas a un capital inicial durante un período producen el mismo interés o capital final.

**Ejercicio 19 (Tasa equivalentes)**
Calcular el monto resultante de invertir UM 1,000 durante 4 años en las siguientes condiciones:

**Solución:** (m = número de períodos de capitalización)
VA = 1,000; iA...B = 0.15, 0.075 y 0.0125; n = 4; mA...B = 1, 2 y 12; VFA...B =?

**a)** Interés anual del 15%

[5] VFA = 1,000 x (1 + (4 x 0.15) ) = UM 1,600

**b)** Interés semestral del 7.5%

[5] VFB = 1,000 x (1 + 4 x 0.075 x 2) = UM 1,600

**c)** Interés mensual del 1.25%

[5] VFC = 1,000 x (1 + 4 x 0,0125 x 12) = UM 1,600

**Ejercicio 20 (Tasa equivalentes)**
Tipos equivalentes a tasas del 18% anual.

| Base temporal | Calculo | Tasa periódica |
|---|---|---|
| Año | 18/1 | 18.00% |
| Semestre | 18/2 | 9.00% |
| Cuatrimestre | 18/3 | 6.00% |
| Trimestre | 18/4 | 4.50% |
| Mes | 18/12 | 1.50% |
| Día | 18/365 | 0.05% |

El resultado obtenido es independiente del tipo de base temporal tomado. Sí expresamos el interés en base semestral, el plazo irá en semestres, etc.

| Base temporal | Cálculo [1] I = VA*i*n | Interés |
|---|---|---|
| Año | 10,000*0.18*1 | 1,800.00 |
| Semestre | 10,000*0.09*2 | 1,800.00 |
| Cuatrimestre | 10,000*0.06*3 | 1,800.00 |
| Trimestre | 10,000*0.045*4 | 1,800.00 |
| Mes | 10,000*0.015*12 | 1,800.00 |
| Día | 10,000*0.049315*365 | 1,800.00 |

## 1.3. Valor actual de deudas que devengan interés

En los casos de cálculo del importe futuro, es necesario conocer primero el **monto** total de la cantidad a pagar. Cuando calculemos el **valor actual** de **deudas que no devengan interés**, el monto total a pagar es el valor nominal de la deuda. Si por el contrario, buscamos el **valor actual** de **deudas que devengan interés**, el monto total a pagar es igual al valor nominal de la deuda más el interés acumulado.
Visto así, las deudas pueden clasificarse como: a) sin interés; y b) con interés. En el primer caso, el valor futuro (VF) es el valor nominal de la deuda; en el segundo caso, el VF es igual al valor nominal de la deuda más el interés acumulado durante la vigencia de la misma.

**Ejercicio 21 (Pagaré)**
Un empresario entregó su pagaré para pagar UM 5,000 dentro de un año con 8% de interés. A simple vista la cantidad a abonar es:

5,000 + (0.08 * 5,000)= UM 5,400

El valor actual de UM 5,400 es:

$$\frac{5{,}400}{1.08} = \text{UM } 5{,}000$$

Retornamos al inicio, esto es, el valor nominal de la deuda.

Cuando el tipo de interés para obtener el valor actual es diferente al de la deuda, el valor actual será diferente del valor nominal de la deuda. En estos casos, efectuaremos dos operaciones separadas y distintas:

1º. Calcular el VF, la cantidad total al vencimiento, utilizando la fórmula [5]; y
2º. Calculando el VA de esta cantidad VF al tipo designado de interés, por medio de la fórmula [6].

**Ejercicio 22 (VA de un pagaré)**
Un pequeño empresario tiene un pagaré por UM 2,000 con vencimiento a los 90 días, devenga el 6% de interés. Calcular el valor actual a la tasa del 8%.

**Solución**:
VA = 2,000; n = (3/12) 0.25; i = 0.06; VF =?

La solución de este caso es posible hacerlo en dos partes separadas:

1º Calculamos el monto a pagar a los 90 días, con la fórmula [5]:

[5] **VF** = 2,000 (1 + 0.25*0.06] = UM 2,030

Luego, el librador del pagaré pagará al vencimiento la suma de UM 2,030.

2º Calculamos el VA al 8% a pagar dentro de 90 días:

$$[6]\quad \boldsymbol{VA} = \frac{2{,}030}{1.08} = \text{UM } 1{,}880$$

Así, el valor actual al 8% del pagaré por UM 2,000, devenga el 6% de interés y vence a los 90 días es UM 1,880.

**Ejercicio 23 (VA de un pagaré con diferente tasa de interés)**
Calcular el valor actual del mismo pagaré, si el precio del dinero es el 5%.

**Solución**:
VF = 2,030; n = 0.25; i = 0.05; VA =?

$$[6]\quad \boldsymbol{VA} = \frac{2{,}030}{1.08} = \text{UM } 1{,}880$$

Así, el valor actual del pagaré al 5% es UM 1,933.

## 1.4. Descuento

*La tasa de descuento fijada por los bancos centrales por realizar el* **redescuento** *resulta de suma importancia para la economía, pues ellas inciden sobre el conjunto de tasas de descuento y de interés cobradas en un país durante períodos determinados.*

**La tasa de descuento** es la razón del pago por el uso del dinero devuelto al liquidar la operación.
**Descuento,** es el proceso de deducir la tasa de interés a un capital determinado para encontrar el valor presente de ese capital cuando el mismo es pagable a futuro. Del mismo modo, aplicamos la palabra descuento a la cantidad sustraída del valor nominal de la letra de cambio u otra promesa de pago, cuando cobramos la misma antes de su vencimiento. La proporción deducida, o tasa de interés aplicada, es la ***tasa de descuento***.
La operación de descontar forma parte de las actividades normales de los bancos. A estos acuden los clientes a cobrar anticipadamente el monto de las obligaciones de sus acreedores; los bancos entregan dichas cantidades a cambio de retener tasas de descuento, esto forma parte de sus

ingresos. Los bancos comerciales, a su vez, necesitan descontar documentos, en este caso, son tomados por el banco central, tal operación es denominada, redescuento.

### 1.4.1. Descuento Simple

Siendo el descuento un interés, este puede ser simple o compuesto. La persona (prestatario) puede pagar a un prestamista el costo (precio) del préstamo al inicio del período o al final del mismo. En el primer caso este precio recibe el nombre de descuento; en el segundo interés respectivamente.

**Descuento simple,** es la operación financiera que tiene por objeto la representación de un capital futuro por otro equivalente con vencimiento presente, a través de la aplicación de la fórmula del descuento simple. Es un procedimiento inverso al de capitalización.

### 1.4.2. Particularidades de la operación

Los intereses no capitalizan, es decir que:

- Los intereses producidos no son restados del capital inicial para generar (y restar) nuevos intereses en el futuro y,
- Por tanto a la tasa de interés vigente en cada período, los intereses los genera el mismo capital a la tasa vigente en cada período.
- Los procedimientos de descuento tienen un punto de partida que es el valor futuro conocido (VF) cuyo vencimiento quisiéramos adelantar. Es necesario conocer las condiciones de esta anticipación: duración de la operación (tiempo y el capital futuro) y la tasa de interés aplicada.
- El capital resultante de la operación de descuento (valor actual o presente VA) es de cuantía menor, siendo la diferencia entre ambos capitales los intereses que el capital futuro deja de tener por anticipar su vencimiento. Concluyendo diremos, si trasladar un capital presente al futuro implica incrementarle intereses, hacer la operación inversa, anticipar su vencimiento, supondrá la disminución de esa misma cantidad porcentual.

**Nomenclatura:**

| | |
|---|---|
| D | : Descuento o rebaja. |
| DR | : Descuento racional |
| DC | : Descuento comercial |
| VN(VF) | : Valor final o nominal, es el conocido valor futuro |
| VA | : Valor actual, inicial o efectivo. |
| i ó d | : Tasa de interés o descuento |

A partir de éste numeral, los intereses serán “d” si éstos son cobrados por adelantado e “i” si son cobrados a su vencimiento Considerar esta observación al usar las fórmulas para calcular Tasas Equivalentes, tanto en operaciones a interés simple como a interés compuesto.

El valor actual (VA) es inferior al valor futuro (VF) y la diferencia entre ambos es el descuento (D). Cumpliéndose la siguiente expresión:

[14] $D_R = VF - VA$

Como vimos, el descuento, es una disminución de intereses que experimenta un capital futuro como consecuencia de adelantar su vencimiento, es calculado como el interés total de un intervalo de tiempo. Cumpliéndose:

[14A] $DR = VF * n * i$

Dependiendo del capital considerado para el cálculo de los intereses, existen dos modalidades de descuento:

- Descuento racional o matemático
- Descuento comercial o bancario.

Cualquiera sea la modalidad de descuento utilizado, el punto de partida siempre es un valor futuro VF conocido, que debemos representar por un valor actual VA que tiene que ser calculado, para lo cual es importante el ahorro de intereses (descuento) que la operación supone.

### 1.4.3. Descuento racional o matemático

La diferencia entre la cantidad a pagar y su valor actual recibe el nombre de descuento racional o matemático, no es lo mismo que el descuento bancario. Designamos el descuento bancario simplemente con la palabra descuento.
Calculamos el descuento racional, determinando el valor actual de la suma a la tasa indicada y restando este VA de dicha cantidad. El resultado es el descuento racional.
El descuento racional es el interés simple. La incógnita buscada es el valor actual (capital inicial). Es decir, el descuento racional es igual a la cantidad a pagar (VN) menos el valor actual [VA] del capital. Luego:

**I = D,** fórmulas [7] y [8]

### 1.4.4. Descuento comercial

En este tipo de descuento, los intereses son calculados sobre el valor nominal VN empleando un tipo de descuento d. Por esta razón, debemos determinar primero el descuento Dc y posteriormente el valor actual VA o capital inicial.
El capital inicial es obtenido por diferencia entre el capital final (VN) y el descuento (Dc):

[15] $D_c = VN * n * d$ [15A] $VA = VN - D_c$ [16] $VA = VN\,(1 - n * d)$

**Ejercicio 24 (Descuento racional y comercial)**
Deseamos anticipar al día de hoy un capital de UM 5,000 con vencimiento dentro de 2 años a una tasa anual del 15%. Determinar el valor actual y el descuento de la operación financiera

**Solución:**
VN = 5,000; n = 2; i = 0.15; VA =?; DR =?

**Primer tema:**
Asumiendo que el capital sobre el que calculamos los intereses es el capital inicial (descuento racional):

[6] $VA = \frac{5,000}{(1+2*0.15)} =$ UM 3,846.15

[14] **DR** = 5,000 - 3,846 = UM 1,153.85

**Segundo tema:**
Asumiendo que el capital sobre el que calculamos los intereses es el nominal (descuento comercial):

[15] ***DC*** = 5,000*2*0.15 = UM 1,500

[15A] ***VA*** = 5,000 - 1,500 = UM 3,500

o también:

[16] ***VA*** = 5,000(1 - 2*0.15) = UM 3,500

### 1.4.5. Tasa de interés y de descuento equivalentes

Si el tipo de interés (i) utilizado en el descuento racional coincide en número con el tipo de descuento (d) aplicado para el descuento comercial, el resultado no es el mismo porque estamos trabajando sobre capitales diferentes para el cálculo de intereses; razón por la cual el descuento comercial será mayor al descuento racional (DC > DR), como apreciamos en el ejemplo 24.
Para hacer comparaciones, buscar una relación entre tipos de interés y de descuento que nos resulte indiferentes una modalidad u otra; es necesario, encontrar una tasa de descuento equivalente a uno de interés, para lo cual deberá cumplirse la igualdad entre ambas:

DC = DR.

Las fórmulas que nos permiten cumplir con esta condición son:

[17] $d = \dfrac{i}{1+ni}$

Fórmula que nos permite conocer **d** a partir de **i**.

[18] $i = \dfrac{d}{1-nd}$

Fórmula que nos permite conocer **i** a partir de **d**.

Estas fórmulas son de aplicación sólo con tasas periódicas; aquellas tasas utilizadas en determinado período para calcular el interés. La relación de equivalencia entre tasas de interés y descuento, en el interés simple, es una función temporal, esto quiere decir, que una tasa de descuento es equivalente a tantas tasas de interés como valores tome ***n*** de la operación y a la inversa (no hay una relación de equivalencia única entre una i y un d).

**Ejercicio 25 (Calculando la tasa de descuento)**
Si consideramos en el ejemplo 24, que la tasa de interés es del 15% anual.
Calcular la tasa de descuento anual que haga equivalentes ambos tipos de descuento.

Solución:
i = 0.15; d =?

1º Calculamos la tasa de descuento anual equivalente:

[17] $d = \dfrac{0.15}{1+2*0.15} = 0.1154$

2º Luego calculamos el valor actual y el descuento considerando como tasa de interés el 15% (descuento racional):

[6] $VA = \dfrac{5{,}000}{(1+2*0.15)} = \text{ UM } 3{,}846.15$

[14] **DR** = 5,000 - 3,846 = UM 1,153.86

3º Calculamos el valor actual y el descuento considerando la tasa de descuento encontrada del 11.54% (descuento comercial):

[15] ***DC*** = 5,000*2*0.1154 = UM 1,153.86

[15A] ***VA*** = 5,000 - 1,154 = UM 3,846

o también:

[16] ***VA*** = 5,000(1 - 2*0.1154) = UM 3,846

**1.4.6. Equivalencia financiera de capitales**
Cuando disponemos de diversos capitales de importes diferentes, situados en distintos momentos puede resultar conveniente saber cuál de ellos es más atractivo desde el punto de vista financiero. Para definir esto, es necesario compararlos, pero no basta fijarse solamente en los montos, fundamentalmente debemos considerar, el instante donde están ubicados los capitales.
Como vimos, para comparar dos capitales en distintos instantes, hallaremos el equivalente de los mismos en un mismo momento y ahí efectuamos la comparación.
Equivalencia financiera es el proceso de comparar dos o más capitales situados en distintos momentos a una tasa dada, observando si tienen el mismo valor en el momento en que son medidos. Para ello utilizamos las fórmulas de las matemáticas financieras de capitalización o descuento.

## Principio de equivalencia de capitales

*Si el principio de equivalencia se cumple en un momento concreto, no tiene por qué cumplirse en otro (siendo lo normal que no se cumpla en ningún otro momento). Afectando esta condición la fecha en que se haga el estudio comparativo, el mismo, que condicionará el resultado.*

Dos capitales, VA1 y VA2, que vencen en los momentos n1 y n2 respectivamente, son equivalentes cuando, comparados en un mismo momento n, tienen igual valor. Este principio es de aplicación cualquiera sea el número de capitales que intervengan en la operación. Si dos o más capitales son equivalentes resultará indiferente cualquiera de ellos, no existiendo preferencia por ninguno en particular. Contrariamente, si no se cumple la equivalencia habrá uno sobre el que tendremos preferencia que nos llevará a elegirlo.

**Aplicaciones del principio de equivalencia**

El canje de uno o varios capitales por otro u otros de vencimiento y/o valores diferentes a los anteriores, sólo puede llevarse a cabo si financieramente resultan ambas alternativas equivalentes.

Para determinar si dos alternativas son financieramente equivalentes tendremos que valorar en un mismo momento y precisar que posean iguales montos. Al momento de la valoración se le conoce como **época** o **fecha focal** o simplemente como fecha de análisis. Para todo esto el acreedor y el deudor deberán estar de acuerdo en las siguientes condiciones fundamentales:

- Momento a partir del cual calculamos los vencimientos.
- Momento en el cual realizamos la equivalencia, sabiendo que al cambiar este dato varía el resultado del problema.
- Tasa de valoración de la operación.
- Establecer si utilizamos la capitalización o el descuento.

Ocurrencias probables:
- Cálculo del capital común.
- Cálculo del vencimiento común.
- Cálculo del vencimiento medio.

**Cálculo del capital común**

Es el valor C de un capital único que vence en el momento n, conocido y que sustituye a varios capitales C1, C2, ..., Cn, con vencimientos en n1, n2, ... , nn, respectivamente, todos ellos conocidos en cuantías y tiempos.

Para calcularlo debemos valorarlos en un mismo momento a la tasa acordada, por una parte, los capitales iniciales y, por otra, el capital único desconocido que los va a sustituir.

**Ejercicio 26 (Cálculo del capital común - Capitalización simple)**

Un empresario tiene cuatro obligaciones pendientes de UM 1,000, 3,000, 3,800 y 4,600 con vencimiento a los 3, 6, 8 y 11 meses respectivamente. Para pagar estas deudas propone canjear las cuatro obligaciones en una sola armada dentro de 10 meses. Determinar el monto que tendría que abonar si la tasa de interés simple fuera de 15% anual.

Solución:

(10 - 3 = 7), (10 - 6 = 4), (10 - 8 = 2) y (11 - 10 = 1); i = 0.15/12 = 0.0125

VA = 1,000, 3,000 y 3,800; VF = 4,600; n = 7, 4, 2, 1; i = 0.0125; VF10 =?

Calculamos con la fecha focal en 10 meses, para ello aplicamos en forma combinada las fórmulas [5] de capitalización y [6] de actualización:

$$1{,}000(1+7\times 0.0125)+3{,}000(1+4\times 0.0125)+3{,}800(1+2\times 0.0125)+\frac{4{,}600}{(1+1\times 0.0125)}=\boldsymbol{VF}_{10}$$

$$1{,}088+3{,}150+3{,}895+4{,}543=\boldsymbol{VF}_{10}$$

$\boldsymbol{VF}10 = 12{,}676$

**Respuesta:**
El monto a pagar por las cuatro obligaciones dentro de 10 meses es UM 12,676.

**Cálculo del vencimiento común**
Es el instante n en que vence un capital único C conocido, que suple a varios capitales C1, C2, ..., Cn, con vencimientos en n1, n2 ... nn, todos ellos conocidos en valores y tiempos.
La condición a cumplir es:
Para determinar este vencimiento procedemos de la misma forma que en el caso del capital común, siendo ahora la incógnita el momento donde se sitúa ese capital único.

**Ejercicio 27 (Vencimiento común - Interés simple)**
Un empresario tiene cuatro obligaciones pendientes de UM 1,000, 3,000, 3,800 y 4,600 con vencimiento a los 3, 6, 8 y 11 meses respectivamente. De acuerdo con el acreedor deciden hoy sustituir las cuatro obligaciones por una sola de UM 14,000. Determinar el momento del abono con una tasa de interés simple de 15% anual. La fecha de análisis es el momento cero.

**Solución:**
VF1...4 = 1,000, 3,000, 3,800 y 4,600; n1 ... 4 = 3, 6, 8 y 11; n =?

1º Hacemos la equivalencia en el momento cero, aplicando sucesivamente la fórmula [6] de actualización:

$$[6] \quad \frac{1,000}{(1+3\times0.0125)}+\frac{3,000}{(1+6\times0.0125)}+\frac{3,800}{(1+8\times0.0125)}+\frac{4,600}{(1+11\times0.0125)}=\frac{14,000}{(1+\boldsymbol{n}\times0.0125)}$$

$$12,274=\frac{14,000}{\langle 1+n\times0.0125\rangle} \qquad \boldsymbol{n}=\frac{\left\langle\frac{14,000}{12,274}-1\right\rangle}{0.0125}= \ 11.25 \text{ meses}$$

2º Otra forma de solución es actualizar los valores futuros a la tasa y momentos conocidos, sumarlos y con este valor actual total aplicar la fórmula (13) y obtendremos el momento buscado.

VFT = 14,000; i = 0.0125; VAT =?; n =?

$$[6] \quad VA_T=\frac{1,000}{(1+3\times0.0125)}+\frac{3,000}{(1+6\times0.0125)}+\frac{3,800}{(1+8\times0.0125)}+\frac{4,600}{(1+11\times0.0125)}= \ 12,274$$

$$[13] \quad \boldsymbol{n}=\frac{\frac{14,000}{12,274}-1}{0.0125}= \ 11.25 \Rightarrow 0.25*30=7.5 \text{ días}$$

**Respuesta:**
El momento de pago de las cuatros obligaciones en un solo monto es a 11 meses con 8 días.

**Cálculo del vencimiento medio**
Es el instante n en que vence un capital único C, conocido, que suple a varios capitales C1, C2, ..., Cn, con vencimientos en n1, n2, ... ,nn, todos ellos conocidos.

La condición a cumplir es: $C=C_1+C_2+...+C_n$

El cálculo es semejante al vencimiento común, lo único que varía es el valor del capital único que suple al conjunto de capitales iniciales, que ahora debe ser igual a la suma aritmética de los montos a los que reemplaza.
El vencimiento es una media aritmética de los vencimientos de los capitales iniciales, siendo el importe de dichos capitales los factores de ponderación.

**Ejercicio 28 (Vencimiento medio - Interés simple)**
Un empresario tiene cuatro obligaciones pendientes de UM 1,000, 3,000, 3,800 y 4,600 con vencimiento a los 3, 6, 8 y 11 meses respectivamente. De acuerdo con el acreedor deciden hoy

sustituir las cuatro obligaciones por una sola. Determinar el monto y el momento de pago si la tasa de interés simple fuera de 15% anual. La fecha de análisis es el momento cero.

**Solución:**
VF1...3 = 1,000, 3,000, 3,800 y 4,600; n1 ... 3 = 3, 6, 8 y 11; n0 =?

1º Calculamos la media aritmética de los vencimientos de los capitales:

$$\boldsymbol{n} = \frac{(1{,}000\times3)+(3{,}000\times6)+(3{,}800\times8)+(4{,}600\times11)}{1{,}000+3{,}000+3{,}800+4{,}600} = 8.23 \text{ meses}$$

0.23*30 = 6.9 días

2º Calculamos el valor actual de los capitales, actualizándolos al instante cero:

$$[6] \quad \boldsymbol{VA}_0 = \frac{1{,}000}{(1+3\times0.0125)} + \frac{3{,}000}{(1+6\times0.0125)} + \frac{3{,}800}{(1+8\times0.0125)} + \frac{4{,}600}{(1+11\times0.0125)} = 11{,}253.05$$

3º Calculamos el monto total a pagar en 8.23 meses, aplicando la fórmula [5]:

VA = 11,253.05; n = 8.23; i = 0.0125; VF =?

$$[5] \quad \boldsymbol{VF}_T = 11{,}253.05*((1+(8.23*0.0125)) = \text{UM } 12{,}410.71$$

8 meses, 0.23*30 = 7 días

**Respuesta:**
El monto y momento de pago de las cuatros obligaciones en un solo monto es UM 12,410.71 en 8 meses y 7 días.

### 1.4.7. El descuento bancario

Es un procedimiento financiero que consiste en la presentación de un título de crédito en una entidad financiera para que ésta anticipe su monto y efectué el cobro de la obligación. El tenedor cede el título al banco y éste le abona su importe en dinero, descontando los gastos por los servicios prestados.

**Clasificación**
Según el título de crédito presentado a descuento, distinguimos:
Descuento bancario. Cuando el título es una letra de cambio.
Descuento comercial. Cuando las letras proceden de una venta o de una prestación de servicios que constituyen la actividad habitual del cedente.
Descuento financiero. Cuando las letras son la instrumentalización de un préstamo concedido por el banco a su cliente.
Descuento no cambiario. Cuando tratamos con cualquier otro derecho de cobro (pagarés, certificaciones de obra, facturas, recibos, etc.).

### 1.4.8. Valoración financiera del descuento

El efectivo líquido, es la cantidad anticipada por el banco al cliente, el mismo que calculamos restando del importe de la letra (valor nominal) los gastos originados por la operación de descuento, compuesto por intereses, comisiones y otros gastos.
Intereses.- Cantidad cobrada por la anticipación del importe de la letra. Calculada en función del valor nominal descontado, por el tiempo que anticipa su vencimiento y el tipo de interés aplicado por la entidad financiera.
Comisiones.- Llamado también quebranto o daño, es la cantidad cobrada por el banco por la cobranza de la letra.
Obtenida tomando la mayor de las siguientes cantidades:
- Un porcentaje sobre el nominal.
- Una cantidad fija (mínimo).

Otros gastos.- Son los denominados suplidos, pueden incluir los portes y el correo, según la tarifa postal.

**Ejercicio 29 (Descuento de una letra)**
Debemos descontar una letra de UM 10,000 faltando 60 días para su vencimiento, la tasa de descuento anual es del 48%, la comisión de cobranza es el 3.8% y otros gastos UM 4.00. Determinar el importe efectivo recibido por el cliente:

i = 0.48/12 = 0.04; n = 60/30 = 2

| | | |
|---|---|---|
| Valor Nominal de la letra | | 10,000 |
| Intereses [10,000*0.04*2)] | 800 | |
| Comisiones [10,000*0.035) | 380 | |
| Otros gastos | 4 | |
| Total Gastos | | 1,184 |
| Efectivo recibido | | 8,816 |

### 1.4.9. Descuento de deudas que devengan interés
Para descontar pagarés o documentos que devengan interés es necesario calcular primero el monto nominal, es decir, el valor nominal más el interés y descontar después la suma. Este tipo de cálculo es recomendado, incluso cuando el tipo de descuento es igual a la tasa de interés.

**Ejercicio 30 (Descontando un pagaré)**
El Banco descontó el 5 de Mayo del 2004 un pagaré por UM 10,000 que tenía esta misma fecha. Devengaba el 6% de interés y vencía el 5 de junio del mismo año. Si el tipo de descuento del Banco es también del 6% mensual, ¿cuál es el descuento retenido por el Banco?

**Solución**:
1º Aplicando Excel calculamos la fecha exacta de la operación financiera:

| F. VENCIMIENTO | F. INICIO | DIAS |
|---|---|---|
| 05/06/2004 | 05/05/2004 | 31 |

VA = 10,000; n = 1; i = 0.06; VF =?

[5] **VF** = 10,000[1+(0.06*1)] = UM 10,600

2º Calculamos el descuento, VF = VN:

VN = 10,600; n = 1; d = 0.06; DC =?

[15] **DC** = 10,600*1*0.06 = UM 636.00

**Respuesta:**
Luego el descuento sobre este pagaré es UM 636.00

**Ejercicio 31 (Valor líquido de un pagaré)**
Calcular el valor líquido de un pagaré de UM 3,800, que devenga el 6% de interés mensual y vence a los 90 días, si el tipo de descuento es de 7.5% también mensual.

**Solución**:
1º Calculamos el monto a pagar dentro de 3 meses:

VA = 3,800; n = (90/30) = 3; i = 0.06; VF =?
[5] ***VF*** **=** 3,800*(1 + (3*0.06)) = UM 4,484.00

2º Descontamos este monto al 7.5%:

VN = 4,484;   n = 3;    d = 0.075;    VA =?

[16]  ***VA*** = 4,484*(1 - (3*0.075)) = UM  3,475.10

**Respuesta:**
El valor líquido del pagaré es UM 3,475.10

En la práctica financiera, obtenemos el valor líquido descontando por el número efectivo de días en el período de tres meses.

**Ejercicio 32 (Calculando la fecha de vencimiento de un pagaré)**
Un empresario tiene un pagaré de UM 4,500 que no devenga interés y vence el 20 de diciembre. Negocia con su banco el descuento al 6% mensual. Calcular la fecha a partir de la cual el valor líquido del pagaré no será inferior a UM 4,350.

**Solución**:
VF = 4,500;   VA = 4,350;   d = 0.06;   n = t/360;    t =?;     VF =?

[16] $\boldsymbol{VA} = \boldsymbol{VN}\,(1 - \boldsymbol{n} * \boldsymbol{d})$

Reemplazando n por t/360, obtenemos:

[16] $$\boldsymbol{VA} = \boldsymbol{VF} * \left\langle 1 - \frac{t}{360} * \boldsymbol{d} \right\rangle \longrightarrow \boldsymbol{VA} = \boldsymbol{VF} - \frac{t}{360}\boldsymbol{d} * \boldsymbol{VF} \longrightarrow \frac{t}{360}\boldsymbol{d} * \boldsymbol{VF} = \boldsymbol{VF} - \boldsymbol{VA}$$

$\frac{t}{360} = \frac{\boldsymbol{VF} - \boldsymbol{VA}}{\boldsymbol{d} * \boldsymbol{V} * \boldsymbol{F}}$ multiplicando por 360

$\boldsymbol{t} = \frac{360(\text{VF-VA})}{\text{d} * \text{VF}}$, sustituyendo valores:

$\boldsymbol{t} = \frac{360(4{,}500\text{-}4{,}350)}{0.06 * 4{,}500} = 200$

Es decir, si el empresario descuenta el pagaré 200 días antes del vencimiento recibirá por lo menos UM 4,350. La fecha es el 20 de julio, fecha buscada.

30 - 20 de dic. = 10 días
(200 + 10) = 210/30 = 7 meses

**Ejercicio 33 (Tipo de descuento de un pagaré)**
Un pagaré de UM 2,800, no devenga interés con vencimiento a los 5 meses, descontado en el Banco. El valor líquido ascendía a UM 2,680. Calcular el tipo de descuento utilizado.

**Solución**:
VA = 2,680;   VN = 2,800;   n = (5/12) = 0.4166;   d =?

1º Calculamos el tipo de interés de la operación financiera:

[11] $\boldsymbol{i} = \frac{\frac{2{,}800}{2{,}680} - 1}{0.4167} = 0.1075$

2º Determinamos la tasa de descuento utilizada:

[17] $\boldsymbol{d} = \frac{0.1075}{1 + 0.4166 * 0.1075} = 0.1029$

**Respuesta:**
El tipo de descuento fue de 10.29%.

**Ejercicio 34 (Tasa equivalente al tipo de descuento dado)**
El Gerente de una compañía presenta al Banco para descuento, un pagaré de UM 2,500, sin interés, con vencimiento dentro de 90 días. El tipo de descuento del Banco es el 48% anual con capitalización trimestral. ¿Qué tasa de interés cobra el banco? En otras palabras, ¿qué tasa de interés es equivalente al tipo de descuento dado?

**Solución**:
1º Calculamos la tasa periódica trimestral que cobra el banco:
0.48/4 = 0.12 trimestral
2º Calculamos la cantidad cobrada por el banco por concepto de descuento:

VN = 2,500; d = 0.12; n = 1; DC = ?

[15] **DC** = 2,500*1*0.12 = UM 300

3º Calculamos el valor líquido del pagaré:

VN = 2,500; DC = 300; VA =?

[15A] **VA** = 2,500 - 300 = UM 2,200

4º Calculamos la tasa de interés equivalente al descuento de 12% trimestral:

d = 0.12; n = 1; i =?

[18] $\boldsymbol{i} = \frac{0.12}{1-1*0.12} = 0.1364$

Descuento: 0.1364*4*100 = 54.56% equivalente al 48% anual

5º Calculamos el valor actual y el descuento considerando como tasa de interés el 0.13636 trimestral aplicando el descuento racional, para compararlo con el descuento comercial calculado:

[6] $\boldsymbol{VA} = \frac{2,500}{(1+1*0.13636)} = \text{ UM } 2,200$

[14] **DR** = 2,500 - 2,200 = UM 300

En ambos casos los resultados son idénticos, con lo que queda demostrada la equivalencia de la tasa con el descuento.

**Respuesta**:
La tasa de interés equivalente al descuento de 12% es 13.64% trimestral, tasa que nos proporciona el mismo descuento comercial y racional.

**Ejercicio 35 (Tipo de descuento equivalente a la tasa dada)**
El señor Rojas presenta en su Banco un pagaré por UM 4,000, que devenga el 5% de interés semestral con vencimiento dentro de 6 meses. Calcular el tipo de descuento que debe cargar el Banco para que el dinero recibido como descuento sea igual al interés sobre el pagaré y el señor Rojas reciba UM 4,000 como valor líquido. ¿Qué tipo de descuento es equivalente a la tasa de interés del 5% semestral?

Solución:
1º Calculamos el descuento equivalente a la tasa del 5% semestral:

i = 0.05; n = 1; i =?

[17] $\boldsymbol{d} = \dfrac{0.05}{1+1*0.05} = 0.0476$

2º Calculamos el descuento bancario:

[15] **DC** = 4,000*1*0.0476 = UM 190.40

Despejando VN en [15A] **VN** = 4,000 + 190.40 = UM 4,190.40

Luego el señor Rojas recibirá como valor líquido:

VN = 4,190.40; DC = 190.40; VA =?

[15] **VA** = 4,190.40 - 190.40 = UM 4,000

**Respuesta:**
El tipo de descuento equivalente al 5% semestral es 4.76%.

**Ejercicio 36 (De aplicación)**
Una Caja Rural de Ahorro y Crédito presta UM 8,000 por ocho meses al 52% anual. Determinar a qué tipo de descuento equivale esta tasa de interés.

**Solución:**
1º Calculamos la tasa periódica: 0.52/12 = 0.0433 mensual

i = 0.0433; n = 8; d =?

[17] $\boldsymbol{d} = \dfrac{0.0433}{1+8*0.0433} = 0.0322$

**j =** 0.0322*12 = 0.3864

**Respuesta:**
La tasa del 52% anual equivale a la tasa de descuento del 38.64% anual.

## 2. Interés Compuesto

*El concepto y la fórmula general del interés compuesto es una potente herramienta en el análisis y evaluación financiera de los movimientos de dinero.*

El interés compuesto es fundamental para entender las matemáticas financieras. Con la aplicación del interés compuesto obtenemos intereses sobre intereses, esto es la **capitalización del dinero en el tiempo**. Calculamos el monto del interés sobre la base inicial más todos los intereses acumulados en períodos anteriores; es decir, los intereses recibidos son reinvertidos y pasan a convertirse en nuevo capital.
Llamamos monto de capital a interés compuesto o monto compuesto a la suma del capital inicial con sus intereses. La diferencia entre el monto compuesto y el capital original es el interés compuesto.
El intervalo al final del cual capitalizamos el interés recibe el nombre de período de capitalización.
La frecuencia de capitalización es el número de veces por año en que el interés pasa a convertirse en capital, por acumulación.
Tres conceptos son importantes cuando tratamos con interés compuesto:

1º. El capital original (*P o VA*)
2º. La tasa de interés por período (*i*)
3º. El número de períodos de conversión durante el plazo que dura la transacción (*n*).

**Por ejemplo:**
Sí invertimos una cantidad durante 5½ años al 8% convertible semestralmente, obtenemos:

El período de conversión es : 6 meses

La frecuencia de conversión será : 2 (un año tiene 2 semestres)

$$\frac{\textit{tasa de interés}}{\textit{frecuencia de conversión}} = \frac{0.08}{2} = 0.04$$

Entonces el número de períodos de conversión es:

(*número de años*)*(*frecuencia de conversión*) = 5½ x 2 = 11

**Fórmulas del Interés Compuesto:**
La fórmula general del interés compuesto es sencilla de obtener:
VA0,
VA1 = VA0 + VA0i = VA0 (1+i),
VA2 = VA0 (1+i) (1+i) = VA0 (1+i)2
VA3 = VA0 (1+i) (1+i) (1+i) = VA0 (1+i)3

Generalizando para **n** períodos de composición, tenemos la fórmula general del interés compuesto:
[19] $\boldsymbol{VF} = \boldsymbol{VA(1+i)^n}$

Fórmula para el cálculo del monto (capital final) a interés compuesto. Para ***n*** años, transforma el valor actual en valor futuro.


El factor (1 + *i*)n es conocido como Factor de Acumulación o Factor Simple de Capitalización (FSC), al cual nos referiremos como el factor ***VF/VA*** (encontrar ***VF*** dado ***VA***). Cuando el factor es multiplicado por VA, obtendremos el valor futuro VF de la inversión inicial VA después de ***n*** años, a la tasa ***i*** de interés.
Tanto la fórmula del interés simple como la del compuesto, proporcionan idéntico resultado para el valor n = 1.

VF = VA(1+ni) = VF = VA(1+i)n
VA(1+1i) = VA(1+i)1
VA(1+i) = VA(1+i)

Si llamamos **I** al interés total percibido, obtenemos:

**I = VF - VA** luego I = VF - VA = VA(1+i)n - VA

Simplificando obtenemos la fórmula de capitalización compuesta para calcular los intereses:

[20] $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{VA}\left\langle (1+\boldsymbol{i})^n - 1 \right\rangle$

Con esta fórmula obtenemos el interés (I) compuesto, cuando conocemos VA, i y n.

**Ejercicio 37 (Calculando el interés y el VF compuestos)**
Determinar los intereses y el capital final producido por UM 50,000 al 15% de interés durante 1 año.

**Solución:**
VA = 50,000; i = 0.15; n = 1; I =?; VF =?

Calculamos el interés y el VF:

[20] $\boldsymbol{I} = 50{,}000\left\langle(1+0.15)^{1}-1\right\rangle = \text{ UM } 7{,}500$

(19) VF = 50,000*(1+0.15) = UM 57,500

Para el cálculo de I podemos también aplicar la fórmula (7):

[7] **I =** 57,500 - 50,000 = UM 7,500

**Respuesta:**
El interés compuesto es UM 7,500 y el monto acumulado

## 2.1. Valor actual a interés compuesto

*La fórmula general del interés compuesto permite calcular el equivalente de un capital en un momento posterior.*

Dijimos en el numeral 1.1, pág. 101, de éste Capítulo, la longitud de la escalera es la misma contada de abajo hacia arriba como de arriba abajo. En el interés compuesto cuanto más arriba miramos, más alto es cada escalón sucesivo y si nos paramos arriba y miramos hacia abajo, esto es, hacia el valor actual, cada sucesivo escalón es algo más bajo que el anterior.

De la ecuación [19] obtenemos la fórmula del valor actual a interés compuesto:

[21] $\boldsymbol{VA} = \dfrac{\boldsymbol{VF}}{(1+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}}}$

También expresamos como: $\boldsymbol{VA} = \boldsymbol{VF}(1+\boldsymbol{i})^{-\boldsymbol{n}}$

Conocemos a la expresión entre corchetes como el Factor Simple de Actualización (FSA) o el factor ***VA/VF***. Permite determinar el VA (capital inicial) de la cantidad futura VF dada, después de ***n*** períodos de composición a la tasa de interés ***i***.
La expresión ***valor futuro*** significa el valor de un pago futuro en fecha determinada antes del vencimiento. Cuanto menos tiempo falta para el vencimiento, mayor es el valor actual del monto adeudado, y, en la fecha del vencimiento, el valor actual es equivalente al monto por pagar. Para comprobar uno cualquiera de esos valores actuales, basta hallar si a la tasa indicada, en el tiempo expuesto, el valor actual es la cantidad adeudada.
De la ecuación [19] obtenemos también, las fórmulas [22] y [23] para determinar los valores de ***i*** (dado VA, VF y n) y ***n*** (dado VA, VF e i).

[22] $\boldsymbol{i} = \sqrt[\boldsymbol{n}]{\dfrac{\boldsymbol{VF}}{\boldsymbol{VA}}} - 1$ [23] $\boldsymbol{n} = \dfrac{\boldsymbol{log}\dfrac{\boldsymbol{VF}}{\boldsymbol{VA}}}{\boldsymbol{log}(1+\boldsymbol{i})}$

Con la fórmula [22] obtenemos la tasa del período de capitalización. Con la fórmula [23] calculamos la duración de la operación financiera.
En este caso, no da lo mismo adecuar la tasa al tiempo o adecuar el tiempo a la tasa. Tanto el tiempo como la tasa de interés deben adecuarse al período de capitalización. Si el tiempo está en meses, la tasa debe ser mensual; si el tiempo está en bimestres, la tasa debe ser bimestral.

**Ejercicio 38 (VA a interés compuesto)**
Tenemos una obligación por UM 12,000, a ser liquidado dentro de 10 años. ¿Cuánto invertiremos hoy al 9% anual, con el objeto de poder cumplir con el pago de la deuda?

**Solución:**
VF = 12,000; i = 0.9; n = 10; VA =?

[21] $\boldsymbol{VA} = \dfrac{12{,}000}{(1+0.09)^{10}} = \text{ UM } 5{,}068.93$

**Sintaxis**

**VA**(**tasa**;**nper**;**pago**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VF | Tipo | VA |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.09 | 10 | | -12,000 | | 5,068.93 |

**Respuesta:**
El monto a invertir hoy es UM 5,068.93.

## 2.2. Valor actual de deuda que devenga interés

Como en el interés simple, en el caso de deudas que devengan interés, antes de calcular su valor actual, debemos averiguar primero el monto nominal, esto es, la cantidad de dinero (capital más interés) de la deuda a su vencimiento. Calculado el monto nominal es más sencillo determinar el valor actual a cualquier tasa de interés.
**Para calcular el valor actual de deudas que devengan interés compuesto** calculamos primero el monto de la deuda al vencimiento, esto es, el monto nominal; luego, procedemos a calcular el valor actual del monto nominal aplicando el método expuesto líneas arriba.

**Ejercicio 39 (VA de deuda que devenga interés compuesto)**
Una empresa en proceso de liquidación, tiene en activos obligaciones a 4 años por UM 42,000, devengan el 12% capitalizando anualmente. Calcular el valor actual al 15%, con capitalización anual.

**Solución:** Según la regla expuesta:

1º Calculamos el monto (VF) del activo a su vencimiento:
VA = 42,000; i = 0.12; n = 4; VF =?

[19] **VF** = 42,000(1 + 0.12)4 = UM 66,087.81

**Sintaxis**

**VF**(**tasa**;**nper**;**pago**;va;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VA | Tipo | VF |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.12 | 4 | | -42,000 | | 66,087.81 |

2º Calculamos el VA al 15% de UM 66,087.81 a pagar dentro de 4 años:
VF = 66,087.81; i = 0.15; n = 4; VA =?

[21] $\boldsymbol{VA} = \frac{66{,}087.81}{(1+0.15)^4} = \text{ UM } 37{,}785.92$

**Sintaxis**

**VA**(**tasa**;**nper**;**pago**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VF | Tipo | VA |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.15 | 4 | | -66,087.81 | | 37,785.92 |

**Respuesta:**
El VA con capitalización anual es UM 37,785.92

## 2.3. Interés simple versus interés compuesto

El monto (VF) que obtenemos con el interés simple aumenta linealmente (progresión aritmética); mientras que en las operaciones con interés compuesto, la evolución es exponencial (progresión geométrica), como consecuencia de que los intereses generan nuevos intereses en períodos siguientes.
Generalmente utilizamos el interés simple en operaciones a corto plazo menor de 1 año, el interés compuesto en operaciones a corto y largo plazo.
Vamos a analizar en qué medida la aplicación de uno u otro en el cálculo de los intereses dan resultados menores, iguales o mayores y para ello distinguiremos tres momentos:

**a) Períodos inferiores a la unidad de referencia**
En estos casos (para nosotros un año), los intereses calculados con el interés simple son mayores a los calculados con el interés compuesto.

**Ejercicio 40 (Interés simple y compuesto con períodos menores a la unidad)**
Determinar los intereses devengados por un capital de UM 30,000, durante 5 meses, al 15% de interés anual.
Como la tasa de interés está en base anual, el tiempo lo expresamos también en base anual: 5/12 = 0.4167
Igualmente, podríamos expresar la tasa de interés en base mensual, dividiendo simplemente: 0.15/12 = 0.0125 con n = 5.

**Solución:**
VA = 30,000; n = 0.4167; i = 0.15; I =?

**a.1.) Interés simple**

[8] $\mathbf{I} = 30{,}000*0.15*0.4166 =$ UM 1,875.15

**a.2.) Interés compuesto:**

[20] $\boldsymbol{I} = 30{,}000\left\langle\left\langle(1+0.15)^{0.4166}\right\rangle-1\right\rangle =$ UM 1,799.04

Luego, el interés calculado aplicando la fórmula del interés simple es superior al calculado con la fórmula del interés compuesto.

**b) Períodos iguales a un año**
En estos casos, ambas formulas dan resultados idénticos.

**Ejercicio 41 (Interés simple y compuesto con períodos iguales a un año)**
Determinar los intereses devengados por un capital de UM 30,000, durante un año, con el 12% de interés anual.

**Solución:**
VA = 30,000; n = 1; i = 0.12; I =?

**a.1.) Interés simple:**
[5] $\mathbf{I} = 30{,}000*0.12*1 =$ UM 3,600

**a.2.) Interés compuesto:**
[20] $\boldsymbol{I} = 30{,}000\left\langle\left\langle(1+0.12)^{1}\right\rangle-1\right\rangle =$ UM 3,600

Como vemos ambas fórmulas proporcionan resultados iguales.

**c) Períodos superiores a un año**
En estos casos, los intereses calculados con la fórmula del interés compuesto son superiores a los calculados con la fórmula del interés simple.

**Ejercicio 42 (Interés simple y compuesto con períodos superiores a un año)**
Determinar los intereses devengados por un capital de UM 30,000, durante dos años, con el 12% de interés anual.
**Solución:**
VA = 30,000; n = 2; i = 0.12; I =?

a.1.) Interés simple:
[5] $\mathbf{I} = 30{,}000*0.12*2 =$ UM 7,200

**a.2.) Interés compuesto:**

[20] $\boldsymbol{I} = 30{,}000\left\langle\left\langle(1+0.12)^{2}\right\rangle - 1\right\rangle = \text{ UM } 7{,}632$

Luego cumplimos con la condición (c).

## 2.4. Tasas equivalentes

La definición de tasas de interés equivalentes es la misma que la del interés simple. No obstante, la relación de proporcionalidad que se da en el interés simple no es válida en el interés compuesto, como es obvio, el cálculo de intereses se hace sobre una base cada vez mayor.

**Ejercicio 43 (Valor acumulado de una inversión)**
Calcular el valor acumulado de una inversión de UM 5,000 durante un año, en las siguientes condiciones:

**Solución:**
VA = 5,000; n = 1 ... 4; i = 0.15 anual, 0.075 semestral y 0.0375 trimestral

Con interés anual del 15%:
[19] VFn = 5,000(1 + 0.15)1 = UM 5,750.00

Con interés semestral del 7.5%:
[19] VFn = 5,000(1 + 0.075)2 = UM 5,778.13

Con interés trimestral del 3.75%:
[19] VFn = 5,000(1 + 0.0375)4 = UM 5,793.25

Los resultados no son los mismos, debido a que la capitalización de los intereses lo hacemos con diferentes frecuencias manteniendo la proporcionalidad en las diferentes tasas de interés.
Para lograr que, cualquiera que sea la frecuencia de capitalización y el valor final siga siendo el mismo es necesario cambiar la fórmula de equivalencia de las tasas de interés.
El pago de los intereses es al vencimiento o por anticipado. El interés nominal, por lo general condiciona la especificación de su forma de pago en el año. Para determinar a qué tasa de interés vencida (***iv***) equivalen unos intereses pagados por anticipado (***ia***) debemos tomar en cuenta que los mismos deben reinvertirse y éstos a su vez generarán intereses pagaderos por anticipado.
**Interés anticipado (ia)**, como su nombre lo indica, es liquidado al comienzo del período (momento en el que recibimos o entregamos dinero).
**Interés vencido (iv)**, contrariamente al anterior, es liquidado al final del período (momento en el que recibimos o entregamos dinero).
Muchas negociaciones son establecidas en términos de interés anticipado y es deseable conocer cuál es el equivalente en tasas de interés vencido. Ejercicios corrientes, lo constituyen los préstamos bancarios y los certificados de depósito a término.
Cuando especificamos el pago de interés anticipado (***ia***), estamos aceptando (en el caso préstamos) recibir un monto menor al solicitado.

Fórmulas de la tasa de interés vencida y anticipada:

[A] $\boldsymbol{iv} = \dfrac{\boldsymbol{ia}}{1 - \boldsymbol{ia}}$ [B] $\boldsymbol{ia} = \dfrac{\boldsymbol{iv}}{1 + \boldsymbol{iv}}$

Con la fórmula [A] podemos convertir cualquier tasa de interés anticipada, en tasa de interés vencida. Esta fórmula es utilizada sólo para tasas periódicas; tasas utilizadas en determinado período para calcular el interés.

**Ejercicio 44 (Calculando la tasa vencida)**
La tasa de interés anticipada de 9% trimestral equivale a:

**Solución**:
ia = 0.09; iv =?

[A] $\boldsymbol{iv} = \frac{0.09}{1\text{-}0.09} = 0.09889$

Para utilizar esta conversión debemos trabajar con la tasa correspondiente a un período. Por ejemplo, la tasa de interés de 9% anticipada aplicable a un trimestre.

**Ejercicio 45 (Tasa vencida)**
Si la tasa de interés anual es 28%, con liquidación trimestral por anticipado (la cuarta parte es cobrada cada trimestre) ¿a cuánto equivale ese interés trimestral vencido?
Tasa de interés trimestral anticipada = 0.28/4 = 0.07
Tasa de interés trimestral vencida:

[A] $\boldsymbol{iv} = \frac{0.07}{1\text{-}0.07} = 0.0753$

**Ejercicio 46 (Tasa anticipada)**
Si el banco dice cobrar la tasa de interés de 32% anual, liquidado cada mes, vencido, ¿a qué tasa de interés mes anticipado corresponde ese interés?

El interés mensual vencido es : 0.30/12= 0.025

El interés mensual anticipado es :

[B] $\boldsymbol{ia} = \frac{0.025}{1+0.025} = 0.0244$

Luego, el interés nominal mes anticipado es: 2.44% * 12 = 29.27%

## 2.5. Descuento Compuesto
Denominada así la operación financiera que tiene por objeto el cambio de un capital futuro por otro equivalente con vencimiento presente, mediante la aplicación de la fórmula de descuento compuesto. Es la inversa de la capitalización.

### 2.5.1. Particularidades de la operación
Los intereses capitalizan, esto significa que:

- Al generarse se restan del capital inicial para producir (y restar) nuevos intereses en el futuro,
- Los intereses de cualquier período los produce éste capital (anterior), a la tasa de interés vigente en dicho momento.

Los procedimientos de descuento tienen un punto de partida que es el valor futuro conocido (VF) cuyo vencimiento quisiéramos adelantar. Es necesario conocer las condiciones de esta anticipación: duración de la operación (tiempo y el capital futuro) y la tasa de interés aplicada.
El capital resultante de la operación de descuento (valor actual o presente VA) es de cuantía menor, siendo la diferencia entre ambos capitales los intereses que el capital futuro deja de tener por anticipar su vencimiento. Concluyendo diremos, si trasladar un capital presente al futuro implica incrementarle intereses, hacer la operación inversa, anticipar su vencimiento, supondrá la disminución de esa misma cantidad porcentual.
En forma similar al interés simple, se distinguen dos clases de descuento racional y comercial, según la cuál sea el capital considerado en el cálculo de los intereses en la operación:
- Descuento racional.
- Descuento comercial.

Nomenclatura:
D : Descuento o rebaja.
DR : Descuento racional

DC : Descuento comercial
VN(VF) : Valor final o nominal, es el conocido valor futuro
VA : Valor actual, inicial o efectivo.
i ó d : tasa de interés o descuento de la operación

2.5.2. Descuento racional
En este tipo de descuento los intereses son calculados sobre el capital inicial, es decir, sobre el que resulta de la anticipación del capital futuro (VN o VF). Es la operación de capitalización compuesta, con la peculiaridad de que el punto de partida es el capital final (VN) con el debemos calcular el valor actual (VA), capital hoy. Para el cálculo del VA del capital, operamos con la fórmula [21].

[21] $$\boldsymbol{VA} = \frac{\boldsymbol{VF}}{(1+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}}}$$

Calculado el capital inicial con la fórmula anterior, por diferencia entre el capital de partida y el inicial obtenido, determinamos el interés total de la operación (DR), o descuento propiamente dicho:

[C] $$\boldsymbol{D}_R = \boldsymbol{VN} * \left(1 - \frac{1}{(1+\boldsymbol{i})^n}\right)$$

Fórmula del descuento racional a interés compuesto.

**Ejercicio 47 (Ahorro por pago anticipado)**
Debemos anticipar el pago de una obligación de UM 12,000 con vencimiento dentro de 18 meses. Si el pago lo efectuamos hoy. ¿Qué valor tenemos que entregar si la operación se acuerda a una tasa de interés del 18% anual compuesto? ¿De cuánto será el ahorro por el pago anticipado?.

**Solución:**
VN = 12,000; n = (18/12) = 1.5; i = 0.18; DR =?; VA =?;

Aplicando directamente la fórmula [C] obtenemos el descuento buscado:

[C] $$\boldsymbol{D}_R = 12{,}000 * \left(1 - \frac{1}{(1+0.18)^{1.5}}\right) = \text{ UM } 2{,}638.22$$

El valor líquido a entregar es: VA = 12,000 - 2,638.22 = UM 9,361.78 o también:

[21] $$\boldsymbol{VA} = \frac{12{,}000}{(1+0.18)^{1.5}} = \text{ UM } 9{,}361.78$$

**DR** = 12,000 - 9,361.78 = UM 2,638.22

**Respuesta:**
El valor a entregar es UM 9,361.78
El ahorro por el pago anticipado es de UM 2,638.22

2.5.3. Descuento comercial
Este caso considera al capital final de un período a otro generador de los intereses a un tipo de descuento (d) dado, vigente en ese momento.

Aplicando la fórmula [B] calculamos el capital inicial (VA):
[D] $$\boldsymbol{VA} = \boldsymbol{VN} * (1-\boldsymbol{d})^n$$

Por diferencias entre el capital de partida y el inicial obtenido, calculamos el interés total de la operación (Dc):

[E] $$\boldsymbol{D_C} = \boldsymbol{VN} * [1-(1-\boldsymbol{d})]^n$$

**Ejercicio 48** **(Descuento comercial)**
Tenemos que anticipar UM 15,000 con vencimiento dentro de 3 años. Si el pago lo hacemos el día de hoy. ¿Qué valor tenemos que entregar si la operación es pactada al 22% anual compuesto? ¿Cuanto será el descuento por el pago anticipado?

**Solución:**
VN = 15,000; n = 3; VA =?; d = 0.22; DC = ?

1º Calculamos el valor actual y el descuento bancario:

[D] **VA** = 15,000*[1 - 0.22]3 = UM 7,118.28

**DC** = 15,000 - 7,118.28 = UM 7,881.72

2º En forma directa, obviando el cálculo previo del capital inicial (VA):
[E] **Dc** = 15,000 * [1 – (1 – 0.22)3] = UM 7,881.72

**Respuesta**:
El monto a entregar es UM 7,118.28 y el descuento es UM 7,882.72.

### 2.5.4. Tasa de interés y de descuento equivalentes
Al comparar el interés simple con el interés compuesto a un mismo capital inicial y tasa de interés, encontramos que los resultados son menores, iguales o mayores con el interés compuesto cuando los períodos son inferiores, iguales o superiores a la unidad de referencia.
Es necesario determinar la relación que existe entre las tasas de interés y descuento con el objeto de que los resultados de anticipos sean los mismos con cualquiera de los modelos de descuento utilizados. Esto es, la equivalencia entre tasas de descuento e interés. Para esto debe cumplirse la igualdad entre ambos descuentos DR = DC. En forma simplificada las formulas que cumplen con esta condición son:

La tasa de descuento comercial **d** equivalente a la tasa de interés **i** es:

[F] $$d = \frac{i}{1+i}$$

Similarmente, obtenemos un tipo de interés **i** equivalente a un **d**:

[G] $$i = \frac{d}{1-d}$$

Reiteramos, la relación de equivalencia es independiente de la duración de la negociación. Por ende tenemos que para una tasa de interés habrá un único tipo de descuento que origine la equivalencia y viceversa.
Estas fórmulas son de aplicación sólo con tasas periódicas; aquellas tasas utilizadas en determinado período para calcular el interés.

**Ejercicio 49** **(Monto a adelantar)**
Tenemos que anticipar el pago de una deuda de UM 18,000 al 15% anual, con vencimiento dentro de 2 años. Asumiendo que el pago lo hacemos hoy, calcular el monto que tenemos que adelantar.

**Solución:**
VN(VF) = 18,000; n = 2; i = 0.15; d = ?

1º Calculamos el descuento racional, con una tasa de interés de 15%:

[21] $$VA = \frac{18,000}{(1+0.15)^2} = \text{UM } 13,610.59$$

**Sintaxis**

**VA(tasa;nper;pago**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VF | Tipo | VA |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.15 | 2 | | -18,000.00 | | 13,610.59 |

2º Calculamos el descuento comercial con un descuento de 15%:

[D] $\boldsymbol{VA} = 18{,}000*(1-0.15)^2 =$ UM 13,005

Cuando operamos con una misma tasa de interés y descuento los resultados son diferentes, el resultado es mayor con el descuento racional por cuanto el capital productor de intereses es el capital inicial (más pequeño) consecuentemente menor el ahorro por la anticipación.
Para obtener el mismo resultado debemos determinar el tipo de descuento equivalente al 15% de interés con la fórmula de equivalencia:

[F] $\boldsymbol{d} = \frac{0.15}{1+0.15} = 0.1304347$

2º Calculando el descuento comercial al nuevo tipo de descuento, obtenemos:

[D] $\boldsymbol{VA} = 18{,}000*(1-0.1304347)^2 =$ UM 13,610.59

**Respuesta:**
El monto a adelantar es UM 13,610.59

## 2.6. Equivalencia de capitales a interés compuesto

Para demostrar que dos o más capitales son equivalentes, es necesario que éstos tengan el mismo valor en el momento en que son comparados: principio de equivalencia de capitales.
El principio de equivalencia financiera, permite determinar si dos o más capitales situados en distintos momentos resultan indiferentes o, por el contrario, hay preferencia por uno de ellos.
En las operaciones de interés simple, vimos la definición y utilidad de la equivalencia de capitales. El principio de equivalencia de capitales y sus aplicaciones siguen siendo válidos. La diferencia fundamental viene dada porque en interés compuesto la fecha donde realizamos la equivalencia no afecta al resultado final de la operación. La equivalencia sólo se cumple en un momento dado y como consecuencia en cualquier punto; fuera de esta condición no se cumple nunca.

### 2.6.1. Usos del principio de equivalencia

El reemplazo de unos capitales por otro u otros de vencimientos o montos diferentes sólo es posible si financieramente resultan ambas alternativas equivalentes.

**Casos posibles:**

**Cálculo del capital común**
Es el monto C de un capital único que vence en n, conocido y que reemplaza a otros capitales C1, C2, ... , Cn, con vencimientos en n1, n2, ... ,nn, todos ellos conocidos.

**Cálculo del vencimiento común**
Es el instante de tiempo n en que vence un capital único VA, conocido, que reemplaza a otros capitales C1, C2, ..., Cn, con vencimientos en n1, n2, ... ,nn, todos ellos conocidos.
La condición a cumplir es:

**Cálculo del vencimiento medio**
Es el instante de tiempo n en que vence un capital único C, conocido, que reemplaza a varios capitales C1, C2, ... , Cn, con vencimientos en t1, t2, ... ,tn, todos ellos conocidos.
La condición a cumplir es:

**Ejercicio 50 (Equivalencia financiera - Capital común)**
Un empresario tiene cuatro obligaciones pendientes de UM 1,000, 3,000, 3,800 y 4,600 con vencimiento a los 3, 6, 8 y 11 meses respectivamente. Para pagar estas deudas propone canjear las cuatro obligaciones en una sola armada dentro de 10 meses. Determinar el monto que tendría que abonar si la tasa de interés fuera de 15% anual.

**Solución:** [i = (0.15/12) = 0.0125]
VF = 1,000, 3,000, 3,800 y 4,600; i = 0.0125; n = 3, 6, 11 y 10; VA0 =?

1º Calculamos el VA con la fecha focal en 0, para ello aplicamos sucesivamente la fórmula [21]:

$$[21]\quad \boldsymbol{VA}_0 = \frac{1,000}{(1+0.0125)^3} + \frac{3,000}{(1+0.0125)^6} + \frac{3,800}{(1+0.0125)^8} + \frac{4,600}{(1+0.0125)^{11}} = 12,462.01$$

**Sintaxis**
**VA(tasa**;**nper**;**pago**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VF | Tipo | VA |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.0125 | 3 | | -1,000.00 | | 963.42 |
| 0.0125 | 6 | | -3,000.00 | | 2,784.52 |
| 0.0125 | 8 | | -3,800.00 | | 3,440.51 |
| 0.0125 | -11 | | -4,600.00 | | 5,273.55 |
| TOTAL VALORES ACTUALES | | | | | 12,462.01 |

2º Finalmente, calculamos el VF10 , monto a pagar en una sola armada:

[19] VF10 = 12,462.01(1 + 0.0125)10 = UM 38,705.11

**Sintaxis**
**VF(tasa**;**nper**;**pago**;va;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VA | Tipo | VF |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.12 | 10 | | -12,462 | | 38,705.11 |

**Ejercicio 51 (Equivalencia financiera - Vencimiento común y medio)**
Un empresario tiene que cobrar UM 10,000 y UM 15,000, con vencimientos a 3 y 6 meses, respectivamente. El deudor plantea al empresario pagar ambas deudas en un sólo abono, con el 3.5% de interés mensual. Determinar el momento del pago único considerando lo siguiente:

1. Que el monto a recibir es de UM 23,000.
2. Que el monto a recibir es UM 25,000.

**Solución**:
VF1 y 2 = 23,000 y 25,000; n = 3 y 6; i = 0.035; n =?

1º Calculamos el VA total:

$$[21]\quad \boldsymbol{VA}_0 = \frac{10,000}{1.035^3} + \frac{15,000}{1.035^6} = \text{UM } 21,221.94$$

**Sintaxis**
**VA(tasa**;**nper**;**pago**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VF | Tipo | VA |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.035 | 3 | | -10,000.00 | | 9,019.43 |
| 0.035 | 6 | | -15,000.00 | | 12,202.51 |
| TOTAL VALOR ACTUAL | | | | | 21,221.94 |

2º Calculamos el vencimiento común:

$$[23]\quad \boldsymbol{n} = \frac{\text{Log}\,\frac{23{,}000}{21{,}221.94}}{\text{Log}\ \ 1.035} = 2.34 \text{ meses}$$

3º Calculamos el vencimiento medio:

$$[23]\quad \boldsymbol{n} = \frac{\text{Log}\,\frac{25{,}000}{21{,}221.94}}{\text{Log}\ \ 1.035} = 4.76 \text{ meses}$$

Aplicando la función NEPER calculamos ambos vencimientos:

**Sintaxis**

**NPER**(**tasa**; **pago**; **va**; vf; tipo)

| Tasa | Pago | VA | VF | Tipo | *n* |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.035 | | 21,221.94 | -23,000 | | 2.3388 |
| 0.035 | | 21,221.94 | -25,000 | | 4.7626 |

En el interés compuesto no es aplicable la media aritmética del interés simple

## 2.7. Estimaciones duplicando el tiempo y la tasa de interés

Usualmente, las entidades financieras para captar ahorristas, ofrecen que duplicarán sus depósitos y los pronósticos de las entidades de control estadístico de los países afirman que la población de tal o cual ciudad ha duplicado en tal o cual período.
Cuando calculemos los períodos ***n***, la tasa de retorno o tasa de crecimiento ***i*** emplearemos las fórmulas cuyos resultados son matemáticamente exactos (teóricos) conociendo uno de ambos valores.
Al determinar la tasa de **interés compuesto** es posible también utilizar la **regla del 72** para estimar ***i*** o ***n***, dado el otro valor. Con esta regla, el tiempo requerido para duplicar sumas únicas iniciales con interés compuesto es aproximadamente igual a 72 dividido por el valor de la tasa de retorno (en porcentaje) o los períodos de tiempo *n*.
Estimando:

**Ejercicio 52 (Duplicando el valor del dinero)**

1) Calcular el tiempo aproximado en que tardaría en duplicarse una cantidad de dinero a la tasa compuesta del 7% anual.
2) Calcular la tasa necesaria de rendimiento para duplicar un monto en 18 años.

**Solución (1)**:
VF = 2;  VA = 1;  i = 0.07;  n =?

1º Calculamos el valor de n:

$$[23]\quad \boldsymbol{n} = \frac{\text{Log}\,\frac{2}{1}}{\text{Log}(1+0.08)} = 10.20 \text{ años}$$

2º Ahora calculamos el valor de ***n***:

$$\boldsymbol{n} = \frac{72}{7} = 10.29 \text{ años}$$

**Solución (2)**:
VF = 2;  VA = 1;  n = 18;  i =?

1º Calculamos el valor de i:

[22] $\boldsymbol{i} = \sqrt[18]{\frac{2}{1}} - 1 = 0.0393 \Rightarrow 3.93\%$ anual

2º Con la regla del 72:

$\boldsymbol{i} = \frac{72}{18} = 4$ años

**CUADRO COMPARATIVO DE LA DUPLICACION DEL TIEMPO Y LA TASA DE INTERES UTILIZANDO LA REGLA DEL 72 Y LAS FORMULAS [13] Y [14] EN LOS CALCULOS DE INTERES COMPUESTO**

| Duplicación de las estimaciones del tiempo, aplicando la regla del 72 y la fórmula del interés compuesto cuando se conoce $i$ | | | Duplicación de las estimaciones del tiempo, aplicando la regla del 72 y la fórmula del interés compuesto cuando se conoce $n$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Tasa de retorno % anual ($i$)** | **Estimacion Regla del 72** | **Estimación Fórmula [14]** | **Período de tiempo en años ($n$)** | **Estimacion Regla del 72** | **Estimación Fórmula [13]** |
| 1 | 72 | 70 | 70 | 1.03% | 1.00% |
| 2 | 36 | 35.03 | 35.03 | 2.06% | 2.00% |
| 7 | 10.29 | 10.24 | 10.24 | 7.03% | 7.00% |
| 14 | 5.14 | 5.29 | 5.29 | 13.61% | 14.00% |
| 29 | 2.48 | 2.72 | 2.72 | 26.47% | 29.00% |
| 48 | 1.50 | 1.77 | 1.77 | 40.68% | 48.00% |

En ambos casos (1) y (2) los resultados varían ligeramente.

Si la tasa es de ***interés es simple***, resolvemos el caso aplicando las fórmulas [11] y [13], o también aplicando la regla de 100 en la misma forma que para el interés compuesto. En este caso las respuestas obtenidas siempre serán exactas.
Aplicamos también las fórmulas [11], [13], [22] y [23] cuando un capital es triplicado, cuadruplicado, quintuplicado, etc.

**Ejercicio 53 (Duplicando el valor del dinero)**

1) Calcular el tiempo en que tarda en duplicarse una cantidad de dinero a interés simple de 8% anual.
2) Calcular la tasa de interés simple para duplicar un monto en 15 años.

**Solución (1)**:
VF = 2; VA = 1; i = 8; n =?

1º Calculamos el valor de n:

[13] $\boldsymbol{n} = \frac{\frac{2}{1} - 1}{0.08} = 12.5$ años

2º Calculamos el valor de ***n***, aplicando la regla del 100:

$\boldsymbol{n} = \frac{100}{8} = 12.5$ años

**Solución (2)**
VF = 2; VA = 1; n = 15; i =?

1º Encontramos el valor de i, con la fórmula [11]:

$$[11]\quad \boldsymbol{i} = \left\langle \frac{\frac{2}{1} - 1}{\boldsymbol{n}} \right\rangle$$ y obtenemos:

$$\boldsymbol{i} = \left\langle \frac{\frac{2}{1} - 1}{15} \right\rangle \times 100 = 6.67\% \text{ anual}$$

2º Calculamos el valor de ***n***, aplicando la regla del 100:

$$\boldsymbol{i} = \frac{100}{15} = 6.67\ \%$$

Como vemos, los resultados son exactamente iguales.

## 2.8. Tasa variable durante el período que dura la deuda

Las tasas de interés sobre las inversiones varían muy a menudo. Para calcular el valor futuro (monto), cuando la tasa de interés ha cambiado una o más veces, multiplicamos el capital por el factor simple de capitalización (FSC) (1 + i)n para cada tasa de interés con su respectivo período de capitalización.

**Ejercicio 54 (Calculando el VF)**
Si invertimos UM 5,000 en un banco que paga 5% los primeros tres años, 3.8% los cinco siguientes y 6.5% los otros siete años. ¿Cuál será el monto de la inversión al final de los quince años?

**Solución**:
VA = 5,000; n = 3, 5 y 7; i = 0.05, 0.038 y 0.065; VF =?

***VF*** = 5,000*1.053*1.0385*1.0657 = UM 10,838.57

# EJERCICIOS DESARROLLADOS

## Interés Simple

**Ejercicio 55 (Valor futuro)**
Calcular el monto acumulado de una inversión de UM 12,000 durante 10 meses al 22% anual.

**Solución:**
VA = 12,000; n = (10/12) = 0.8333; i = 0.22; VF =?

$$[5]\quad \boldsymbol{VF} = 12{,}000(1 + 0.22 * 0.8333) = \text{ UM } 14{,}199.99$$

**Respuesta**:
El monto acumulado es UM 14,199.99

**Ejercicio 56 (Interés)**
Calcule el interés simple ordinario de un capital de UM 3,500 colocado en el banco desde el 13 de marzo al 25 de mayo del 2004, a una tasa del 2% mensual.

**Solución:**
Aplicando Excel calculamos los días exactos:

| F. VENCIMIENTO | F. INICIO | DIAS |
|---|---|---|
| 25/05/2004 | 13/03/2004 | 73 |

VA = 3,500; n = 73 días; i = (0.02/30) = 0.00066; I =?

[8] **I** = 3,500*0.00066*73 = UM 170.16

**Respuesta**:
El interés simple ordinario es de UM 170.16

**Ejercicio 57 (Interés)**
Determinar el interés de UM 10,000 durante 4 meses al 12% de interés anual.
**Solución:**
VA = 10,000; n = 4; I =?

Como el tiempo está expresado en meses, calculamos el equivalente en base mensual del 12% anual (cuando tenemos un tipo de interés y no indica nada, sobreentendemos que es anual).

$$\boldsymbol{i}_{(12)} = \frac{12/12}{100} = 0.01\,(\text{tipo mensual})$$

[8] **I** = 10,000 * 0.01 * 4 = UM 400

Podríamos también haber dejado el tipo anual y colocado el plazo (4 meses) en base anual (4/12). El resultado habría sido el mismo:

[8] **I** = 10,000*0.12*4/12 = UM 400

**Respuesta**:
El interés es UM 400

**Ejercicio 58 (Valor futuro total)**
Dentro de 6 y 9 meses recibiremos UM 25,000 y UM 35,000 respectivamente, y ambas sumas de dinero lo invertimos al 18% de interés anual. Determinar el monto dentro de un año.

**Solución**:
VA1 y 2 = 25,000 y 35,000; n = 0.5 y 0.25; i = 0.18; I =?

1) Dejamos el tipo de interés en base anual y expresamos el plazo en años. El plazo son 6 meses (6/12 = 0.5 años), recibimos el dinero dentro de 6 meses y lo invertimos hasta dentro de 1 año:

[5] **VF1 =** 25,000 (1 + 0.18*0.5) = UM 27,250.00

2) El plazo es de 9 meses (9/12 = 0.25 años), recibimos el capital dentro de 9 meses y si invertimos hasta dentro de 1 año:

[5] **VF2 =** 35,000 (1 + 0.18*0.75) = UM 39,725

**Respuesta:**
Sumando los dos montos tendremos dentro de un año:
**VFT** = 27,250 + 39,725 = UM 66,975.00

**Ejercicio 59 (La mejor alternativa)**
¿Determine qué es preferible, recibir UM30, 000 dentro de 4 meses, UM 20,000 dentro de 7 meses o UM 50,000 dentro de 1 año, si estos montos los puedo invertir al 18%?

**Solución**:
VF = 30,000, 20,000 y 50,000; i = 0.18; VF2...3 =?

Entre la 1ª y 2ª opción (recibir UM 30,000 dentro de 4 meses o UM 20,000 dentro de 7 meses), obviamente, es preferible la primera, el monto es mayor y recibimos antes. Por lo tanto, la 2ª opción queda descartada, habrá de comparar la 1ª con la 3ª (recibir UM 50,000 dentro de 1 año).

Como estos montos están situados en momentos distintos, no comparamos directamente, deben llevarse a un mismo instante. Vamos a calcular los importes equivalentes dentro de 1 año (podríamos haber elegido otro momento, por ejemplo el momento actual).

**1º monto:** El plazo es de (12-4) = 8 meses, es decir, (8/12) = 0.66 años

[5] **VF1 =** 30,000 (1 + 0.18*0.66) = UM 33,564.00

**3º monto:** No calculamos intereses, el monto lo recibimos dentro de 1 año.

**VF3** = 50,000

**Respuesta:**
Obviamente, la 3º alternativa es la más ventajosa.

## Descuento Simple

**Ejercicio 60 (Descuento Bancario Simple)**
Calcular el descuento por anticipar un capital de UM 20,000 por 8 meses al 18% de interés anual ***n*** está expresado en meses, calcular la tasa de descuento ***d*** en base mensual.

**Solución**:
VN = 20,000; n = 8; d = (0.18/12) = 0.015; D =?

[14A] **D** = 20,000*8*0.015 = UM 2,400

**Respuesta**:
Descuento UM 2,400.

**Ejercicio 61 (Descuento Bancario Simple)**
Calcular el monto recibido por el beneficiario del capital, en la operación anterior.

**Solución**:
VN = 20,000; D = 2,400; VA =?

[15A] **VA** = 20,000 - 2,400 = UM 17,600

**Respuesta**:
Monto realmente recibido en efectivo UM 17,600

**Ejercicio 62 (Descuento Bancario Simple)**
Descuentan UM 30,000 por 6 meses y UM 80,000 por 5 meses, al 18% de descuento. Determinar el capital actual total de las dos operaciones.

**1º Solución**:
VN1 = 30,000; n = (6/12) = 0.5; d = 0.18; DC =?; VA1 =?

1º Calculamos el descuento:

[14] **DC** = 30,000*0.18*0.5 = UM 2,700

Dejamos el tipo de interés en base anual y expresamos el plazo en años: 6 meses equivale a 0.5 años (6/12). Hubiera dado igual dejar el plazo en meses y calcular el tipo de descuento mensual equivalente.

[15] **VA1** = 30,000 - 2,700 = UM 27,300

**2º Solución:**

VN2 = 80,000; n = 5/12 = 0.4167; d = 0.18; DC =?; VA2 =?

[15] **DC** = 80,000*0.18*0.4167 = UM 6,000.48
[15A] **VA2** = 80,000 - 6,000 = UM 73,999.52

Sumando los dos montos obtenemos: ***VAT = VA1 + VA2***

**VAT** = 27,300 + 73,999.52 = UM 101,299.52

**Respuesta:**
El capital total actual descontado de ambas operaciones es UM 101,299.52

**Ejercicio 63 (Descuento Bancario Simple)**
Un empresario descuenta UM 60,000 por el plazo de 4 meses y los intereses del descuento son UM 5,000. Calcular el tipo de descuento.

**Solución**:
DC = 5,000; VN = 60,000; n = (4/12) = 0.3333; d =?

[15] 5,000 = 60,000*d*0.3333

$$\boldsymbol{d} = \frac{5,000}{60,000*0.3333} = 0.25$$

**Respuesta:**
El tipo de descuento anual es 25%.

**Ejercicio 64 (Descuento Bancario Simple)**
Calcular el descuento por anticipar UM 25,000 por 5 meses al 15% de descuento.

**Solución:**
VN =25,000; n = (5/12) = 0.4167; d =0.15; DC =?

[15] DC = 25,000*0.15*0.4167 = UM 1,562.51

**Ejercicio 65 (Descuento Bancario Simple)**
Si descuentan un capital de UM 50,000 por 4 meses y los intereses de descuento han ascendido a UM 2,000. Calcular el tipo de descuento aplicado.

**Solución**:
VN = 50,000; n = (4/12) = 0.3333; DC = 2,000; d =?

Calculamos el tipo de descuento:

[15] 2,000 = 50,000*d*0.3333

$$\boldsymbol{d} = \left\langle \frac{2,000}{50,000*0.3333} \right\rangle = 0.12$$

**Respuesta:**
Luego, el tipo de descuento aplicado es el 12%.

**Ejercicio 66 (Descuento Bancario Simple)**
Calcular el plazo del descuento, si descuentan UM 80,000 al 18% y los intereses de descuento ascienden a UM 7,000.

**Solución**:
VN = 80,000; d = 0.18; DC = 7,000; t =?

1º Calculamos el plazo:

[15] 7,000 = 80,000*0.18*n

$$\boldsymbol{n} = \frac{7{,}000}{80{,}0000*0.18} = 0.4861 \text{ años}$$

0.4161*12 = 5.8333 meses
0.8333*30 = 25 días

**Respuesta:**
El plazo del descuento ha sido 5 meses con 25 días.

**Ejercicio 67 (Descuento Bancario Simple)**
Los intereses de descuento de anticipar un capital por 9 meses, al 12% anual, ascienden a UM 22,000. Calcular el importe líquido (VA).

**Solución**:
DC= 22,000; n = (9/12) = 0.75; d = 0.12; VN =?; VA =?

1º Calculamos el valor nominal:

[15] 22,000 = VF*0.12*0.75

$$\boldsymbol{VF} = \frac{22{,}000}{0.75*0.12} = \text{UM } 244{,}444.44$$

2º Calculamos el VA líquido o capital inicial, neto recibido:

[15A] ***VA*** = 244,444.44 - 22,000 = UM 222,444.44

**Respuesta:**
El capital o valor líquido es de UM 222,444.44

## Interés Compuesto

**Ejercicio 68 (Valor futuro)**
Calcular el monto a pagar dentro de dieciocho meses por un préstamo bancario de UM 30,000, si devenga el 22% nominal con capitalización trimestral.

**Solución**:
VA = 30,000; n (18/3) = 6; ***j*** = 0.22; VF =?

1º Para determinar el monto acumulado (VF), luego de 18 meses (6 trimestres), de un capital inicial de UM 30,000, necesitamos calcular la tasa efectiva trimestral equivalente a partir de la tasa nominal con capitalización trimestral del 22%: ***i*** = 0.22/4 = 0.055

[19] $\boldsymbol{VF} = 30{,}000(1+0.055)^6 = \text{UM } 41{,}365$

**Respuesta:**
El monto a pagar es UM 41,365.28

**Ejercicio 69 (Valor Actual)**
Daniel desea viajar al extranjero dentro de 18 meses en un tour cuyo costo es UM 10,000. Quiere saber cuánto debe depositar hoy para acumular esa cantidad, si el dinero depositado a plazo fijo en el Banco gana el 12% efectivo anual.

**Solución:**
VF = 10,000; n = 18; ***i*** = (0.12/12) = 0.01; VA =?

[21] $VA = \frac{10,000}{1.01^{18}} =$ UM 8,360.17

**Sintaxis**

**VA**(**tasa**;**nper**;**pago**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VF | Tipo | VA |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.01 | 18 | | -10,000 | | 8,360.17 |

**Respuesta:**
Daniel debe depositar hoy UM 8,360.17

**Ejercicio 70 (Interés simple versus interés compuesto)**
Determinar el interés de UM 150,000 invertido durante un año y medio al 18% anual, aplicando capitalización simple y capitalización compuesta.

**Solución**:
VA = 150,000; n = 18; i = (0.18/12) = 0.015; I =?

a) A interés simple : [8] I = 150,000*0.015*18 = UM 40,500
b) A interés compuesto : [20] I = 150,000(1.01518 - 1) = UM 46,101

COMPARACION:
[5] ***VF*** (INT. SIMPLE) = 150,000(1+0.015*18) = UM 190,500
[19] ***VF***(INT. COMPUESTO) = 150,000(1+0.015)18 = UM 196,101

También obtenemos éstas dos últimas cantidades con la fórmula: [9] VF = VA + I.

**Ejercicio 71 (Valor futuro total)**
Si recibo UM 80,000 dentro de 5 meses y otro capital de UM 45,000 dentro de 8 meses. Ambos lo invierto al 15% anual. ¿Qué monto tendré dentro de 1 año, aplicando capitalización compuesta?

**Solución**
VA5 y 8 = 80,000 y 40,000; i = 0.15; VFT =?

Calculamos el capital final de ambos montos dentro de 1 año y los sumamos. Como la tasa es anual la base debe ser anual:

Para 5 meses (5-12 = 7/12 = 0.5833) y para 8 meses (8 - 12 = 4/12 = 0.333)

[19] **VF5** = 80,000(1.15)0.5833 = UM 86,795.47
[19] **VF8** = 40,000(1.15)0.3333 = UM 41,907.58 UM 128,703.05

**Sintaxis**

**VF**(**tasa**;**nper**;**pago**;va;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VA | Tipo | VF |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.15 | 0.5833 | | -80,000 | | 86,795.47 |
| 0.15 | 0.3333 | | -40,000 | | 41,907.58 |
| TOTAL CAPITAL FINAL | | | | | 128,703.05 |

**Respuesta:**
Capital final dentro de un año UM 128,702.05

**Ejercicio 72 (Tasa de interés simple y compuesto)**
Si UM 150,000 generan intereses durante 6 meses de UM 30,000. Determinar el tipo de interés anual si fuera a interés simple y a interés compuesto.

**Interés simple**:
VA = 150,000; I = 30,000; n = 6; i =?

[9] VF = 150,000 + 30,000 = UM 180,000

[11] $\boldsymbol{i}=\frac{\frac{180,000}{150,000}-1}{6}=0.03333$

0.03333*12 = 0.40 anual

**Interés compuesto**:
VA = 150,000; I = 30,000; n = 0.5; i =?

[9] **VF** = 150,000 + 30,000 = UM 180,000

[13] $\boldsymbol{i}=\sqrt[6]{\frac{180,000}{150,000}}-1=0.0309$ mensual

**Sintaxis**
**TASA**(**nper**;**pago**;**va**;vf;tipo;estimar)

| Nper | Pago | VA | VF | Tipo | Tasa |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | | -150,000 | 180,000 | | 0.0309 |

Anual = 0.0309 * 12 * 100= 37.02%

**Respuesta:**
La tasa de interés simple anual es 40%
La tasa de interés compuesto anual es 37.02%

## Descuento Compuesto

**Ejercicio 73 (Descuento racional compuesto)**
Determinar el descuento compuesto racional al 7% de interés anual, capitalizable trimestralmente, sobre UM 5,000 a pagar dentro de 5.5 años.

**Solución:**
VN = 5,000; n = (5.5*4) = 22; m = 4; d = (0.07/4) = 0.0175; DR =?

[C] $\boldsymbol{D}_R=5,000*\left(1-\frac{1}{(1+0.0175)^{22}}\right)=$ UM 1,586.40

**Respuesta:**
El descuento racional compuesto es UM 1,586.40

**Ejercicio 74 (Tasa de interés a una tasa de descuento dada)**
Si asumimos la tasa de descuento del 7% anual en operaciones de dos o más años, ¿a qué tasa de interés, capitalizable anualmente, equivale?

**Solución**:
d = 0.07; i =?

[G] $\boldsymbol{i}=\frac{0.07}{1-0.07}=0.0753$

**Respuesta:**
La tasa de descuento del 7%, con capitalización anual equivale a otra de interés del 7.53%, anual.

**Ejercicio 75 (Tasa de descuento a una tasa de interés dada)**
Calcular la tasa de descuento compuesto anual, equivalente a otra de interés del 7%, capitalizable anualmente.

**Solución**:
i = 0.07; d =?

[F] $d = \frac{0.07}{1+0.07} = 0.0654$

**Respuesta:**
El tipo de interés del 7%, capitalizable anualmente, es equivalente a la tasa de descuento del 6.54% anual.

**Comentario**:
Como apreciamos, en ambas fórmulas operamos con la tasa periódica, en nuestro caso anual.

**Ejercicio 76 (Descuento Bancario Compuesto)**
Determinar el descuento por anticipar un capital de UM 40,000, durante 7 meses, al tipo de interés del 14% anual.

**Solución**:
VF = 40,000; i = 14/12 = 0.01167; n = 7; D =?

[55] $D = 40{,}000 - \frac{40{,}000}{(1+0.01167)^{7}} = \text{UM } 3{,}120.26$

**Respuesta:**
El descuento compuesto verdadero es de UM 3,120.26

**Ejercicio 77 (Descuento Bancario Compuesto)**
Descontar el capital de UM 150,000, por el plazo de 6 meses al 17%, y el importe resultante capitalizarlo (capitalización compuesta) por el mismo plazo y con el mismo tipo de interés.

**Solución:**
VF = 150,000; i = 0.17; n = 6/12 = 0.5; VA =?

1º Descontamos con la fórmula:

[21] $VA = \frac{150{,}000}{(1+0.17)^{0.5}} = \text{UM } 138{,}675$

**Sintaxis**

**VA**(**tasa**;**nper**;**pago**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VF | Tipo | VA |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.17 | 1 | | -150,000 | | **138,675** |

Una vez obtenido el capital descontado, capitalizamos aplicando la fórmula de capitalización compuesta:

[19] **VF** = 138,675*1.170.5 = UM 150,000

**Sintaxis**

**VF**(**tasa**;**nper**;**pago**;va;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VA | Tipo | *VF* |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.17 | 1 | | -138,675 | | **150,000** |

Como vemos, cumplimos el concepto de equivalencia y retornamos al capital de partida. El descuento compuesto, al igual que la capitalización compuesta puede utilizarse indistintamente en operaciones de corto plazo (menos de 1 año) y largo plazo. En este sentido contrasta con el descuento comercial y el racional, que sólo es utilizado en operaciones de corto plazo.

**Ejercicio 78 (Tasa de descuento equivalente)**
Si el banco dice cobrar la tasa de interés de 30% anual, liquidado cada mes, vencido, ¿a qué tasa de interés mes anticipado corresponde ese interés?

El interés mensual vencido es:

0.30/12= 0.025= 2.5%

El interés mensual anticipado es:

$$[63]\quad \boldsymbol{d} = \frac{0.025}{1+0.025}\times 100 = 2.49\%$$

Luego, la tasa equivalente mes vencido es 2.49% mes anticipado.

**Ejercicio 79** **(Descuento Bancario Compuesto)**
Si solicitamos un pagaré al Banco por UM 20,000 a pagar luego de 90 días. Si la tasa de interés vigente en el mercado es del 18% anual y **los intereses son cobrados por adelantado.** ¿Cuánto le descontarán por concepto de intereses?, ¿Cuánto recibirá realmente? y ¿Cuánto pagará luego de los 90 días?

**Solución:** (18% / 360 = 0.05% diario)
VF = 20,000; n = 90 días; i = 0.0005 diario; VA =?

1º Calculamos el VA:

$$[21]\quad \boldsymbol{VA} = \left\langle \frac{20,000}{(1+0.0005)^{90}} \right\rangle = \text{UM } 19,120.16$$

**Sintaxis**
**VA(tasa;nper;pago;**vf;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VF | Tipo | VA |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.0005 | 90 | | -20,000 | | **19,120.16** |

2º Calculamos el descuento: (I = D)

[7] D **=** 20,000 - 19,120.16 = UM 879.84

El descuento es UM 879.84 y el importe líquido a recibir es UM 19,120.16.

**Respuesta:**
Luego de los 90 días pagamos UM 20,000.

**Ejercicio 80** **(Descuento Bancario Compuesto)**
¿Cuánto deberíamos haber solicitado para que después del descuento correspondiente obtuviéramos los UM 20,000 requeridos?

**Solución:** (18% / 360 = 0.05% diario)
VA = 20,000; n = 90 días; i = 0.0005 diario; VF =?

[19] ***VF*** = 20,000(1 + 0.0005)90 = UM 20,920

**Sintaxis**
**VF(tasa;nper;pago;**va;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VA | Tipo | *VF* |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.0005 | 90 | | -20,000 | | **20,920** |

Comprobando:

$$[21]\quad \boldsymbol{VA} = \frac{20,920}{(1+0.0005)^{90}} = \text{UM } 20,000$$

**Sintaxis**

**VA(tasa;nper;pago**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VF | Tipo | VA |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.0005 | 90 | | -20,920 | | **20,000** |

**Respuesta:**
Luego el monto que deberíamos haber solicitado al Banco es UM 20,920, representa el valor nominal VF de la obligación.

## Otras Aplicaciones del Interés Compuesto

**Ejercicio 81 (Crecimiento poblacional)**
La población de un año a otro creció de 8,000 a 8,200 habitantes. Asumiendo el crecimiento a ritmo compuesto anual constante. ¿Cuál será la población de la ciudad dentro de 15 años?

**Solución**:
VA = 8,000; VF = 8,200; n = 1; r = ?

Calculamos el ritmo de crecimiento (***i***) con la fórmula [1] y la función TASA:

[22] $\boldsymbol{i}=\sqrt[1]{\frac{8,200}{8,000}}-1=0.025$

**Sintaxis**

**TASA(nper;pago;va**;vf;tipo;estimar)

| Nper | Pago | VA | VF | TASA |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | 8,000 | - 8,200 | 0.025 |

2º Calculamos la población dentro de 15 años: VA = 8,200

[19] $\boldsymbol{VF} = 8,200(1 + 0.025)^{15}$ = UM 11,876 Habitantes

**Respuesta:**
La población dentro de 15 años será de 11,876 habitantes

**Ejercicio 82 (Valor futuro de una población)**
En una reserva nacional existen a la fecha 860 monos. Poblaciones de esta magnitud crecen al ritmo del 3.5% anual. ¿Cuántos monos habrá al cabo de 25 años, estimando el ritmo de crecimiento constante?

**Solución:**
VA = 860; i = 0.035; n = 25; VF =?

[19] ***VF*** = 860(1.035)25 = UM 2,032 monos

**Sintaxis**

**VF(tasa;nper;pago**;va;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VA | Tipo | VF |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.035 | 25 | | -860 | | 2,032 |

**Respuesta**:
Al cabo de 15 años la población de monos será de 2,023

**Ejercicio 83 (Valor actual de una población)**
En otra reserva parecida a la anterior no existen monos. ¿Cuántos monos trasladamos en este momento para tener la población de 990 dentro de 10 años considerando el 3.5% de crecimiento anual?

**Solución:**

VF = 990; i = 0.035; n = 10; VA = ?

1º Calculamos el VA:

$$[21]\quad \boldsymbol{VA} = \frac{990}{1.035^{10}} = 702 \text{ monos}$$

**Sintaxis**

**VA**(**tasa**;**nper**;**pago**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VF | Tipo | VA |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.04 | 10 | | -990 | | 702 |

**Respuesta**:
Debemos trasladar 702 monos

**Ejercicio 84 (Tasa de crecimiento)**
En la década de 1940 - 1950 la población mundial creció de 2,249 a 2,510 millones de habitantes. Calcular el ritmo compuesto de crecimiento anual.

**Solución**:
VA = 2,249; VF = 2,510; n = 10 (1950 - 1940); i =?

$$[22]\quad \boldsymbol{i} = \left(\sqrt[10]{\frac{2{,}510}{2{,}249}} - 1\right) = 0.011$$

**Sintaxis**

**TASA**(**nper**;**pago**;**va**;vf;tipo;estimar)

| Nper | Pago | VA | VF | TASA |
|---|---|---|---|---|
| 10 | | - 2,249 | 2,510 | 0.011 |

**Respuesta**:
El ritmo compuesto de crecimiento anual fue de 1.10% al año.

# Capítulo 3

## 6 Llaves Maestras de las Matemáticas Financieras, Gradientes y Métodos de Evaluación de Proyectos

### 1. Los Factores Financieros

Las seis llaves maestras de las matemáticas financieras: En las matemáticas financieras es posible manejar cualquier operación, evaluar diversas alternativas de inversión con seis fórmulas. Como una unidad, estas seis fórmulas, reciben el nombre de factores financieros. Estos seis factores financieros derivan de la fórmula general del interés compuesto.
Tanto los pagos como los ingresos efectuados en la empresa son fundamentales para el fortalecimiento de la institución, razón por la cual deben ser evaluados constantemente con el objeto de determinar el impacto que producen en el entorno empresarial, realizar proyecciones financieras y estudios de nuevos proyectos.
Para este cometido, los factores financieros son de mucha utilidad y aplicación. Sirven para solucionar múltiples problemas financieros referidos al monto compuesto, anualidades vencidas y anualidades adelantadas. El uso de factores permite calcular con rapidez las variables del monto (VF), del valor actual (VA) y del pago periódico o renta (C).
Para determinar estos factores debemos conocer con anticipación las variables "i" y "n". En todo caso, asumimos que "C", "VF" o "VA" toman el valor de 1. Estos factores son seis: FSC, FSA, FAS, FRC, FCS y FDFA.

### 1.1. A partir del Monto compuesto

Permite calcular de manera rápida el factor de acumulación de los intereses, en el caso de buscar el valor futuro de una cantidad inicial. También permite averiguar el factor de actualización de los intereses, en el caso de calcular el valor actual de un importe determinado de dinero.

**1º Factor simple de capitalización (FSC)**

Transforma el valor actual (VA) en valor futuro (VF). Con la fórmula general del interés compuesto, desarrollada en el primer capítulo, tenemos:

$$[19]\ \boldsymbol{VF} = \boldsymbol{VA}(1+\boldsymbol{i})^{n} \qquad \boldsymbol{FCS} = (1+\boldsymbol{i})^{n}$$

El factor entre paréntesis es el factor simple de capitalización:

**2º Factor simple de actualización (FSA)**

Permite transformar valores futuros en valores actuales.

$$[21]\ \boldsymbol{VA} = \frac{\boldsymbol{VF}}{(1+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}}} \qquad \boldsymbol{FSA}_{i}^{n} = \frac{1}{(1+\boldsymbol{i})^{n}}$$

**Ejercicio 85 (Factor simple de capitalización)**
Deseamos obtener el factor de acumulación de los intereses y el importe acumulado de un depósito de UM 8,000 colocado durante 11 meses al 2.8% de tasa mensual a plazo fijo.

**Solución**:
VA = 8,000; n = 11 meses; i = 0.028; FSC = ?; VF = ?

1º Aplicamos el método formulístico:

$$\boldsymbol{FSC}_{0.028}^{11} = (1+0.028)^{11} = \ 1.35495$$

[19] $\boldsymbol{VF} = 8{,}000 * 1.35495 = \text{ UM } 10{,}839.62$

2º Aplicamos la función financiera VF de Excel:

**Sintaxis**

**VF**(**tasa**;**nper**;**pago**;va;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VA | Tipo | VF |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,03 | 11 | | -8.000 | | 10.839,62 |

**Respuesta:**

El factor de acumulación **FSC** es 1.35495 y el monto acumulado **VF** es UM 10,839.62. Con ambos métodos obtenemos resultados iguales.

**Ejercicio 86 (Factor simple de actualización)**

Buscamos obtener el factor de actualización de los intereses, así como el valor actual de una deuda de UM 25,000, con vencimiento en 15 meses, pactada al 1.98% de interés mensual.

**Solución:**

VF = 25,000; n = 15 meses; i = 0.0198; FSA =?; VA = ?

1º Aplicamos el método formulístico:

$$\boldsymbol{FSA}_{0.0198}^{15} = \frac{1}{(1+0.0198)^{15}} = 0.74520$$

[21] $\boldsymbol{VA} = 25{,}000 * 0.74520 = \text{ UM } 18{,}630$

2º Operamos con la función financiera VA de Excel:

**Sintaxis**

**VA**(**tasa**;**nper**;**pago**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VF | Tipo | VA |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.02 | 15 | | -25,000 | | 18,630 |

**Respuesta:**

El factor de actualización de los intereses **FSA** es 0.74520 y el valor actual de la deuda **VA** es 18,630.

## 1.2. A partir de Anualidades

Una anualidad es un flujo de caja con montos de dinero uniformes, es decir, todos los flujos son iguales y los movimientos de capitales ocurren a intervalos regulares. La circulación monetaria es a través de pagos de la anualidad.

Con este grupo de factores calculamos con rapidez el factor de acumulación de los intereses de pagos periódicos iguales, así como el monto acumulado a pagar al final de un período determinado. Estos cálculos pueden hacerse considerando pagos periódicos al vencimiento pospagable o por adelantado prepagables. También calculamos el factor de actualización de los intereses de pagos periódicos iguales, así como el valor actual a pagar de un período específico dentro de un tiempo establecido.
Las anualidades no siempre están referidas a períodos anuales de pago. Las fórmulas de las anualidades permiten desplazar en el tiempo un grupo de capitales a la vez.
Algunos ejemplos de anualidades son:

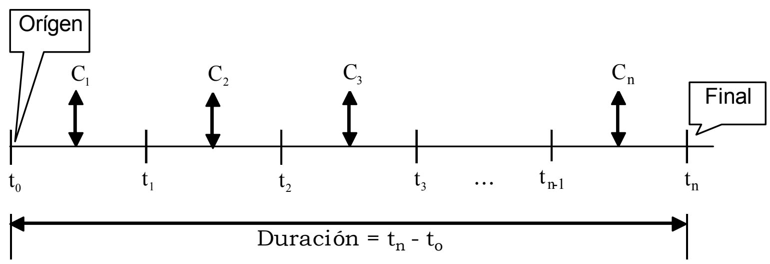
- Los pagos mensuales por renta.
- El cobro quincenal o semanal de sueldos.
- Los abonos mensuales a una cuenta de crédito.
- Los pagos anuales de primas de pólizas de seguro de vida.

El intervalo o periodo de pago (n), es el tiempo que transcurre entre un pago (C) u otro y el plazo de una anualidad es el tiempo que transcurre entre el inicio del primer periodo y el periodo final de pago. Renta es el pago (C) periódico.

Los principales elementos que conforman la anualidad son:
**C** Pago Periódico, llamado también término. Es el importe cobrado o pagado, según sea el caso, en cada período y que no cambia en el transcurso de la anualidad.
**VF**, el valor futuro viene a ser la suma de todos los pagos periódicos (C), capitalizados al final del enésimo período.
**VA**, el valor actual viene a ser la suma de todos los pagos periódicos (C), descontados o actualizados a una tasa de interés.
**i,** es la tasa de interés por período, tiene la característica de ser simultáneamente nominal y efectiva. También representa la tasa anual de efectivo (TEA).
**n**, obtenemos el número de períodos multiplicando el tiempo por la frecuencia de capitalización de los intereses (n=t*m).

Las anualidades cumplen con las siguientes condiciones**:**
1. Todos los pagos son de igual valor.
2. 2. Todos los pagos son a iguales intervalos .
3. Todos los pagos son llevados al principio o al final de la serie a la misma tasa.
4. El número de pagos debe ser igual al número de períodos.

Gráficamente:




**1.2.1. Valor financiero de una anualidad en el momento t (Vt)**
Es el resultado de llevar financieramente capitalizando o descontando las cuotas de la anualidad a dicho momento de tiempo t.

Casos Particulares
Si t = 0 (siendo 0 el origen de la anualidad) nos encontramos con el valor actual, es decir, cuantificar los términos de la anualidad en el momento cero.
Si t = n (siendo n el final de la anualidad) definido como el valor final o valor futuro, resultado de desplazar todos los términos de la anualidad al momento n.

1.2.2. Clases de anualidades
Atendiendo a la variedad de componentes que intervienen, las anualidades se clasifican en:

**A) De acuerdo con las fechas de iniciación y término éstas son:**
1) Anualidades ciertas. Sus fechas son fijas, establecidas de antemano.
   Ejemplo: En una compra a crédito, tanto la fecha que corresponde al primer y último pago son conocidos.
2) Anualidad contingente. En este tipo de anualidades, tanto la fecha del primer y último pago, generalmente no se establecen anticipadamente.
   Ejemplo: Una renta vitalicia o perpetua que tiene que abonar un cónyuge a la muerte del otro. Al morir el cónyuge se inicia la renta y ésta fecha es desconocida.

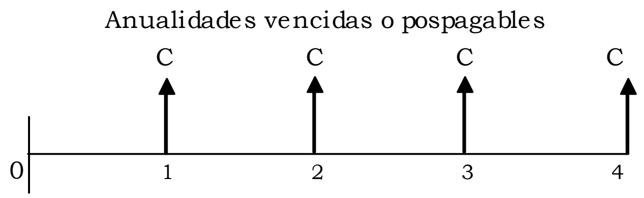
**B) De acuerdo a los intereses (a su periodo de capitalización), las anualidades son:**
3) Simples. Cuando el periodo de pago coincide con el de capitalización de los intereses.

Ejemplo: El pago de una renta mensual con intereses al 32% de capitalización mensual.

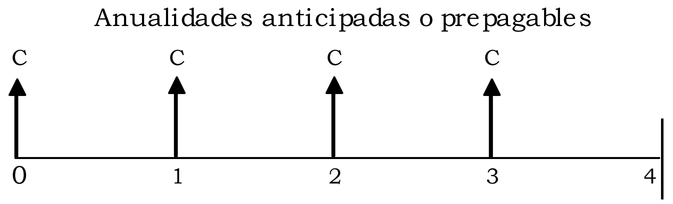
4) Generales. Aquellas en las que el periodo de pago no coincide con el de capitalización.
Ejemplo: El pago de una renta semestral con intereses al 36% anual capitalizable trimestralmente.

**C) De acuerdo con el vencimiento de los pagos, éstas son:**

5) Vencidas. Las anualidades vencidas, ordinarias o pospagables son aquellas en que los pagos son a su vencimiento, es decir, al final de cada periodo.
Ejemplo, el pago de salarios a los empleados, el trabajo es primero, luego el pago.




6) Anticipadas. Las anualidades anticipadas o prepagables efectuadas al principio de cada periodo.
Ejemplo, el pago mensual por arriendo de una casa, primero es el pago, luego el uso del inmueble.




El VA y VF de las anualidades prepagables son el resultado de capitalizar un período las pospagables multiplicándolas por (1 + i).

**D) De acuerdo al momento de inicio o momento de valoración:**

7) Inmediatas. Las más comunes. Los cobros o pagos tienen lugar en el periodo inmediatamente siguiente a la formalización del trato. Valoramos la anualidad en su origen o en su final.
Ejemplo: Hoy adquirimos un producto a crédito, a pagar mensualmente. El primer pago puede realizarse hoy o el mes siguiente, las cuotas pueden ser anticipadas (prepagables) o vencidas (pospagables).

8) Diferidas. Los cobros o pagos son llevados a cabo tiempo después de formalizado el trato (se pospone o aplaza), es decir, el primer pago es después de transcurrido cierto número de períodos. La valoración de la anualidad es en un momento posterior a su origen. Significa el valor actual o futuro de una anualidad en n períodos a la tasa i, pospagables (vencidas) o prepagables (anticipadas).

Valor actual o futuro de anualidades adelantadas o prepagables, consiste en calcular la suma de los valores actuales de los pagos al inicio de la anualidad multiplicando el resultado por (1 + i).
Valor actual o futuro de anualidades vencidas o pospagables, consiste en hallar la suma de todos los pagos periódicos a una misma tasa de interés al final del plazo de la anualidad.
Son cantidades periódicas y uniformes, equivalentes a un valor actual o valor futuro, a una determinada tasa de interés.

**E) Según la clase de interés**

9) Simple o en progresión aritmética y,
10) Compuesta o en progresión geométrica

En la presente obra, utilizaremos los términos: anualidad vencida cuando tratemos con rentas pospagables y anticipadas cuando tratemos con rentas prepagables.
Las anualidades que estudiaremos a continuación nos permiten determinar el valor actual o futuro a través de modelos matemáticos que varían en progresión geométrica creciente o decreciente. Tratase de anualidades constantes o uniformes pospagables o prepagables.

Los valores actuales y futuros de las anualidades (gradientes, perpetuidades) anticipadas (adelantadas) o prepagables son calculadas a partir de las vencidas o pospagables multiplicádolas por **(1 + i)**, reiteramos, el VA o VF de las anualidades prepagables son el resultado de capitalizar un período las pospagables.

**1.2.3. Anualidades uniformes**

Las anualidades de valor uniforme pueden, a su vez, subdividirse en unitarias o no unitarias, pospagables y prepagables, temporales o perpetuas, inmediatas (valoramos la renta en su origen o final), diferidas o anticipadas, enteras (cuota y tasa están en la misma unidad de tiempo) y fraccionadas.

En esta parte vamos a desarrollar anualidades constantes, unitarias, temporales, inmediatas y enteras, operando con el interés compuesto.

Las fórmulas de la [24] a la [32] son de aplicación para el cálculo de anualidades vencidas o pospagables.

**(A) Factores para el cálculo del valor actual o inicial del capital**

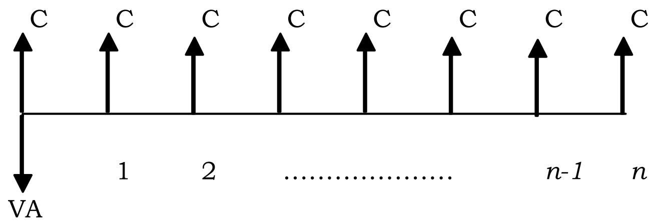
Aplicando los conceptos del valor actual obtenemos los factores 3º y 4º, con los cuales actualizamos el flujo constante de la anualidad. Obtenemos el valor actual descontando a interés compuesto cada uno de los pagos o cuotas a la tasa i, desde donde está cada capital hasta el origen. Generalizamos lo expuesto mediante la siguiente ecuación:

$$\boldsymbol{VA} = \boldsymbol{C}\left\langle\frac{1}{(1+\boldsymbol{i})^1}\right\rangle + \boldsymbol{C}\left\langle\frac{1}{(1+\boldsymbol{i})^2}\right\rangle + \boldsymbol{C}\left\langle\frac{1}{(1+\boldsymbol{i})^3}\right\rangle + \dots + \boldsymbol{C}\left\langle\frac{1}{(1+\boldsymbol{i})^n}\right\rangle$$

Y lo representamos como:

$$\boldsymbol{VA} = \boldsymbol{C}\sum_{t=1}^{n}\frac{1}{(1+\boldsymbol{i})^t}$$

Permite sumar n términos en progresión geométrica decreciente.




**3º Factor de actualización de la serie (FAS)**

Permite pasar de series uniformes a valor actual. Transforma series de pagos uniformes equivalentes a valor actual o valor actual neto (**VAN**).

En este caso tratamos de actualizar el valor de cada **C** desde el final de cada período. Una vez que los valores de C están con valores actuales procedemos a totalizar la suma.

[24] $$\boldsymbol{VA} = \boldsymbol{C}\left\langle\frac{(1+\boldsymbol{i})^n - 1}{\boldsymbol{i}(1+\boldsymbol{i})^n}\right\rangle \qquad \boldsymbol{FAS}_i^n = \left\langle\frac{(1+\boldsymbol{i})^n - 1}{\boldsymbol{i}(1+\boldsymbol{i})^n}\right\rangle$$

Muy utilizada en operaciones financieras y comerciales para determinar la tasa de rendimiento y en ventas a plazos.

**4º Factor de recuperación del capital (FRC)**

Transforma un stock inicial VA en un flujo constante o serie uniforme C. Conocido en el mundo de las finanzas como FRC, definido como el factor que transforma un valor presente a serie de pagos uniformes equivalentes.

[25] $$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{VA}\left\langle\frac{\boldsymbol{i}(1+\boldsymbol{i})^n}{(1+\boldsymbol{i})^n - 1}\right\rangle \qquad \boldsymbol{FRC}_i^n = \left\langle\frac{\boldsymbol{i}(1+\boldsymbol{i})^n}{(1+\boldsymbol{i})^n - 1}\right\rangle$$

[26] $$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{log}\left\langle 1 - \left\langle \frac{\boldsymbol{VA}}{\boldsymbol{C}} \right\rangle \boldsymbol{i} \right\rangle}{\boldsymbol{log}\left\langle \frac{1}{(1+\boldsymbol{i})} \right\rangle}$$

Utilizado en operaciones de crédito y en la evaluación de proyectos.

**Ejercicio 87 (FRC-Cuotas vencidas)**
Una institución tiene programado llevar a cabo campañas de venta entre sus afiliados y asume, como monto contado el valor de UM 1,200, para su pago en 36 mensualidades constantes pospagables a 2.87% mensual. Calcular el valor de las cuotas mensuales.

**Solución**:
VA = 1,200; i = 0.0287; n = 36; C = ?

[25] $$\boldsymbol{C} = 1{,}200\left\langle \frac{0.0287(1+0.0287)^{36}}{(1+0.0287)^{36}-1} \right\rangle = \text{UM } 53.90$$

Aplicando la función financiera PAGO de Excel, tenemos:

**Sintaxis**
**PAGO**(**tasa**;**nper**;**va**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | VA | VF | Tipo | PAGO |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,0287 | 36 | -1.200 | | | 53,90 |

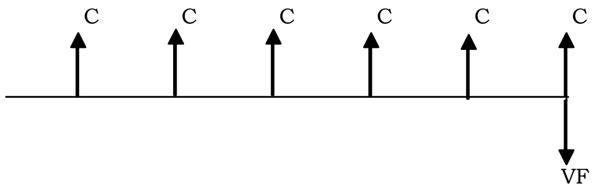
**Respuesta:**
El valor pospagable de cada una de las 36 cuotas es UM 53.90.

**(B) Factores para el cálculo del valor futuro o final del capital**
En la solución de problemas de este tipo aplicamos en forma sucesiva la fórmula [19] VF = VA (1 + i)n del valor futuro, para lo cual es necesario hallar los montos parciales de cada C desde el momento de su abono hasta el final del período n. La primera C depositada a finales del primer período n se convierte C(1 + i)n-1. El exponente es n -1 porque la primera C capitaliza desde el inicio del 2º período. Como la última C es depositada al final del período n no gana intereses. Sin embargo, su monto es representado como C(1 + i)0.
Generalizando, tenemos:

$$\boldsymbol{VF} = \boldsymbol{C}(1+\boldsymbol{i})^0 + \boldsymbol{C}(1+\boldsymbol{i})^1 + \boldsymbol{C}(1+\boldsymbol{i})^2 + \ldots + \boldsymbol{C}(1+\boldsymbol{i})^n$$

Representa la suma de n términos en progresión geométrica creciente, que lo calculamos con la siguiente ecuación:

$$\boldsymbol{VF} = \boldsymbol{C}\sum_{t=0}^{n=1}(1+\boldsymbol{i})^n$$




**5º Factor de capitalización de la serie (FCS)**
**Factor para pasar de series uniformes a valor futuro** (Capitalización de una serie uniforme). Transforma los pagos e ingresos uniformes a valor futuro único equivalente al final del período n. Este factor convierte pagos periódicos iguales de fin de período C, en valor futuro VF.

[27] $\boldsymbol{VF} = \boldsymbol{C}\left\langle\frac{(1+\boldsymbol{i})^{n}-1}{\boldsymbol{i}}\right\rangle$ $\qquad$ $\boldsymbol{FCS}_{i}^{n} = \left\langle\frac{(1+\boldsymbol{i})^{n}-1}{\boldsymbol{i}}\right\rangle$

[28] $\boldsymbol{n} = \frac{\log\left\langle\left\langle\frac{\boldsymbol{VF}}{\boldsymbol{C}} * \boldsymbol{i}\right\rangle+1\right\rangle}{\log(1+\boldsymbol{i})}$

**6º Factor de depósito del fondo de amortización (FDFA)**
Factor utilizado para transformar stocks finales VF en flujos o series (depósitos) uniformes C. O también, transforma valores futuros del final del período n en valores uniformes equivalentes periódicos. Operando la ecuación [27], tenemos:

[29] $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{VF}\left\langle\frac{\boldsymbol{i}}{(1+\boldsymbol{i})^{n}-1}\right\rangle$ donde: $\boldsymbol{FDFA}_{i}^{n} = \left\langle\frac{\boldsymbol{i}}{(1+\boldsymbol{i})^{n}-1}\right\rangle$

**Características**:
1. Los fondos de amortización sólo sirven para el pago del capital.
2. La deuda permanece invariable hasta completar el fondo.

Para el cálculo del valor futuro de una serie de pagos iguales, un período después del último pago, empleamos la fórmula:

$$\boldsymbol{VF} = \boldsymbol{C}\sum_{t=1}^{n}(1+\boldsymbol{i})^{t} = \boldsymbol{C}\left\langle(1+\boldsymbol{i})+(1+\boldsymbol{i})^{2}+\ldots+(1+\boldsymbol{i})^{n}\right\rangle$$

Desarrollando la sumatoria tenemos:

[30] $\boldsymbol{VF} = \boldsymbol{C}\left\langle\frac{(1+\boldsymbol{i})^{n+1}-(1+\boldsymbol{i})}{\boldsymbol{i}}\right\rangle$ $\qquad$ [31] $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{VF}\left\langle\frac{\boldsymbol{i}}{(1+\boldsymbol{i})^{n+1}-(1+\boldsymbol{i})}\right\rangle$

[32] $\boldsymbol{n} = \frac{\log\left\langle(1+\boldsymbol{i})\left\langle\frac{\boldsymbol{VF}}{\boldsymbol{C}}+1\right\rangle\right\rangle}{\log(1+\boldsymbol{i})}$

**Ejercicio 88 (FCS - VF vencida)**
Si mensualmente deposito UM 600 en un banco que paga el 18% de interés anual capitalizando trimestralmente. ¿Qué monto habré acumulado después de efectuar 48 abonos?.

**Solución:**
C = (600*300) = 1,800; i = (0.18/4) = 0.045; n = (48/3) = 16; VF = ?

Resulta indiferente abonar UM 600 mensuales o UM 1,800 trimestrales, por cuanto el banco capitaliza los ahorros trimestralmente.

1º Calculamos el VF con la fórmula [27] o con la función financiera VF:

[27] $\boldsymbol{VF} = 1{,}800\left\langle\frac{(1+0.045)^{16}-1}{0.045}\right\rangle = \text{ UM } 40{,}894.81$

**Sintaxis**
**VF(tasa;nper;pago**;va;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VA | Tipo | VF |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.045 | 16 | -1,800 | | | 40,894.81 |

**Respuesta:**
El monto de la inversión periódica después de 48 abonos es de UM 40,894.81 con ambos métodos.

**Ejercicio 89 (FDFA - Cuota vencida)**
Al objeto de acumular UM 10,000 en 90 días, efectuaremos 3 depósitos mensuales iguales en un banco que paga el 22.58% de tasa anual. Si el primer abono lo hacemos hoy día. ¿Cuál será el valor de dicho depósito?.

**Solución:**
VF = 10,000; n = 3; i = (0.2258/12) = 0188; C = ?

$$[31]\quad \boldsymbol{C} = 10{,}000\left\langle \frac{0.018}{(1+0.018)^{3+1}-(1+0.018)} \right\rangle = \text{ UM } 3{,}216.16$$

**Sintaxis**
**PAGO**(**tasa**;**nper**;**va**;vf;tipo)

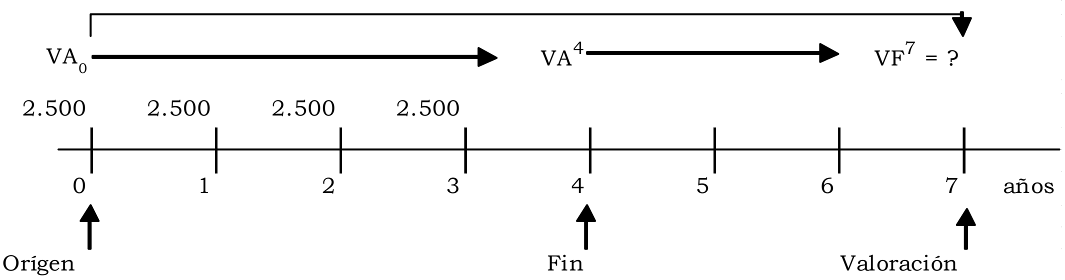
| Tasa | Nper | VA | VF | Tipo | PAGO |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.02 | 3 | | -10,000 | 1 | 3,216.16 |

**Respuesta:**
El valor del depósito es de UM 3,216.16 con ambos métodos.

### 1.2.4. Anualidades anticipadas o prepagables
***Anticipar (Del lat. anticipare). Hacer que algo suceda antes del tiempo señalado o esperable o antes que otra cosa.***

Aquellas anualidades valoradas anticipadamente a su final. El tiempo que transcurre entre el final de la anualidad y el momento de valoración es el período de anticipación.
Reiteramos, que los valores actuales y futuros de las anualidades anticipadas (adelantadas) o prepagables son calculadas a partir de las vencidas o pospagables multiplicado por (1 + i), es decir, el VA o VF de las anualidades prepagables son el resultado de actualizar o capitalizar con un período más las pospagables. Por esta razón los resultados (VA o VF) de las prepagables son siempre mayores que de las pospagables. Aplicable también a las funciones financieras de Excel, Tipo cero (0) o se omite, significa pago al final del período; tipo uno (1) significa pago al principio del período, que viene a ser lo mismo que multiplicar los resultados por (1+i).

**Ejercicio 90 (VA y VF de anualidad prepagable)**
Determinar el valor actual y futuro de una renta de 4 cuotas anuales prepagables de UM 2,500 si la valoración al 9% anual es a los 7 años de iniciado.




**Solución:** (Calculando el valor actual)
C = 2,500; n = 7*4 = 28; i = 0.09; VA = ?

1º Para el cálculo del VA aplicamos la fórmula [24] o la función VA, multiplicamos los resultados por (1 + 0.09):

$$[24]\quad \boldsymbol{VA} = 2{,}500\left\langle \frac{(1+0.09)^{28}-1}{0.09(1+0.09)^{28}} \right\rangle(1+0.09) = \text{UM } 27{,}566.45$$

**Sintaxis**

**VA**(**tasa**;**nper**;**pago**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VF | Tipo | VA |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.09 | 28 | -2,500 | | 1 | 27,566.45 |

**Solución:** (Calculando el valor final o futuro)
C = 2,500; n = 28; i = 0.09; VF = ?

2º Para el cálculo del VF aplicamos la fórmula [27]:

$$[27]\quad \boldsymbol{VF} = 2{,}500 * \left\langle \frac{1.09^{28}-1}{0.09} \right\rangle * (1.09) = 307{,}838.39$$

**Sintaxis**

**VF**(**tasa**;**nper**;**pago**;va;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VA | Tipo | VF |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.09 | 28 | -2,500 | | 1 | 307,838.39 |

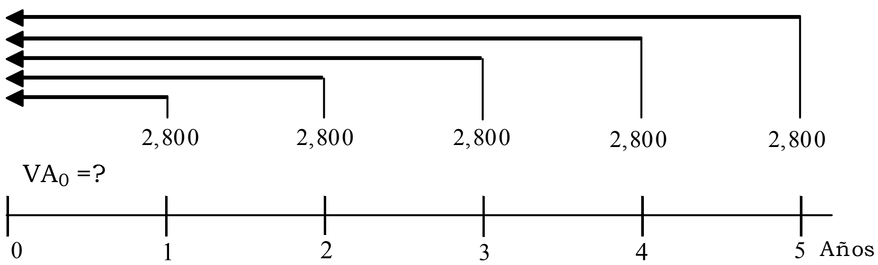
**Respuesta:**
El VA y VF de una renta de 4 cuotas anuales anticipadas de UM 2,500 valoradas 7 años después de iniciada es:

VA = UM 27,556.45 y
VF = UM 307,838.39

**Ejercicio 91 (FAS-FCS, VA y VF de anualidades vencidas y anticipadas)**
¿Cuánto debo invertir hoy y cuánto tendré al final al 7% compuesto anualmente para poder retirar UM 2,800 al final o principio de cada uno de los cinco años que dura el negocio?

**Solución: VA de anualidades pospagables y prepagables**
C = 2,800; i = 0.07; n = 5; VA = ?

Calculamos el VA pospagable aplicando la fórmula [24] o la función VA:



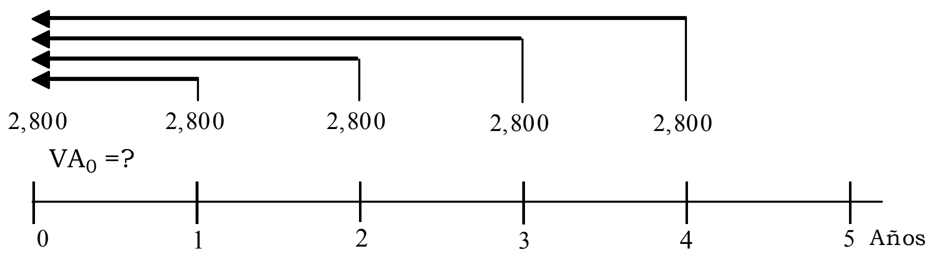

$$[24]\quad \boldsymbol{VA} = 2{,}800\ \left\langle \frac{(1+0.07)^{5}-1}{0.07(1+0.07)^{5}} \right\rangle = \text{ UM } 11{,}480.55$$

**Sintaxis**

**VA(tasa;nper;pago;**vf;tipo)

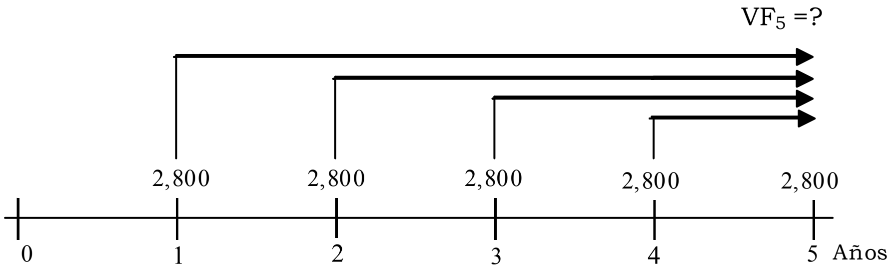
| Tasa | Nper | Pago | VF | Tipo | VA |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.07 | 5 | -2,800 | | | 11,480.55 |

Multiplicando el resultado anterior por 1.07 obtenemos el VA prepagable:




**VA -** POSPAGABLE = 11,480.55*1.07 = UM 12,284.19

**Solución: VF de anualidades pospagable y prepagables**
C = 2,800; i = 0.07; n = 5; VF = ?



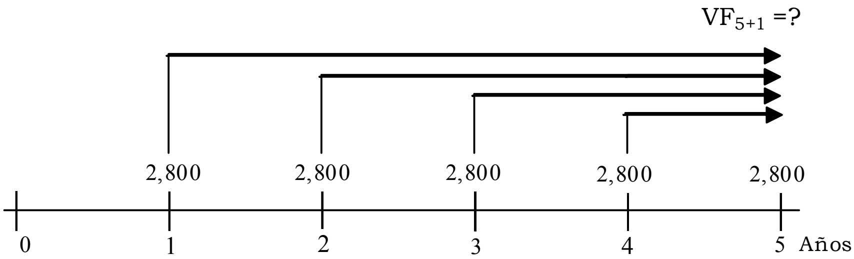

[27] $\boldsymbol{VF} = 2{,}800\left\langle\frac{(1.07)^{5}-1}{0.07}\right\rangle =$ UM 16,102.07

**Sintaxis**

**VF(tasa;nper;pago**;va;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VA | Tipo | VF |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.07 | 5 | -2,800 | | | 16,102.07 |

Multiplicando el resultado anterior por 1.07 obtenemos el VF prepagable:




**VF**PREPAGABLE **=** 16,102.07*1.07 = UM 17,229.21

**Respuesta:**

| | | |
|---|---|---|
| El monto a invertir hoy en cuotas vencidas es | UM | 11,480.55 |
| El monto a invertir hoy en cuotas anticipadas es | UM | 12,284.19 |
| El monto que tendré con cuotas vencidas es | UM | 16,102.07 |
| El monto que tendré con cuotas anticipadas es | UM | 17,229.21 |

### 1.2.5. Anualidades Diferidas

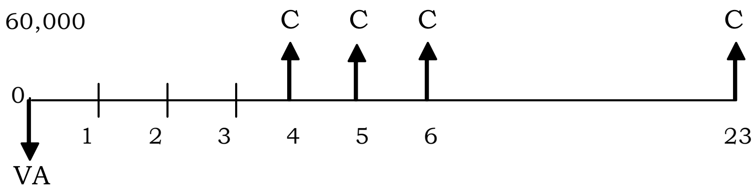
Diferir (Del lat. differre). Aplazar la ejecución de un acto.

Son aquéllas anualidades valoradas con posterioridad a su origen. El tiempo que transcurre entre el origen de la anualidad y el momento de valoración es el período de diferimiento, gracia o carencia.

Para valorar la anualidad diferida, primero calculamos la anualidad en su origen; considerándola como anualidad inmediata determinamos el valor actual; posteriormente descontamos el valor actual (como un solo capital) hasta el momento t elegido, a interés compuesto y a la tasa de interés vigente durante el período de diferimiento.
El diferimiento únicamente afecta al valor actual, el valor futuro es calculado como una anualidad inmediata.
Las fórmulas para este tipo de anualidades son las mismas que para las rentas vencidas y anticipadas con la diferencia que éstas tienen períodos de gracia.

**Ejercicio 92 (Anualidad diferida)**
Compramos hoy un producto a crédito por UM 60,000, para pagar en 20 cuotas trimestrales, el primer abono lo hacemos al año de adquirido. Determinar la renta asumiendo una tasa anual de 32%.

**Solución**:
VA = 60,000; n = 20; i = (0.32/4) = 0.08; CPAGOS = ?




Para calcular el valor de cada cuota aplicamos en forma combinada las fórmulas [19] y [25]:

$$\boldsymbol{C} = 60{,}000(1.08)^3 * \left\langle \frac{0.08 * 1.08^{20}}{1.08^{20}-1} \right\rangle = \text{UM } 7{,}698.27$$

Finalmente, elaboramos el cronograma de pagos:

**CRONOGRAMA DE PAGOS**

| Meses | SALDO INICIAL | INTERES | AMORTIZ. | PAGOS | SALDO FINAL |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | 60,000 |
| 1 | 60,000 | 4,800 | | | 64,800 |
| 2 | 64,800 | 5,184 | | | 69,984 |
| 3 | 69,984 | 5,599 | | | 75,583 |
| 4 | 75,583 | 6,047 | 1,652 | 7,698.27 | 73,931 |
| 5 | 73,931 | 5,914 | 1,784 | 7,698.27 | 72,147 |
| 6 | 72,147 | 5,772 | 1,926 | 7,698.27 | 70,221 |
| 7 | 70,221 | 5,618 | 2,081 | 7,698.27 | 68,140 |
| 22 | 13,728 | 1,098 | 6,600 | 7,698.27 | 7,128 |
| 23 | 7,128 | 570 | 7,128 | 7,698.27 | 0 |

Como vemos, el primer pago lo hacemos en el trimestre 4 que es el final del primer año, hay tres períodos libres o de gracia con acumulación de intereses. Luego, la anualidad se inicia en el trimestre 3 (con un saldo de UM 75,583) y termina en el 23, el valor actual de ésta operación financiera es el punto 0 donde está ubicada la fecha focal (UM 60,000).

**Respuesta:**
El valor de cada pago es UM 7,698.27

2. ¿Cómo cambiar la tasa de interés?

Es importante aclarar cómo la tasa de interés puede variarse. Para demostrarlo utilizaremos el siguiente ejemplo:

**Ejercicio 93 (FRC)**
Tenemos la posibilidad de efectuar la compra de activos que valen UM 200,000 al contado. Como no disponemos de ese monto decidimos por la compra a crédito según las siguientes condiciones de venta: cuota inicial de UM 20,000 y cuatro cuotas iguales futuras de UM 52,000 cada una.

**Solución:**
VA = 180,000; C = 52,000; n = 4; i = ?

Como las cuotas son uniformes, para el cálculo de **i** aplicamos la función financiera TASA de Excel:

**Sintaxis**
**TASA**(**nper**;**pago**;**va**;vf;tipo;estimar)

| Nper | Pago | VA | VF | Tipo | Tasa |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 52,000 | -180,000 | | | 6% |

Obsérvese que el valor actual es UM 180,000 y no UM 200,000, las cuatro cuotas de UM 52,000 se generan sólo por adeudar UM 180,000.
Según la función financiera TASA de Excel, el valor de **i** corresponde al 6%. No obstante, comparando este resultado con otro de un proveedor que ofrece el mismo activo en venta, con la misma cuota inicial, el mismo plazo y con el 0% de interés, con un precio al contado de UM 228,000, podría estimarse que esta opción es mejor a la anterior. Sin embargo, al pagar los UM 20,000 de cuota inicial, nuestro saldo deudor sería de UM 208,000 y como no hay recargo por intereses, las cuatro cuotas corresponden a UM 52,000 cada una (208,000 dividido entre cuatro). Si calculamos el interés, el resultado dará efectivamente 0%. Ambas alternativas requieren la misma cuota inicial y el mismo número de cuotas futuras por el mismo monto.
Como vemos, para bajar la tasa de interés basta con subir el precio contado de una venta al crédito.

## 3. ¿Cómo calcular el valor de i cuando tratamos con anualidades?

Cuando tratamos con anualidades (Factores: 3º, 4º, 5º y 6º) y la incógnita buscada es la tasa de interés **i** debemos aplicar la función financiera TASA de Excel. Para calcular el valor de **n** en todos los factores financieros contamos con las fórmulas respectivas.

**Ejercicio 94 (FCS)**
Existe la posibilidad de invertir, abonando ocho cuotas iguales de UM 5,000 cada una y al efectuar el último abono tendremos la suma de UM 48,600. ¿Cuál es la tasa de interés de esta inversión?.

**Solución:**
VF = 48,600; C = 5,000; n = 8; i = ?

**Sintaxis**
**TASA**(**nper**;**pago**;**va**;vf;tipo;estimar)

| Nper | Pago | VA | VF | Tipo | Tasa |
|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 5,000 | | -48,600 | | 5.50% |

**Respuesta:**
La tasa de interés de la inversión es 5.50% en cada período de capitalización.

**Ejercicio 95 (FRC)**
Supongamos una deuda a pagar en seis cuotas mensuales iguales de UM 8,000 cada una, con el primer vencimiento dentro de un mes. Pero como pagamos toda la deuda al contado nos rebajan el total de la obligación a UM 35,600. Encontrar la tasa de interés.

**Solución:**
VA = 35,600; C = 8,000; n = 6; i = ?

1º Aplicando la función financiera TASA de Excel, tenemos:

**Sintaxis**
**TASA**(**nper**;**pago**;**va**;vf;tipo;estimar)

| Nper | Pago | VA | VF | Tipo | Tasa |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 8,000 | -35,600 | | | 9.27% |

**Respuesta:**
La tasa de interés mensual buscada es 9.27%.

## 4. Valor actual de flujos diferentes

Hasta ahora, para la solución de los problemas hemos contado con las fórmulas deducidas para una serie de pagos iguales. En la práctica, no son tan fáciles. Al evaluar proyectos es común encontrar que los flujos de caja estimados difieren en distintos períodos, debido a las hipótesis de crecimiento, a la reposición de maquinaria y equipo y a la inclusión de los valores de desecho planificadas en el proyecto. Realizamos la actualización o capitalización de estos flujos variables aplicando individualmente la fórmula [21] a cada valor y sumando o restando los resultados de cada uno, según su signo.
El ejemplo desarrollado a continuación es un caso típico de **serie de pagos desiguales**. Para calcular el valor de **i**, en estos casos, aplicaremos la función financiera **TIR** de Excel.

**Ejercicio 96 (Flujo de caja variable)**
Un fabricante de productos para enfrentar mayores niveles de producción, lleva a cabo un detallado estudio de factibilidad para la ampliación de su capacidad instalada. El proyecto desarrolla un análisis financiero completo considerando muchos factores, tales como las fluctuaciones de las existencias, los precios, los costos, el volumen, etc. Expresamos el efecto financiero del proyecto de ampliación para 10 años, en el siguiente flujo, inserto después de la pregunta: Deseamos saber: ¿cuál es el tipo efectivo de rédito del proyecto?.

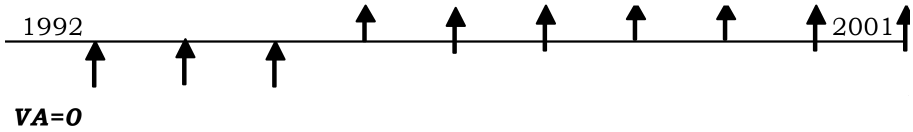
UM 1'104,306 el primer año
1'952,185 el segundo año
1'180,458 el tercer año

para recibir un rédito de:

UM 648,531 el cuarto año
1'029,758 el quinto año
1'538,789 el sexto año
...
...
2'645,783 el décimo año?

Con seguridad, si el dinero es colocado en una libreta de ahorros, el retiro de UM 2'645,783 a los diez años saldaría con exactitud la cuenta, siempre que el interés estuviera compuesto anualmente al tipo de interés por calcular.
En realidad los gastos e ingresos los efectuamos durante el año, para fines de comparación supondremos que éstos los hacemos al final de cada año. Requerimos también un momento determinado como «el presente», admitamos que es el inicio de 1992. (estos supuestos son arbitrarios). Podíamos haber estimado los gastos efectuados en la mitad de cada año. El presente podría establecerse como el momento de seguir o no con el proyecto).

**Diagrama**




Al inicio de 1992 el valor actual es cero. En este caso usaremos una y otra vez la fórmula [21]. Empleamos signos negativos para diferenciar los gastos o salidas de caja de los ingresos o efectivo producido.
Con un interés concordante con el proyecto, el valor actual de toda la serie será igual a cero, es decir:

VA = 0 = VA1 + VA2 + VA3 + ... + VA10

$$0 = -\frac{1'104{,}306}{(1+i)} - \frac{1'952{,}185}{(1+i)^2} - \frac{1'180{,}458}{(1+i)^3} + \frac{648{,}531}{(1+i)^4} + \frac{1'029{,}758}{(1+i)^5}$$

$$+\frac{1'538{,}789}{(1+i)^6} + \frac{1'814{,}367}{(1+i)^7} + \frac{1'651{,}243}{(1+i)^8} + \frac{856{,}123}{(1+i)^9} + \frac{2'645{,}783}{(1+i)^{10}}$$

**FLUJO DE CAJA**

| Año | Saldos netos |
|---|---|
| 1992 | -1,104,306 |
| 1993 | -1,952,185 |
| 1994 | -1,180,458 |
| 1995 | 648,531 |
| 1996 | 1,029,758 |
| 1997 | 1,538,789 |
| 1998 | 1,814,367 |
| 1999 | 1,651,243 |
| 2000 | 856,123 |
| 2001 | 2,645,783 |

Aplicando las funciones TIR y VAN de Excel, tenemos:

**Sintaxis**
**TIR**(**valores**;estimar)

| 1992 | 1993 | 1994 | ... | 1999 | 2000 | 2001 | TIR |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -1,104,306 | -1,952,185 | -1,180,458 | | 1,651,243 | 856,123 | 2,645,783 | **18.0437%** |

**Sintaxis**
**VNA**(**tasa**;**valor1**;valor2; ...)

| 1992 | 1993 | 1994 | ... | 1999 | 2000 | 2001 | VAN (18.0347%) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -1,104,306 | -1,952,185 | -1,180,458 | | 1,651,243 | 856,123 | 2,645,783 | **0** |

Para encontrar el valor de **i** en esta ecuación, utilizamos la función financiera TIR de Excel, la misma que arroja una tasa de rendimiento de 18.0437%, con cuyo porcentaje la suma de los valores actuales de la ecuación cumple la condición señalada, esto es **VA = 0**, como apreciamos aplicando el VAN.

## 5. Gradientes

En matemáticas financieras gradientes son anualidades o serie de pagos periódicos, en los cuales cada pago es igual al anterior más una cantidad; esta cantidad puede ser constante o proporcional al pago inmediatamente anterior. El monto en que varía cada pago determina la clase de gradiente:
Si la cantidad es constante el gradiente es **aritmético** (por ejemplo cada pago aumenta o disminuye en UM 250 mensuales sin importar su monto).
Si la cantidad en que varía el pago es proporcional al pago inmediatamente anterior el gradiente es **geométrico** (por ejemplo cada pago aumenta o disminuye en 3.8% mensual)
La aplicación de gradientes en los negocios supone el empleo de dos conceptos dependiendo del tipo de negocios:
**Negocios con amortización (crédito),** tipo en el que partimos de un valor actual, con cuotas crecientes pagaderas al vencimiento y con saldo cero al pago de la última cuota.
**Negocios de capitalización (ahorro**), tipo en el que partimos de un valor actual cero con cuotas crecientes acumulables hasta alcanzar al final del plazo un valor futuro deseado.
**Gradientes diferidos**. Son aquellos valorados con posterioridad a su origen. El tiempo que transcurre entre el origen del gradiente y el momento de valoración es el período de diferimiento o de gracia.
**Gradientes anticipados o prepagables.** Aquellos valorados anticipadamente a su final. El tiempo que transcurre entre el final del gradiente y el momento de valoración es el período de anticipación. Pago o cobro por adelantado. Los valores actuales y futuros de los gradientes anticipados (adelantados) o prepagables son calculadas a partir de las vencidas o pospagables multiplicado por **(1 + i)**.

### 5.1. Gradiente uniforme

La progresión aritmética, quiere decir, cada término es el anterior aumentado (o disminuido) en un mismo monto.
El gradiente uniforme es una sucesión de flujos de efectivo que aumenta o disminuye en forma constante. El flujo de efectivo, bien sea ingreso o desembolso, cambia por la misma cantidad aritmética cada período de interés. El gradiente (**G**) es la **cantidad** del aumento o de la disminución. El gradiente (**G**) puede ser positivo o negativo. Las ecuaciones generalmente utilizadas para gradientes uniformes, pospagables son:

[33] $$\boldsymbol{VA} = \frac{\boldsymbol{G}}{\boldsymbol{i}}\left\langle \frac{(1+\boldsymbol{i})^{n}-1}{\boldsymbol{i}(1+\boldsymbol{i})^{n}} - \frac{\boldsymbol{n}}{(1+\boldsymbol{i})^{n}} \right\rangle$$

[De 33] $$\boldsymbol{G} = \frac{\boldsymbol{VA}}{\frac{1}{\boldsymbol{i}}\left\langle \frac{(1+\boldsymbol{i})^{n}-1}{\boldsymbol{i}(1+\boldsymbol{i})^{n}} - \frac{\boldsymbol{n}}{(1+\boldsymbol{i})^{n}} \right\rangle}$$

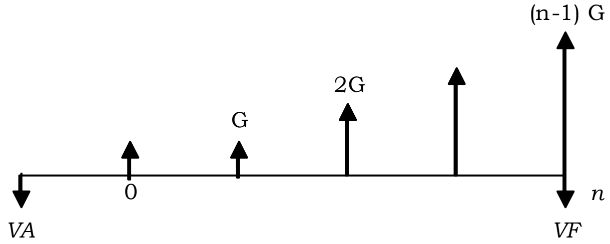
[33A] $$\boldsymbol{VA} = \boldsymbol{C} * \left\langle \frac{1-(1+\boldsymbol{i})^{-n}}{\boldsymbol{i}} \right\rangle + \frac{\boldsymbol{G}}{\boldsymbol{i}} * \left\langle \frac{1-(1+\boldsymbol{i})^{n-1}-1}{\boldsymbol{i}} - n \right\rangle * (1+\boldsymbol{i})^{-n}$$

[34] $$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{G}\left(\frac{1}{\boldsymbol{i}} - \frac{\boldsymbol{n}}{(1+\boldsymbol{i})^{n}-1}\right) \xrightarrow{[\text{De } 34[} \boldsymbol{G} = \frac{\boldsymbol{C}}{\left\langle \frac{1}{\boldsymbol{i}} - \frac{\boldsymbol{n}}{(1+\boldsymbol{i})^{n}-1} \right\rangle}$$

[35] $$\boldsymbol{VF} = \frac{\boldsymbol{G}}{\boldsymbol{i}}\left\langle \frac{(1+\boldsymbol{i})^{n}-1}{\boldsymbol{i}} - \boldsymbol{n} \right\rangle$$

[35A] $$\boldsymbol{VF} = \boldsymbol{C} * \left\langle \frac{(1+\boldsymbol{i})^{n}-1}{\boldsymbol{i}} \right\rangle + \frac{\boldsymbol{G}}{\boldsymbol{i}} * \left\langle \frac{(1+\boldsymbol{i})^{n-1}-1}{\boldsymbol{i}} - \boldsymbol{n} \right\rangle$$

Permiten calcular el valor actual de un gradiente aritmético creciente o decreciente, conociendo la tasa de interés periódica, el gradiente y el plazo. Sólo tienen aplicación en el siguiente flujo de caja:



Para el cálculo de los gradientes prepagables, basta con multiplicar por (1 + i) el valor actual o futuro (según el caso) del gradiente pospagable.

**Ejercicio 97 (Valor actual de un gradiente arimético pospagable)**
Calcular el valor de contado de un producto adquirido con financiamiento. Con una cuota inicial de UM 1,500 y el saldo en 24 armadas mensuales que aumentan en UM 80 cada mes, siendo de UM 250 la primera. La tasa de interés es de 2.8% mensual.

**Solución:**
C = 250; n =24; i = 0.028; G = 80; VA = ?

1º Calculamos el valor actual del gradiente:

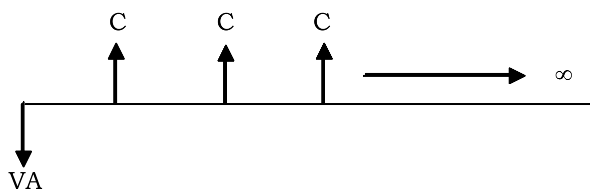
$$[33] \quad \boldsymbol{VA} = \frac{80}{0.028} * \left\langle \frac{(1+0.028)^{24}-1}{i(1+0.028)^{24}} - \frac{24}{(1+0.028)^{24}} \right\rangle = \text{UM} \quad 17{,}740$$

2º Calculamos el valor actual de la serie:

$$[24] \quad \boldsymbol{VA} = 250\left\langle \frac{(1.028)^{24}-1}{0.028(1.028)^{24}} \right\rangle = \text{UM} \quad 4{,}327$$

Finalmente, calculamos el valor de contado del producto, sumando los valores actuales: 1,500 + 17,740 + 4,327 = UM 23,567

**5.2. Anualidades perpetuas o costo capitalizado**
Son anualidades que tienen infinito número de pagos, en la realidad, las anualidades infinitas no existen, todo tiene un final; sin embargo, cuando el número de pagos es muy grande asumimos que es infinito.
Este tipo de anualidades son típicas cuando colocamos un capital y solo retiramos intereses.




Para el cálculo de la anualidad en progresión geométrica perpetua operamos, a través del límite cuando el número de términos de la renta (n) tiende a infinito. Siendo esto lo que caracteriza a una perpetuidad, de forma que el valor de los últimos flujos al descontarlos es insignificante, a saber:

$$\boldsymbol{VA} = \boldsymbol{C}\left\langle \frac{(1+\boldsymbol{i})^{n}-1}{\boldsymbol{i}(1+\boldsymbol{i})^{n}} \right\rangle$$

Ingresando la variable C dentro del paréntesis, nos queda:

$$\boldsymbol{VA} = \left\langle \frac{\boldsymbol{C}}{\boldsymbol{i}} - \frac{\boldsymbol{C}}{\boldsymbol{i}(1+\boldsymbol{i})^{n}} \right\rangle$$

El término $\frac{\boldsymbol{C}}{\boldsymbol{i}(1+\boldsymbol{i})^{n}}$ cuando n es muy grande hace tender su valor a cero por lo tanto el valor de la anualidad de muchos términos, llamada perpetuidad, la calculamos con la fórmula de la serie infinita:

$$[36] \quad \boldsymbol{VAP} = \frac{\boldsymbol{C}}{\boldsymbol{i}}$$

Fórmula o ecuación de la serie infinita, sirve para calcular el valor actual de una perpetuidad, conociendo la tasa de interés periódica y la cuota.

Las perpetuidades permiten calcular rápidamente el valor de instrumentos de renta fija (VAP) por muchos periodos, «C» es el rendimiento periódico e «i» la tasa de interés para cada periodo. Ejemplos de perpetuidades, son las inversiones inmobiliarias en que existe un pago de alquiler por arrendamiento, las pensiones o rentas vitalicias, los proyectos de obras públicas, carreteras, presas, valuación de acciones, etc.
Para el mantenimiento a perpetuidad, el capital debe permanecer intacto después de efectuar el pago anual.

**Ejercicio 98 (Costo capitalizado)**
Deseo saber cuánto debo ahorrar hoy, para obtener UM 1,500 mensuales si el interés que paga la entidad financiera es el 1% mensual.

**Solución:**
i = 0.01; C = 1,500; VAP = ?

[36] $\boldsymbol{VAP} = \frac{1{,}500}{0.01} = \text{ UM } 150{,}000$

**Respuesta:** Debo ahorrar hoy UM 150,000 para obtener mensualmente UM 1,500.
**Ejercicio 99 (Anualidades perpetuas)**
Determinar el valor actual de una renta perpetua de UM 5,000 mensuales, asumiendo un interés de 9% anual.

**Solución**:
C = 5,000; i = (0.42/12) = 0.0075; VAP = ?

[36] $\boldsymbol{VAP} = \frac{5{,}000}{0.0075} = \text{UM } 666{,}667$

**Valor actual de un gradiente perpetuo**
Expresa el valor actual de un gradiente perpetuo, ya sea aritmético o geométrico, creciente o decreciente, conociendo la tasa de interés periódica y el gradiente. Por lo general el gradiente perpetuo solo se calcula para cuotas vencidas.

Manipulando la fórmula [33], obtenemos la fórmula:

[33] $\boldsymbol{VA} = \frac{\boldsymbol{G}}{\boldsymbol{i}}\left\langle \frac{(1+\boldsymbol{i})^{n}-1}{\boldsymbol{i}(1+\boldsymbol{i})^{n}} - \frac{\boldsymbol{n}}{(1+\boldsymbol{i})^{n}} \right\rangle$, de donde:

Cuando n tiende a $\infty$ $\quad \frac{1}{(1+\boldsymbol{i})^{n}} \rightarrow 0$

remplazando en la ecuación:

[37] $\boldsymbol{VA} = \frac{\boldsymbol{G}}{\boldsymbol{i^2}}$

**Ejercicio 100 (Valor actual de un gradiente geométrico perpetuo)**
Las autoridades distritales desean conocer cuánto deben depositar hoy en una institución financiera que paga el 16% de interés, para solventar a perpetuidad los gastos anuales de mantenimiento de la carretera principal, estimados en UM 500,000 el primer año y que aumenta en UM 150,000 cada año.

Solución:
i = 0.16; C = 500,000; G = 150,000; VA = ?

Aplicando las fórmulas [36] y (37] calculamos el valor del depósito hoy, para sufragar a perpetuidad los gastos de mantenimiento de la carretera:

$$\boldsymbol{VA} = \frac{500{,}000}{0.16} + \frac{150{,}000}{0.16^2} = \text{UM } 8'984{,}375.00$$

**Respuesta:**
El monto que las autoridades distritales deben depositar hoy es UM 8'984,375, para garantizar el mantenimiento de la carretera.

### 5.3. Gradiente geométrico

Esta serie corresponde al flujo de caja que cambia en porcentajes constantes en períodos consecutivos de pago. En la progresión geométrica cada término es el anterior multiplicado por un mismo número denominado razón de la progresión, representado por E.

#### 5.3.1. Valor actual de un gradiente en escalera

Devuelve el valor actual de un gradiente en "escalera", conociendo la tasa de interés periódica, el gradiente, el plazo total y el valor de la serie de pagos iguales.
Un gradiente en escalera es aquel en el cual se presenta una serie de pagos iguales (por ejemplo cuatro cuotas mensuales) y al terminar ocurre un incremento y vuelve a presentarse la serie mencionada.
Las fórmulas que corresponden al flujo de caja que cambia en porcentajes constantes en períodos consecutivos de pago son:

$$[38]\quad \boldsymbol{VA_E} = \frac{\boldsymbol{Q}\left\langle \frac{(1+\boldsymbol{E})^{n}}{(1+\boldsymbol{i})^{n}} - 1 \right\rangle}{\boldsymbol{E} - \boldsymbol{i}} \quad \text{cuando } \boldsymbol{E} \neq \boldsymbol{i}$$

Al simplificarse, llegamos a la suma aritmética de n veces la unidad, quedando expresado el valor actual así:

$$[39]\quad \boldsymbol{VA}_{E} = \boldsymbol{Q}\left\langle \frac{\boldsymbol{n}}{1+\boldsymbol{E}} \right\rangle \quad \text{cuando } \boldsymbol{E} = \boldsymbol{i}$$

Fórmula del valor actual del gradiente perpetuo:

$$[40]\quad \boldsymbol{VA_E} = \frac{\boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{E} - \boldsymbol{i}}$$

Símbolos:
**VAE** = Valor actual de la serie escalera
**Q** = Cantidad de dinero en el año 1
**i** = Tasa de valoración
**E** = Tasa de escalada

**En el ejemplo 100**, considerando una tasa de escalada (gradiente) de 16%, calculamos el VA del gradiente perpetuo:

**Solución: (Valor actual de un gradiente perpetuo en escalada pospagable)**
i = 0.16; C = 500,000; E = 0.08; VA = ?

Aplicando la fórmula [40] calculamos el valor del depósito que tienen que hacer las autoridades hoy, para sufragar a perpetuidad los gastos de mantenimiento de la carretera:

$$[40]\quad \boldsymbol{VA}_{E} = \frac{500{,}000}{0.12-0.16} = \text{ UM } 12'500{,}000$$

**Ejercicio 101 (Valor actual de un gradiente en escalada prepagable)**
¿Cuál es el valor actual de un crédito al 3.5% mensual que debe pagarse en 12 cuotas de UM 600 cada una, si cada cuatro meses aumentan en 6%?

**Solución:**
Q = 600; E = 0.06; i = 0.035; n = 12/3 = 4; VA = ?

El crédito es pagado en 12 cuotas anticipadas, las cuales cada cuatro meses tienen un incremento del 6%, generando los siguientes flujos:

C1...3 = 600; C5...8 = (600*1.06) = 636 ; C9...12 = (636*1.06) = 674.16

1º La primera serie es un caso de series uniformes a valor actual, opera con la fórmula (24). Las dos últimas series corresponden a gradientes geométricos, opera con la fórmula (38). Luego para obtener el VA de la operación financiera debemos aplicar combinadamente la fórmula (24) y la (38):

$$\boldsymbol{VA} = 600\left\langle\frac{1.035^4\text{-}1}{0.035*1.035^4}\right\rangle + \frac{600\left\langle\frac{1.06^4}{1.035^4}\text{-}1\right\rangle}{0.06\text{-}0.035} + \frac{636\left\langle\frac{1.06^4}{1.035^4}\text{-}1\right\rangle}{0.06\text{-}0.035} =$$

$$2{,}203.85 + 2{,}404.22 + 2{,}548.47 = \text{UM } 7{,}156.54$$

Como se trata de cuotas anticipadas o prepagables el VA obtenido lo multiplicamos por (1 + i):

**VA** = 7,156.54 * 1.035 = UM 7,407.01

**Respuesta:**
El valor actual del crédito prepagable es de UM 7,407.01

**5.4. Valor futuro de gradientes**
A partir del VA actual obtenido con las fórmulas respectivas, calculamos el valor futuro de una serie con gradiente, ya sea aritmético o geométrico, creciente o decreciente, conociendo la tasa de interés periódica, el gradiente y el plazo.
El valor futuro de gradientes, tiene que ver con negocios de capitalización, para los cálculos partimos de cero hasta alcanzar un valor ahorrado después de un plazo determinado.

**Ejercicio 102 (Valor futuro de un gradiente prepagable)**
Un pequeño empresario ahorra mensualmente UM 3,000 en una institución financiera que paga 1.5% mensual. Asimismo, tiene proyectado incrementar cada depósito en 8% por período. ¿Cuánto tendrá ahorrado al final del año?

**Solución:**
Q = 3,000; i = 0.015; E = 0.08; n = 12; VA = ?; VF = ?

1º Calculamos el VA prepagable de los ahorros aplicando la fórmula [38]:

$$[38]\quad \boldsymbol{VA}_{\text{E}} = \frac{3{,}000\left\langle\frac{(1+0.08)^{12}}{(1+0.015)^{12}}\text{-}1\right\rangle}{0.08\text{-}0.015} * 1.015 = \text{UM } 51{,}819.62$$

2º A partir del VA obtenido, calculamos el VF prepagable:

[19] **VF** = 51,819.62*(1 + 0.015)12 = UM 61,956.48

**Sintaxis**
**VF**(**tasa**;**nper**;**pago**;va;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VA | Tipo | VF |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.02 | 12 | | -51,819.62 | | 61,956.48 |

3º Por comprobación elaboramos la tabla de amortización de esta operación:

| MES | SALDO INICIAL | AHORRO | INTERES | SALDO FINAL |
|---|---|---|---|---|
| 0 | | 3,000.00 | 0.00 | 3,000.00 |
| 1 | 3,000.00 | 3,240.00 | 45.00 | 6,285.00 |
| 2 | 6,285.00 | 3,499.20 | 94.28 | 9,878.48 |
| 3 | 9,878.48 | 3,779.14 | 148.18 | 13,805.79 |
| 4 | 13,805.79 | 4,081.47 | 207.09 | 18,094.34 |
| 5 | 18,094.34 | 4,407.98 | 271.42 | 22,773.74 |
| 6 | 22,773.74 | 4,760.62 | 341.61 | 27,875.97 |
| 7 | 27,875.97 | 5,141.47 | 418.14 | 33,435.58 |
| 8 | 33,435.58 | 5,552.79 | 501.53 | 39,489.91 |
| 9 | 39,489.91 | 5,997.01 | 592.35 | 46,079.27 |
| 10 | 46,079.27 | 6,476.77 | 691.19 | 53,247.23 |
| 11 | 53,247.23 | 6,994.92 | 798.71 | 61,040.86 |
| 12 | 61,040.86 | 0.00 | 915.61 | 61,956.47 |

SALDO INICIAL = SALDO FINAL
AHORRO = SALDO INICIAL * 1,08
INTERES = SALDO INICIAL * 0,015

**Respuesta:**
El monto que tendrá ahorrado al final del año es UM 61,956.47. Los depósitos son anticipados (el primero corresponde al mes cero) pero sólo reciben intereses un mes después de estar consignados.

### 5.4.1. Valor futuro de un gradiente en escalera

Es una serie de pagos iguales que al terminar tienen una variación y vuelve a presentarse la serie de pagos iguales.
El cálculo del VF de un gradiente en "escalera", creciente o decreciente, es posible cuando conocemos la tasa de interés periódica, el gradiente, el plazo total y el valor de la serie de pagos iguales. Estos gradientes también son de capitalización.

**Ejercicio 103 (Valor futuro de un gradiente aritmético)**
Una pequeña empresa metalmecánica, vende mensualmente 150 unidades de su producción, a un precio de UM 200/unidad el primer año, a UM 250/unidad el segundo año, a UM 300/unidad el tercer año y así sucesivamente. El dueño de la empresa ahorra mensualmente la doceava parte del ingreso por ventas en una entidad financiera que paga el 1.8% mensual. Calcular el monto total que la empresa tendrá ahorrado al final de cinco años.

**Solución:**
UUVV = 150; PV = 200, 250, 300, 350 y 400; G = 50; AHORRO = VT/12

1º Aplicando Excel calculamos los ahorros mensuales:

| SERIE | UNIDADES VENDIDAS | PRECIO UNIDAD | VENTA TOTAL | AHORRO |
|---|---|---|---|---|
| 1º AÑO | 150 | 200 | 30,000.00 | 2,500.00 |
| 2º AÑO | 150 | 250 | 37,500.00 | 3,125.00 |
| 3º AÑO | 150 | 300 | 45,000.00 | 3,750.00 |
| 4º AÑO | 150 | 350 | 52,500.00 | 4,375.00 |
| 5º AÑO | 150 | 400 | 60,000.00 | 5,000.00 |

VENTA TOTAL = UNIDADES VENDIDAS * PRECIO UNIDAD
AHORRO = VENTA TOTAL / 12

Es decir, los doce primeros meses ahorramos UM 2,500 mensuales, el segundo 3,125 y así sucesivamente; luego, tenemos cinco series de doce cuotas iguales, que cada año se incrementan en (3,125 - 2,500) = UM 625 (gradiente uniforme). Con esta información elaboramos la tabla, aplicando independientemente las fórmulas [27] y [19] a cada serie y sumando los totales:

p= 48, 36, 24, 12 y 0; i = 0.018; VF = ?

| SERIE | AHORRO MENSUAL C | [27] $\boldsymbol{VF}=\left(\boldsymbol{C}\left\langle\frac{(1+i)^n-1}{i}\right\rangle\right)$ | | [19] $\boldsymbol{VF} = \boldsymbol{VA}(1+\boldsymbol{i})^{p}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1º AÑO | 2,500 | 13.2623 | 33,156 | 78,064 |
| 2º AÑO | 3,125 | 13.2623 | 41,445 | 78,775 |
| 3º AÑO | 3,750 | 13.2623 | 49,733 | 76,312 |
| 4º AÑO | 4,375 | 13.2623 | 58,022 | 71,873 |
| 5º AÑO | 5,000 | 13.2623 | 66,311 | 66,311 |
| | | TOTAL VALOR FUTURO | AHORROS | 371,336 |

1º SERIE : $\boldsymbol{VF}=2{,}500\left\langle\frac{1.018^{12}-1}{0.018}\right\rangle=$ UM 33,156

$$\boldsymbol{VF}=\left\langle 33{,}156(1.08)^{(60-12)}\right\rangle= \text{ UM } 78{,}064$$

2º SERIE: $\boldsymbol{VF}=3{,}125\left\langle\frac{1.018^{12}-1}{0.018}\right\rangle=$ UM 41,425

$$\boldsymbol{VF}=\left\langle 41{,}425(1.08)^{(60-24)}\right\rangle= \text{ UM } 78{,}775$$

Aplicamos la fórmula [19] para capitalizar el valor futuro de cada serie de 12 meses. Partiendo del final del mes doce en cada serie (VA) capitalizamos estos totales hasta el tramo final (mes 60) en cada caso.

**Respuesta:**
El monto que el empresario tendrá ahorrado al final del quinto año es UM 371,336.

**5.4.2. Pago de un gradiente**
Es el primer pago de una serie con gradiente aritmético o geométrico, creciente o decreciente, que se obtiene conociendo la tasa de interés periódica, el plazo, el valor presente o el valor futuro. Presente en problemas de amortización y capitalización.
En los problemas de amortización, es posible utilizar el valor presente y valor futuro, ambos se pueden presentar simultáneamente, como es el caso del leasing en el cual debemos amortizar un valor inicial (VA) y al final del plazo pagar un valor de compra (VF) para liquidar la operación.
Al confeccionar las tablas de amortización, en los problemas de capitalización, como partimos de un valor ahorrado igual a cero, para conseguir un valor futuro no utilizamos el valor inicial.

**Ejercicio 104 (Pago de un gradiente aritmético - AMORTIZACION)**
Con urgencia necesitamos financiamiento por UM 50,000, para ser pagado en seis cuotas mensuales que disminuyan cada mes en UM 1,200 a una tasa de interés de 4.5% mensual. Calcular el valor de las cuotas a pagar.

**Solución**:
**VA** = 50,000; i = 0.045; n = 6; G = 1,200; C = ?

Confeccionamos la tabla de amortización de esta operación, la cuota mensual a pagar lo obtenemos con la herramienta BUSCAR OBJETIVO de Excel, conforme indicamos en el Capítulo 2, numeral 12, páginas 87 y 88 del presente libro:

| MESES | SALDO INICIAL | INTERES | AMORTIZ. | PAGO | SALDO FINAL |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | 50,000.00 |
| 1 | 50,000.00 | 2,250.00 | 10,290.04 | 12,540.04 | 39,709.96 |
| 2 | 39,709.96 | 1,786.95 | 9,553.10 | 11,340.04 | 30,156.86 |
| 3 | 30,156.86 | 1,357.06 | 8,782.99 | 10,140.04 | 21,373.87 |
| 4 | 21,373.87 | 961.82 | 7,978.22 | 8,940.04 | 13,395.65 |
| 5 | 13,395.65 | 602.80 | 7,137.24 | 7,740.04 | 6,258.42 |
| 6 | 6,258.42 | 281.63 | 6,258.42 | 6,540.04 | 0.00 |

Este es un problema de amortización, por cuanto partimos de un valor inicial (VA), a redimir en un plazo establecido. Al pagar la última cuota el saldo es cero.

**Ejercicio 105 (Pago de un gradiente geométrico - CAPITALIZACION)**
Una entidad financiera lanza una agresiva campaña publicitaria para captar ahorristas, ofrece el 24% anual. Un pequeño empresario sensibilizado por esta promoción desea saber cuánto debe ahorrar anualmente, para al final de 5 años tener disponibles UM 20,000, considerando que además, está en capacidad de incrementar la cuota anual en un 20%.

**Solución:**
**VF** = 20,000; i = 0.18; n = 5; E = 20%; C = ?

| MESES | SALDO INICIAL | CUOTA | INTERES | SALDO FINAL |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1,247 | | 1,247 |
| 1 | 1,247 | 1,496 | 299 | 3,042 |
| 2 | 3,042 | 1,795 | 608 | 5,445 |
| 3 | 5,445 | 2,154 | 1,307 | 8,906 |
| 4 | 8,906 | 2,585 | 2,137 | 13,628 |
| 5 | 13,628 | 3,102 | 3,271 | 20,000 |

INTERES = SALDO INICIAL*TASA INTERES
SALDO FINAL = SALDO INICIAL + CUOTA + INTERES
CUOTA ESCALADA = CUOTA UNIFORME*(1 + E)
CUOTA Y SALDO DE 20,000 = BUSCAR OBJETIVO

Como vemos, iniciamos con un saldo cero y terminamos con UM 20,000, pagando intereses al rebatir, sobre saldos acumulados a fin de cada mes.

**5.4.3. Pago en escalada conociendo el VF**
Utilizado solo para casos de amortización. Reiteramos que un gradiente en escalera presenta una serie de pagos iguales (por ejemplo 18 cuotas mensuales) y al terminar ocurre un incremento y vuelve a presentarse la serie mencionada.
Pago en escalada conociendo el VF, es calcular el valor de la primera cuota de un gradiente en "escalera", creciente o decreciente, conociendo el valor actual amortizable, la tasa de interés periódica, el gradiente, el plazo total y el valor de la serie de pagos iguales.

**Ejercicio 106 (Pago en escalada conociendo el VA)**
Determinar cuánto pagaríamos mensualmente por una vivienda valorizada en UM 35,000, financiada a 15 años, si la tasa de interés mensual es de 1.08% y la cuota aumenta cada año en 10%.

**Solución:**
VA = 35,000; n = (15*12) = 180; i = 0.0108; E = 0.10; C = ?

Resolvemos el caso elaborando la tabla de amortización del crédito:

| MESES | SALDO INICIAL | CUOTA | INTERES | AMORTIZA | SALDO FINAL |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | 35,000.00 |
| 1 | 35,000.00 | 261.56 | 379.17 | -117.61 | 35,117.61 |
| 2 | 35,117.61 | 261.56 | 380.44 | -118.88 | 35,236.48 |
| 12 | 36,366.06 | 261.56 | 393.96 | -132.40 | 36,498.46 |
| 13 | 36,498.46 | 287.72 | 395.40 | -107.68 | 36,606.14 |
| 14 | 36,606.14 | 287.72 | 396.57 | -108.85 | 36,714.99 |
| 24 | 37,749.26 | 287.72 | 408.95 | -121.23 | 37,870.49 |
| 25 | 37,870.49 | 316.49 | 410.26 | -93.77 | 37,964.27 |
| 179 | 1,954.73 | 993.27 | 21.18 | 972.10 | 982.63 |
| 180 | 982.63 | 993.27 | 10.65 | 982.63 | 0.00 |

INTERES = SALDO INICIAL*TASA INTERES
SALDO INICIAL = SALDO FINAL
SALDO FINAL = SALDO INICIAL - AMORTIZACION
CUOTA = BUSCAR OBJETIVO Cada año + 10%

**Respuesta:**
La cuota en el primer año es de UM 256.56, en el segundo año de 287.72 y en el tercer año de 316.49, es decir, el incremento es de 10%. En la tabla apreciamos que el monto de las primeras cuotas no cubren los intereses, luego estos capitalizan y el saldo de la deuda aumenta. Al abonar la última cuota el saldo queda en cero.

### 5.4.4. Pago en escalada conociendo el VF

Utilizado solo para casos de capitalización. Permite conocer el valor de la primera cuota de un gradiente en "escalera", creciente o decreciente, conociendo el valor futuro a capitalizar, la tasa de interés periódica, el gradiente, el plazo total y el valor de la serie de pagos iguales.

**Ejercicio 107 (Pago en escalada conociendo el VF)**
Un empresario requerirá UM 50,000 dentro de 5 años. Calcular cuánto deberá ahorrar al 2.5% mensual incrementado éstos ahorros en 15% cada seis meses.

**Solución:**
VA = 50,000; n = (5*12) = 60; i = 0.025; E = 0.15; C = ?

| MESES | SALDO INICIAL | CUOTA | INTERES | SALDO FINAL |
|---|---|---|---|---|
| 0 | | 179 | | 179 |
| 1 | 179 | 179 | 4 | 363 |
| 2 | 363 | 179 | 11 | 553 |
| 3 | 553 | 179 | 17 | 748 |
| 4 | 748 | 179 | 22 | 950 |
| 5 | 950 | 179 | 28 | 1,158 |
| 6 | 1,158 | 206 | 35 | 1,398 |
| 12 | 2,714 | 237 | 81 | 3,033 |
| 18 | 4,773 | 272 | 143 | 5,189 |
| 24 | 7,462 | 313 | 224 | 7,999 |
| 30 | 10,936 | 360 | 328 | 11,624 |
| 36 | 15,388 | 414 | 462 | 16,264 |
| 42 | 21,054 | 476 | 632 | 22,162 |
| 48 | 28,221 | 548 | 847 | 29,616 |
| 54 | 37,241 | 630 | 1,117 | 38,989 |
| 60 | 48,544 | 0 | 1,456 | 50,000 |

INTERES = SALDO INICIAL*TASA INTERES

| | |
|---|---|
| SALDO FINAL | = SALDO INICIAL + CUOTA + INTERES |
| CUOTA ESCALADA (C/6 meses) | = CUOTA UNIFORME*(1 + E) |
| CUOTA Y SALDO DE 50,000 | = BUSCAR OBJETIVO + 15 CADA 6 MESES |

**5.4.5. Tasa periódica de un gradiente**

Conociendo el gradiente, el plazo, el valor de la primera cuota y el valor presente y/o futuro podemos obtener la tasa de interés por período de un gradiente. Aplicable para gradientes aritméticos o geométricos, crecientes o decrecientes y casos de amortización o de capitalización.

**Ejercicio 108 (Tasa periódica de un gradiente aritmético, AMORTIZACION)**

Determinar la tasa de interés de un crédito por UM 30,000, a pagar en 48 cuotas y si la primera es de UM 600 con aumentos mensuales de UM 25.

**Solución:**

VA = 30,000; n = 48; C1 = 600; G = 25; i = ?

Puesto que tratamos con flujos variables, aplicamos la función TIR para determinar la tasa periódica del crédito, para ello, elaboramos el flujo de caja de esta operación:

| TRIMESTRES | CREDITO | PAGOS | FLUJO NETO |
|---|---|---|---|
| 0 | 30,000 | | -30,000 |
| 1 | | 600 | 600 |
| 2 | | 625 | 625 |
| 3 | | 650 | 650 |
| 4 | | 675 | 675 |
| 5 | | 700 | 700 |
| 6 | | 725 | 725 |
| 45 | | 1,700 | 1,700 |
| 46 | | 1,725 | 1,725 |
| 47 | | 1,750 | 1,750 |
| 48 | | 1,775 | 1,775 |
| TIR | | | 2.47% |

**Respuesta:**

La tasa de interés mensual del crédito es 2.47%.

**Ejercicio 109 (Tasa periódica de un gradiente geométrico, CAPITALIZACION)**

Determinar la tasa de interés de un título a cuatro años y medio, si el titular debe hacer depósitos trimestrales e inicia con una cuota de UM 600 que crece el 10% trimestral y al final del plazo recibirá UM 80,000.

**Solución:** Operamos en forma similar al caso anterior

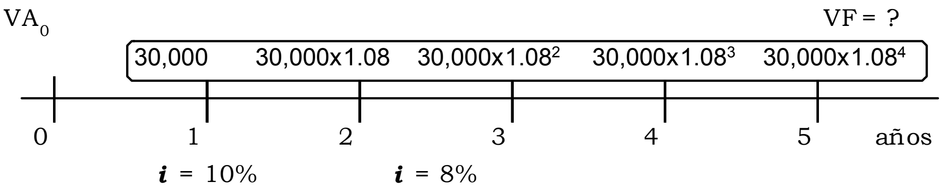
VF = 80,000; n = 18 (4.5*4); C1 = 600; E = 0.10; i = ?

| TRIMESTRES | PAGOS | AHORRO | FLUJO NETO |
|---|---|---|---|
| 0 | | | 0 |
| 1 | 600 | | 600,00 |
| 2 | 660 | | 660,00 |
| 3 | 726 | | 726,00 |
| 4 | 799 | | 798,60 |
| 5 | 878 | | 878,46 |
| 6 | 966 | | 966,31 |
| 16 | 2.506 | | 2.506,35 |
| 17 | 2.757 | | 2.756,98 |
| 18 | 3.033 | 80.000 | -76.967,32 |
| TIR | | | 0,1474 |

**Respuesta:**
La tasa trimestral de interés del título es 14.74%.

**Ejercicio 110 (VA y VF de gradiente geométrico pospagable)**
Determinar el valor actual y futuro de los ingresos anuales vencidos de una persona que el primer año ganará UM 30,000 con la esperanza que crezcan un 8% anual de forma acumulativa durante 5 años.

a) Asumiendo como tasa de valoración el 10%.
b) Asumiendo como tasa de valoración el 8%.




**Solución (a):** (Calculando el valor actual y valor futuro al 10% de valoración)

Q = 30,000; E = 0.08; i = 0.10; n = 5; VAE = ?

$$[38]\quad \boldsymbol{VA}_E = \frac{30{,}000\left\langle \frac{(1+0.08)^5}{(1+0.10)^5} - 1\right\rangle}{0.08-0.10} = \text{UM } 131{,}494.30$$

[19] **VF** = 131,494.30*(1 + 0.10)5 = UM 211,772.89

**Sintaxis**
**VF**(**tasa**;**nper**;**pago**;va;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VA | Tipo | VF |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.10 | 5 | | -131,494.30 | | 211,772.89 |

**Solución:** (Calculando el valor actual y valor futuro al 8% de valoración)
Q = 30,000; E = 0.08; i = 0.08; n = 5; VAE = ?

$$[39]\quad \boldsymbol{VA}_E = 30{,}000\left\langle \frac{5}{1+0.08}\right\rangle = \text{UM } 138{,}888.89$$

[19] **VF** = 138,889(1 + 0.08)5 = UM 204,073.35

**Sintaxis**

**VF**(**tasa**;**nper**;**pago**;va;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VA | Tipo | VF |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.08 | 5 | | -138,888.89 | | 204,073.35 |

**Respuesta:**

a) Asumiendo como tasa de valoración el 10%, el VA y VF de los ingresos anuales vencidos es UM 131,494.30 y UM 211,772.88 respectivamente.

b) Asumiendo como tasa de valoración el 8%, el VA y VF de los ingresos anuales vencidos es UM 138,888.89 y UM 204,073.34 respectivamente.

**Ejercicio 111 (Gradiente geométrico pospagable y prepagable)**

Establecer el valor actual pospagable y prepagable de los ingresos de una empresa para los próximos 18 semestres si para el primer período ascienden a UM 1,500, estimándose un incremento semestral del 10% durante los primeros 12 semestres, manteniéndose constante a partir de entonces. Considere como tipo de valoración el 15% semestral.

**Solución:** Pospagable

Q = 1,500; E = 0.10; i = 0.15; n = 12 y 18; VA = ?

Los 12 primeros semestres constituyen gradientes geométricos, cuyo valor actual lo calculamos con la fórmula [33] y las últimas seis cuotas son anualidades constantes y lo resolvemos aplicando el factor FAS. Calculamos el VA en un solo proceso:

$$\boldsymbol{VA}_0 = 1{,}500\left(\frac{\left(\frac{1.10^{12}}{1.15^{12}}-1\right)}{0.10 - 0.15}\right)*\left(\frac{1.15^6-1}{0.15*1.15^6}\right) = \text{UM } 46{,}935.76$$

**Solución: Prepagables**

Los 12 primeros semestres constituyen gradientes geométricos, cuyo valor actual lo calculamos con la fórmula [33] multimplicádola por (1 + i) y las últimas seis cuotas son anualidades constantes y lo resolvemos aplicando el factor FAS, multiplicando ambos por (1 + i). Calculamos el VA en un solo proceso:

$$\boldsymbol{VA}_0 = 1{,}500\left(\frac{\left(\frac{1.10^{12}}{1.15^{12}}-1\right)}{0.10 - 0.15}\right)*\left(\frac{1.15^6-1}{0.15*1.15^6}\right)*(1.15) = \text{UM } 53{,}976.12$$

**Respuesta:**

El VA pospagable es UM 46,935.76

El VA prepagable es UM 53,976.12

## 6. Métodos de evaluación

La evaluación financiera de inversiones permite comparar los beneficios que genera ésta, asociado a los fondos que provienen de los préstamos y su respectiva corriente anual de desembolsos de gastos de amortización e intereses. Los métodos de evaluación financiera están caracterizados por determinar las alternativas factibles u óptimas de inversión utilizando entre otros los siguientes indicadores: **VAN** (Valor actual neto), **TIR** (Tasa interna de retorno) y **B/C** (Relación beneficio costo). Los tres métodos consideran el valor del dinero en el tiempo.

**6.1. VAN**

El VAN mide la rentabilidad del proyecto en valores monetarios deducida la inversión. Actualiza a una determinada tasa de descuento **i** los flujos futuros. Este indicador permite seleccionar la mejor alternativa de inversión entre grupos de alternativas mutuamente excluyentes.

Debemos tener en cuenta que no conlleva el mismo riesgo, el invertir en deuda del Estado, que en una compañía de comunicaciones o en una nueva empresa inmobiliaria. Para valorar estos tres proyectos debemos utilizar tasas de descuento diferentes que reflejen los distintos niveles de riesgo.

Como las inversiones son normalmente a largo plazo, para actualizar los distintos flujos al momento inicial utilizamos la fórmula [21] del descuento compuesto.

**VAN =** Valor Actual de los Flujos de Caja futuros - INV

Fórmula general del VAN

$$\boldsymbol{VAN} = \sum_{t=1}^{n} \frac{\boldsymbol{FC_t}}{(1+\boldsymbol{i})^t} - \boldsymbol{I_0}$$

$$[41] \quad \boldsymbol{VAN} = \left\langle \frac{FC_1}{(1+i)} + \frac{FC_2}{(1+i)^2} + \frac{FC_3}{(1+i)^3} + \frac{FC_4}{(1+i)^4} + \frac{FC_n}{(1+i)^n} \right\rangle - I_0$$

<u>donde</u>:

**I0** : Inversión inicial en el momento cero de la evaluación
**FC** : Flujo de caja del proyecto (ingresos menos egresos)
**i** : Tasa de descuento o costo de oportunidad del capital
**t** : Tiempo
**n** : Vida útil del proyecto

Si el resultado es positivo, significa que el negocio rinde por sobre el costo de capital exigido.

**<u>Ejercicio 112</u> (Calculando el VAN)**

Un proyecto de inversión requiere el desembolso inicial de UM 250,000, con beneficios estimados entre el 1º y el 5º año. El tipo de descuento aplicado a proyectos de inversión con riesgos similares es del 12%. Calcular el VAN:

| Año | Desembolso | Beneficios | FUNCION VA | Flujo Neto |
|---|---|---|---|---|
| 0 | -250,000.00 | 0.00 | -250,000 | -250,000.00 |
| 1 | | 60,000.00 | 53,571.43 | 53,571.43 |
| 2 | | 85,000.00 | 67,761.48 | 67,761.48 |
| 3 | | 95,000.00 | 67,619.12 | 67,619.12 |
| 4 | | 150,000.00 | 95,327.71 | 95,327.71 |
| 5 | | 190,000.00 | 107,811.10 | 107,811.10 |
| 6 | | 145,000.00 | 73,461.51 | 73,461.51 |
| | | | **VAN** | 52,639.21 |

Como apreciamos en el flujo de caja el VAN de UM 52,639 es positivo, luego la inversión es aceptada. Cuando evaluemos varios proyectos alternativos de inversión deberá seleccionarse aquel que tenga el VAN mayor, siempre y cuando se trate de proyectos con inversión similar.

**<u>Ejercicio 113</u> (Calculando el VAN)**

Un negocio a la vista requiere una inversión de UM 800,000. Esta inversión genera ingresos anuales conforme detallamos en el siguiente flujo:

Período

| 1º | 2º | 3º | 4º | 5º | 6º |
|---|---|---|---|---|---|
| 90,000 | 60,000 | 250,000 | 250,000 | 220,000 | 250,000 |

Considerando un costo de capital de 11%, determinar cuánto representaría al valor de hoy la suma de todos los ingresos, menos la inversión inicial.

**Solución:**
INV = 800,000; i = 0.11; **VAN** = Flujo - INV

**Sintaxis**
**VNA**(**tasa**;**valor1**;valor2; ...)

| 0 | 1º | 2º | 3º | 4º | 5º | 6º | **VAN 11%** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -800.000 | 90.000 | 60.000 | 250.000 | 250.000 | 220.000 | 250.000 | -58.521,48 |

**Respuesta**
El VAN es negativo (-58,521.48), luego el negocio debe ser rechazado.

Porcentaje VAN / Inversión
Este criterio determina la rentabilidad que obtendríamos por cada unidad monetaria invertida.

$$[42] \quad \textbf{RATIO}=\frac{\text{VAN}}{\text{INVERSION}}$$

Seleccionamos el proyecto que arroja el ratio más elevado.

**Ejemplo:** Hallar el ratio «VAN/Inversión» del ejercicio (112)
VAN = 52,639.21; INV. = 250,000; RATIO = ?

$$[42] \quad \textbf{RATIO}=\frac{52{,}639.21}{250{,}000}= \ 21.06\%$$

**Respuesta:**
La rentabilidad es 21.06%. El resultado indica que por cada unidad monetaria invertida tenemos UM 0.2106 de VAN.

**6.2. Tasa interna de retorno (TIR)**
La TIR mide la rentabilidad como un porcentaje, calculado sobre los saldos no recuperados en cada período. Muestra el porcentaje de rentabilidad promedio por período, definida como aquella tasa que hace el VAN igual a cero. La tasa interna de retorno TIR, complementa casi siempre la información proporcionada por el VAN.
Esta medida de evaluación de inversiones no debe utilizarse para decidir el mejor proyecto entre alternativas mutuamente excluyentes.
Tanto la tasa efectiva como la TIR deben emplearse para decidir sobre todo, en la compra y venta de papeles en bolsa.

Fórmula general de la TIR

$$\sum_{t=1}^{n}\left[\frac{\boldsymbol{FC}_t}{(1+\boldsymbol{i})^t}\right]\text{-}I_0=0$$

$$[\text{TIR}]\ -I_0 + \frac{FC_1}{(1+\boldsymbol{i})} + \frac{FC_2}{(1+\boldsymbol{i})^2} + \frac{FC_3}{(1+\boldsymbol{i})^3} + \frac{FC_4}{(1+\boldsymbol{i})^4} + \frac{FC_n}{(1+\boldsymbol{i})^n} = 0$$

donde:
**I0** : Inversión inicial en el momento cero de la evaluación
**FC** : Flujo de caja del proyecto (ingresos menos egresos)
**i** : Tasa de descuento o costo de oportunidad del capital
**t** : Tiempo
**n** : Vida útil del proyecto

Si compramos esta ecuación con la fórmula [41], nos damos cuenta que esta medida es equivalente a hacer el VAN igual a cero y calcular la tasa que le permite al flujo actualizado ser cero.
La tasa obtenida la comparamos con la tasa de descuento de la empresa. Si la TIR es igual o mayor que ésta, el proyecto es aceptado y si es menor es rechazado.

**Ejercicio 114 (Calculando la TIR)**
Calcular la tasa TIR del ejercicio (112) y ver si supera la tasa de descuento del 12% exigible a proyectos con ese nivel de riesgo.

VAN = 0

Calculamos la TIR del proyecto con la función TIR:

**Sintaxis**
**TIR**(**valores**;estimar)

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | TIR |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -250,000 | 60,000 | 85,000 | 95,000 | 150,000 | 190,000 | 145,000 | 33.53% |

Luego la TIR de esta operación es el 33.53%, muy superior al 12%, luego el proyecto es atractivo para su ejecución.
Entre varias alternativas de inversión elegiremos aquel que presente la tasa TIR más elevada. Si los diversos proyectos analizados presentan niveles de riesgo diferentes, primero determinamos el nivel de riesgo que estamos dispuestos a asumir, seguidamente elegiremos la alternativa de TIR más elevada.

### 6.3. Relación Beneficio / Costo

En el análisis Beneficio/Costo debemos tener en cuenta tanto los beneficios como las desventajas de aceptar o no proyectos de inversión
Es un método complementario, utilizado generalmente cuando hacemos análisis de valor actual y valor anual. Utilizado para evaluar inversiones del gobierno central, gobiernos locales y regionales, además de su uso en el campo de los negocios para determinar la viabilidad de los proyectos en base a la razón de los beneficios a los costos asociados al proyecto. Asimismo, en las entidades crediticias internacionales es casi una exigencia que los proyectos con financiación del exterior sean evaluados con éste método.

La relación Beneficio/costo esta representada por la relación

$$[42]\quad \frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{C}} = \frac{VAIngresos}{VAEgresos}$$

En donde los Ingresos y los Egresos deben ser calculados utilizando el **VAN**, de acuerdo al flujo de caja; o en su defecto, una tasa un poco más baja, llamada **«TASA SOCIAL»** ; tasa utilizada por los gobiernos centrales, locales y regionales para evaluar sus proyectos de desarrollo económico.
El análisis de la relación B/C, toma valores mayores, menores o iguales a 1, esto significa que:

**B/C > 1** los ingresos son mayores que los egresos, entonces el proyecto es aconsejable.
**B/C = 1** los ingresos son iguales que los egresos, entonces el proyecto es indiferente.

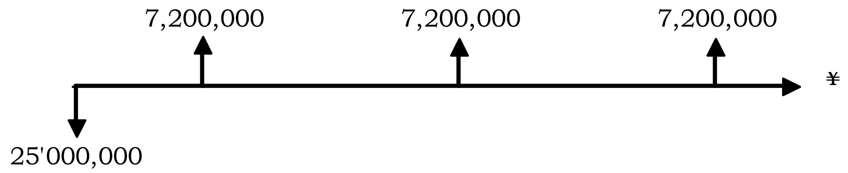
**B/C < 1** los ingresos son menores que los egresos, entonces el proyecto no es aconsejable.

La relación B/C sólo entrega un índice de relación y no un valor concreto, además no permite decidir entre proyectos alternativos.

**Ejercicio 115 (Relación Beneficio Costo)**
El costo de una carretera alterna a la principal es de UM 25’000,000 y producirá ahorros en combustible para los vehículos de UM 1’500,000 al año; por otra parte, incrementará el turismo, estimando el aumento de ganancias en los hoteles, restaurantes y otros en UM 7’000,000 al año. Pero los agricultores estiman niveles de pérdidas en la producción proyectada de UM 1’300,000 al año. Utilizando una tasa del 25%, ¿Es factible el proyecto?

**Solución**:
1º Aplicando el método del VAN, tenemos:

Ing. y egre. esperados = 1’500,000 + 7’000,000 - 1’300,000 = UM 7’200,000




2º Con la fórmula [36] de la serie infinita calculamos el VAN de los ingresos y egresos anuales:

C = 7’200,000; i = 0.25; VAN = ?

$$[36]\quad \boldsymbol{VAN} = \frac{7'200,000}{0.25} = \text{UM } 28'800,000$$

**VAN Inversión** = UM 25’000,000 período cero

3º Entonces tenemos la relación B/C:

$$[42]\quad \frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{C}} = \frac{28'800,000}{25'000,000} = \text{UM } 1.15$$

**Respuesta:**
Como el índice B/C es mayor a uno (1), el proyecto es aceptado.

# Capítulo 4

## Tasas Nominales y Efectivas de Interés, Capitalización Continua e Inflación

### 1. Introducción
El objetivo del capítulo es familiarizar al lector en cálculos de matemáticas financieras utilizando períodos y frecuencias de capitalización diferentes a un año. Esto le permitirá manejar asuntos financieros personales que en la mayoría de casos son cantidades mensuales, diarias o continuas. Orientamos al lector a considerar la inflación en los cálculos de valor del dinero en el tiempo.

### 2. Tasas nominales y efectivas de interés
La tasa efectiva anual (TEA) aplicada una sola vez, produce el mismo resultado que la tasa nominal según el período de capitalización. La tasa del período tiene la característica de ser simultáneamente nominal y efectiva.

### 2.1. Tasa Nominal
La tasa nominal es el interés que capitaliza más de una vez por año. Esta tasa convencional o de referencia lo fija el Banco Federal o Banco Central de un país para regular las operaciones activas (préstamos y créditos) y pasivas (depósitos y ahorros) del sistema financiero. Es una tasa de interés simple.
Siendo la tasa nominal un límite para ambas operaciones y como su empleo es anual resulta equivalente decir tasa nominal o tasa nominal anual. La ecuación de la tasa nominal es:

$$j = \text{tasa de interés por período x número de períodos}$$

**Ejercicio 116** **(Calculando la TEA)**
¿A cuánto ascenderá un préstamo de UM 1,000 al cabo de un año si el interés del 36% capitaliza mensualmente? ¿Cuál es la TEA?

**Solución:**
VA = 1,000; i = 0.03 (36/12); n = 12; VF = ?; TEA = ?

[19] $\boldsymbol{VF} = 1{,}000(1.03)^{12} =$ UM 1,425.76

**Sintaxis**
**VF(tasa;nper;pago**;va;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VA | Tipo | VF |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.03 | 12 | | -1,000 | | 1,425.76 |

Luego la TEA del préstamo es:

[1] $\boldsymbol{i} = \frac{1{,}425.76 - 1{,}000}{1{,}000} * 100 =$ 42.58%

Como vemos el préstamo de UM 1,000 ganó 42.58% de interés en un año. Esto es, a la tasa nominal del 36%, el Banco en un año ganó la tasa efectiva del 42.58%, la misma que representa la tasa efectiva anual (TEA).

## 2.2. Tasa Efectiva

*Con el objeto de conocer con precisión el valor del dinero en el tiempo es necesario que las tasas de interés nominales sean convertidas a tasas efectivas.*

La tasa efectiva es aquella a la que efectivamente está colocado el capital. La capitalización del interés en determinado número de veces por año, da lugar a una tasa efectiva mayor que la nominal. Esta tasa representa globalmente el pago de intereses, impuestos, comisiones y cualquier otro tipo de gastos que la operación financiera implique. La tasa efectiva es una función exponencial de la tasa periódica.
Las tasas nominales y efectivas, tienen la misma relación entre sí que el interés simple con el compuesto (Capítulo 3). Las diferencias están manifiestas en la definición de ambas tasas.
Con el objeto de conocer con precisión el valor del dinero en el tiempo es necesario que las tasas de interés nominales sean convertidas a tasas efectivas. Por definición de la palabra nominal «pretendida, llamada, ostensible o profesada» diríamos que la tasa de interés nominal no es una tasa correcta, real, genuina o efectiva.
La tasa de interés nominal puede calcularse para cualquier período mayor que el originalmente establecido. Así por ejemplo: Una tasa de interés de 2.5% mensual, también lo expresamos como un 7.5% nominal por trimestre (2.5% mensual por 3 meses); 15% por período semestral, 30% anual o 60% por 2 años. La tasa de interés nominal ignora el valor del dinero en el tiempo y la frecuencia con la cual capitaliza el interés. La tasa efectiva es lo opuesto. En forma similar a las tasas nominales, las tasas efectivas pueden calcularse para cualquier período mayor que el tiempo establecido originalmente como veremos en la solución de problemas.
Cuando no está especificado el período de capitalización (PC) suponemos que las tasas son efectivas y el PC es el mismo que la tasa de interés especificada.
Es importante distinguir entre el período de capitalización y el período de pago porque en muchos casos los dos no coinciden.

**Por ejemplo**:
Si una persona coloca dinero mensualmente en una libreta de ahorros con el 18% de interés compuesto semestralmente, tendríamos:

| | |
|---|---|
| Período de pago (PP) | : 1 mes |
| Período de capitalización (PC) | : 6 meses |

Análogamente, si alguien deposita dinero cada año en una libreta de ahorros que capitaliza el interés trimestralmente, tendríamos:

| | |
|---|---|
| Período de pago (PP) | : 1 año |
| Período de capitalización (PC) | : 3 meses |

A partir de ahora, para solucionar los casos que consideren series uniformes o cantidades de flujos de efectivo de gradiente uniforme, primero debemos determinar la relación entre el período de capitalización y el período de pago.

$i$ = 18% nominal anual, compuesto semestralmente

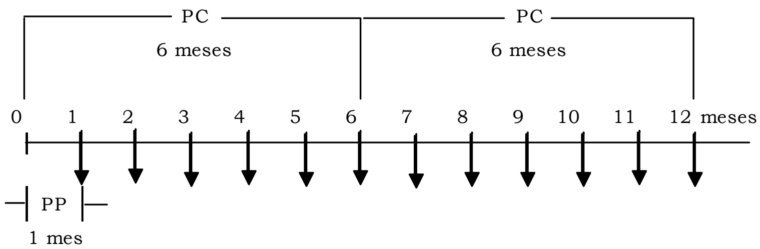



Diagrama de flujo de efectivo para un periodo de pago (PP) mensual y un periodo de capitalización semestral(PC).

### 2.2.1. Derivación de la fórmula de la tasa efectiva

Una forma sencilla de ilustrar las diferencias entre las tasas nominales y efectivas de interés es calculando el valor futuro de UM 100 dentro de un año operando con ambas tasas. Así, si el banco paga el 18% de interés compuesto anualmente, el valor futuro de UM 100 utilizando la tasa de interés del 18% anual será:

[19] $VF = 100\ (1 + 0.18)1 =$ UM 118

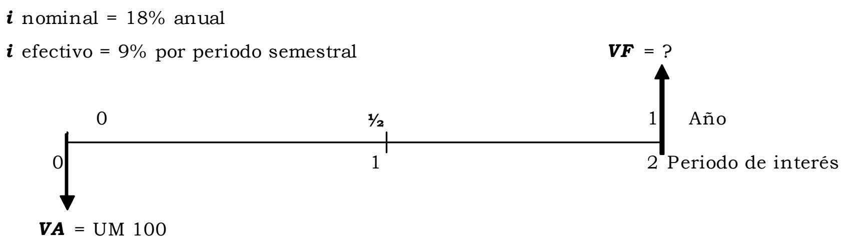


Diagrama de flujo de efectivo para periodos de capitalización semestral.

Ahora, si el banco paga intereses compuestos semestralmente, el valor futuro incluirá el interés sobre el interés ganado durante el primer período. Así, a la tasa de interés del 18% anual compuesto semestralmente el banco pagará 9 % de interés después de 6 meses y otro 9% después de 12 meses (cada 6 meses).
El cuadro no toma en cuenta el interés obtenido durante el primer período. Considerando el período 1 de interés compuesto, los valores futuros de UM 100 después de 6 y 12 meses son:

[19] $VF6 = 100\ (1 + 0.09)1 =$ UM 109.00
[19] $VF12 = 109\ (1 + 0.09)1 =$ UM 118.81

9% representa la tasa efectiva de interés semestral. Como vemos, el interés ganado en 1 año es UM 18.81 en lugar de UM 18. Luego, la tasa efectiva anual es 18.81%.
La fórmula para obtener la tasa efectiva a partir de la tasa nominal es:

[43] $$\boldsymbol{i} = \left\langle 1 + \frac{\boldsymbol{j}}{\boldsymbol{m}} \right\rangle^{\boldsymbol{m}} - 1$$

***i*** = tasa periódica
***j*** = tasa nominal
***m*** = número de períodos de capitalización

Despejando la fórmula [43] obtenemos la fórmula de la *tasa nominal de interés* en función de la tasa efectiva equivalente:

[44] $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{m}\left\langle (1+\boldsymbol{i})^{1/m} - 1 \right\rangle$, [44A] $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{i} * n$ y [44B] $\boldsymbol{i} = \frac{\boldsymbol{j}}{n}$

El subíndice ***m*** de ***j*** indica el número de veces por año que capitaliza.

**Fórmulas para calcular la tasa periódica**

**Tasa periódica:** Tasa de interés cobrada o pagada en cada período. Por ejemplo, semanal, mensual o anual. Tiene la particularidad de ser simultáneamente nominal y efectiva.

Fórmula que permite calcular la tasa periódica a partir de la tasa efectiva dada.

[43A] $\boldsymbol{i} = \sqrt[n]{(1+TEA)} - 1$

Fórmula que permite calcular la tasa efectiva anual (TEA) a partir de la tasa periódica dada.

[43B] $TEA = [1 + \boldsymbol{i}]^{n} - 1$

### 2.2.2. Calculando las tasas efectivas

Con la fórmula [43] podemos calcular las tasas efectivas de interés para cualquier período mayor que el de capitalización real. Por ejemplo, la tasa efectiva del 1% mensual, podemos convertirla en tasas efectivas trimestrales, semestrales, por períodos de 1 año, 2 años, o por cualquier otro más prolongado. En la fórmula [43] las unidades de tiempo en ***i*** y ***j*** siempre deben ser las mismas. Así, si deseamos la tasa de interés efectiva, ***i***, semestral, necesariamente ***j*** debe ser la tasa nominal semestral. En la fórmula [43] la ***m*** siempre es igual al número de veces que el interés estará compuesto durante el tiempo sobre el cual buscamos ***i***.

**Ejercicio 117 (Tasa efectiva)**

Un préstamo no pagado al Banco tiene la tasa de interés del 3% mensual sobre el saldo pendiente de pago.

1) Determinar la tasa efectiva semestral. 2) Si la tasa de interés es de 7% por trimestre, calcular las tasas efectivas semestrales y anuales. 3) Con las cifras del (2) determinar las tasas nominales ***j***.

**Solución (1)**: La tasa de interés es mensual. Como lo solicitado es la tasa efectiva semestral aplicamos la fórmula (43B):

[43B] TEASEMESTRAL = (1 + 0.03)6 -1 = 0.1941

**Solución (2)**: Para la tasa de 7% por trimestre, el período de capitalización es trimestral. Luego, en un semestre, $m = 2$. Por tanto:

[43B] $TEA_{SEMESTRAL} = (1 + 0.07)^2 - 1 = 0.1449$
[43B] $TEA_{ANUAL} = (1 + 0.07)^4 - 1 = 0.3108$

**Solución (3):**

(1) i = 0.07; n = 2; j = ?

(44A) $j = 0.07*2 = 0.14$ semestral

(44A) $j = 0.07*4 = 0.28$ anual

**Ejercicio 118 (Cálculo de tasas a partir de la tasa nominal)**

Calcular las tasas efectivas (*i*) para 0.25%, 7%, 21%, 28%, 45%, 50% tasas nominales (*j*) utilizando la fórmula [43] con períodos de capitalización (*m*) semestral, trimestral, mensual, semanal y diaria:

j = 0.0025; m = 2; i =?

[43] $\boldsymbol{i} = \left\langle 1+\frac{0.0025}{2}\right\rangle^{2} -1 =$ 0.0025 tasa efectiva semestral

j = 0.07; m = 4; i = ?

[43] $\boldsymbol{i} = \left\langle 1+\frac{0.07}{4}\right\rangle^{4} -1 =$ 0.071859 tasa efectiva trimestral

j = 0.21; m = 12; i = ?

[43] $\boldsymbol{i} = \left\langle 1+\frac{0.21}{12}\right\rangle^{12} -1 =$ 0.2314 tasa efectiva mesual

j = 0.28; m = 52; i = ?

[43] $\boldsymbol{i} = \left\langle 1+\frac{0.28}{52}\right\rangle^{52} -1 =$ 0.3221 tasa efectiva semanal

j = 0.50; m = 365; i = ?

[43] $\boldsymbol{i} = \left\langle 1+\frac{0.50}{365}\right\rangle^{365} -1 = $ 0.6482 tasa efectiva diaria

Los resultados son tasas efectivas anuales equivalentes a tasas nominales.

| Tasas de interés efectivas anuales equivalentes a tasas nominales | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Tasa Nominal, *j%*** | **Semestralmente ($m$ = 2)** | **Trimestralmente ($m$ = 4)** | **Mensualmente ($m$ = 12)** | **Semanalmente ($m$ = 52)** | **Diariamente ($m$ = 365)** |
| 0,25 | 0,250 | 0,250 | 0,250 | 0,250 | 0,250 |
| 7 | 7,123 | 7,186 | 7,229 | 7,246 | 7,247 |
| 21 | 22,103 | 22,712 | 23,144 | 23,315 | 23,358 |
| 28 | 29,960 | 31,079 | 31,888 | 32,213 | 32,298 |
| 45 | 50,063 | 53,179 | 55,545 | 56,528 | 56,788 |
| 50 | 56,250 | 60,181 | 63,209 | 64,479 | 64,816 |

Aplicando este proceso hemos elaborado el cuadro, para todas las tasas nominales y períodos de capitalización indicados.

**<u>Ejercicio 119</u> (Calculando la TEA, el FSA)**
Una institución financiera publicita que su tasa de interés sobre préstamos que otorga es 1.86% mensual. Determinar la tasa efectiva anual y el factor simple de capitalización (FSA o VA/VF) para 12 años.

**<u>Solución</u>**: Para calcular la tasa efectiva anual:
$j = 0.0186$; $n = 12$; TEA =?

[43B] TEA = $(1 + 0.0186)^{12} -1 = 0.2475$

Hay dos formas de calcular el factor FSA:

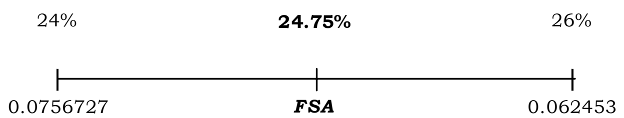
TEA = 0.2475; m =12; FSA =?

1º Por interpolación entre i=0.24 e i= 0.26 y n =12:

$$\boldsymbol{FSA}_{12}^{0,24} = \frac{1}{(1+0.24)^{12}} = 0.0756727$$

$$\boldsymbol{FSA}_{12}^{0.26} = \frac{1}{(1+0.26)^{12}} = 0.062453$$

Graficando:




<u>Interpolando</u>:

$$\frac{24.75-24}{26-24} = \frac{\text{FSA}-0.0756727}{0.062453-0.0756727}$$

$\boldsymbol{FSA} = 0.0756727-0.0132197*0.375 = 0.0707153$

Utilizando el factor de la fórmula [29] o la función VA, es la forma más fácil y precisa de encontrar el valor del factor:

i = 0.2475; n = 12; FSA =?

[29] $\boldsymbol{VA/VF} = \frac{1}{(1+0.2475)^{12}} = 0.07039$

**Sintaxis**

**VA**(**tasa**;**nper**;**pago**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VF | Tipo | FSA |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.2475 | 12 | | -1 | | 0.07039 |

**2.2.3. Capitalización continua con tasas efectivas de interés**

Las fórmulas del interés continuo simplifican frecuentemente la solución de modelos matemáticos complejos. En todas las fórmulas anteriores hemos utilizado el convenio de fin de período para pagos globales a interés discreto. A partir de ahora, en la solución de los ejemplos y/o ejercicios utilizaremos cualquiera de estos dos métodos según el requerimiento de cada caso.

Cuando el interés capitaliza en forma continua, ***m*** se acerca al infinito, la fórmula [43] puede escribirse de forma diferente. Pero antes es necesario, definir el valor de la constante de Neper (e) o logaritmo natural que viene preprogramada en la mayoría de calculadoras representado por ex.

$$\lim_{h\to\infty}\left\langle 1+\frac{1}{\boldsymbol{h}}\right\rangle^{h} = \boldsymbol{e} = 2.71828$$

Ecuación que define la constante de Neper

Cuando ***m*** se acerca a infinito, el límite de la fórmula [43] lo obtenemos utilizando ***j/m*** **=** 1***h***, lo que hace ***m* = *hj***.

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\infty}\left\langle 1+\frac{1}{\boldsymbol{h}}\right\rangle^{\boldsymbol{h}j} - 1 = \lim_{\boldsymbol{h}\to\infty}\left\langle\left(1+\frac{1}{\boldsymbol{h}}\right)^{j}\right\rangle^{\boldsymbol{h}j} - 1$$

[45] $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j}} - 1$

<u>Ecuación para calcular la tasa de interés efectiva continua</u>. De aplicación cuando la relación ***m* = *j*** es muy pequeña. En caso contrario operamos con la fórmula [43], sin embargo, debemos aclarar que al utilizarla cuando $\boldsymbol{m/j}$ es pequeña lleva al mismo resultado obteniendo dicho valor a través de la notación [45]; es decir, el enunciado anterior no es más que un caso práctico de la expresión [43].

**<u>Ejercicio 120</u> (Calculando la tasa continua)**

1) Para la tasa nominal del 18%, la tasa efectiva anual continua será:

j = 0.18; e = 2.71828; i =?

[45] $\boldsymbol{i} = (2.71828)^{0.18} - 1 = 0.1972$ TEA

2) Calcular la tasa efectiva anual y mensual continua (TEAC) para la tasa de interés de 21% anual compuesto continuamente.

mensual $\boldsymbol{j} = 0.21/12 = 0.0175$

[45] $\boldsymbol{i} = (2.71828)^{0.0175} - 1 = 0.01765$ tasa efectiva mensual continua

[45] $\boldsymbol{i} = (2.71828)^{0.21} - 1 = 0.233678$ TEAC

3) Una persona requiere el retorno efectivo mínimo de 22% sobre su inversión, desea saber cuál sería la tasa mínima anual nominal aceptable si tiene lugar la capitalización continua. En este caso, conocemos ***i*** y

deseamos encontrar $j$, para resolver la ecuación [43] en sentido contrario. Es decir, para i = 22% anual, debemos resolver para $j$ tomando el logaritmo natural (ln).

[45] $e^j - 1 = 0.22$

$$e^j = 1.22$$
$$\ln e^j = \ln 1.22$$
$$j = 0.1989 \quad (19.89\%) \text{ tasa nominal}$$

La fórmula general para obtener la ***tasa nominal*** dada la tasa efectiva continua es:

[46] $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{ln}(1+\boldsymbol{i})$, aplicando al numeral (3), obtenemos:

$j = \ln(1.22) = 19.89\%$ tasa nominal

### 2.3. Cuando los períodos de capitalización y pagos no coinciden

En los casos en que el período de capitalización de un préstamo o inversión no coincide con el de pago, necesariamente debemos manipular adecuadamente la tasa de interés y/o el pago al objeto de establecer la cantidad correcta de dinero acumulado o pagado en diversos momentos. Cuando no hay coincidencia entre los períodos de capitalización y pago no es posible utilizar las tablas de interés en tanto efectuemos las correcciones respectivas.
Si consideramos como ejemplo, que el período de pago (un año) es igual o mayor que el período de capitalización (un mes); pueden darse dos condiciones:

1. Que en los flujos de efectivo debemos de utilizar los factores del 1º Grupo de problemas factores de pago único (VA/VF, VF/VA).
2. Que en los flujos de efectivo debemos de utilizar series uniformes (2º y 3º Grupo de problemas) o factores de gradientes.

#### 2.3.1. Factores de pago único

Para esta condición debemos satisfacer dos requisitos: 1) Debe utilizarse la tasa periódica para $\boldsymbol{i}$, y 2) las unidades en $\boldsymbol{n}$ deben ser las mismas que aquéllas en $\boldsymbol{i}$. Luego, las ecuaciones de pago único pueden generalizarse de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{VA} = \boldsymbol{VF}\ (\boldsymbol{VA/VF}),\ \boldsymbol{i} \text{ periódica, número de períodos}$$
$$\boldsymbol{VF} = \boldsymbol{VA}\ (\boldsymbol{VF/VA}),\ \boldsymbol{i} \text{ periódica, número de períodos}$$

Así, para la tasa de interés del 18% anual compuesto mensualmente, podemos utilizar variedad de valores para $\boldsymbol{i}$ y los valores correspondientes de $\boldsymbol{n}$ como indicamos a continuación con algunos ejemplos:

| **Tasa de interés efectiva i** | **Unidades para n** |
|---|---|
| 1.5% mensual | Meses |
| 4.57% trimestral | Trimestres |
| 9.34% semestral | Semestral |
| 19.56% anual | Años |
| 42.95% cada 2 años | Período de dos años |
| 70.91% cada 3 años | Período de tres años |

Los cálculos de la tasa periódica, lo hacemos aplicando la ecuación [43]. Como ejemplo desarrollaremos el proceso para la obtención de la tasa efectiva trimestral:

$\boldsymbol{j} = 1.5 * 3 = 4.5\%\ (0.045)$; $\boldsymbol{m} = 3$; $\boldsymbol{i} = ?$

[43] $\boldsymbol{i} = \left\langle 1 + \frac{0.045}{3} \right\rangle^{3} - 1 = 0.0457 \quad (4.57\%)$ tasa efectiva trimestral

El mismo procedimiento es aplicable para la obtención de la tasa efectiva de un número infinito de unidades de ***n***..

**Ejercicio 121 (Capitalización de depósitos variables)**
Si depositamos UM 2,500 ahora, UM 7,500 dentro de 3 años a partir de la fecha del anterior abono y UM 4,000 dentro de seis años a la tasa de interés del 18% anual compuesto trimestralmente. Deseamos saber cuánto será el monto acumulado dentro de 12 años.

**Solución**:
Como sabemos, en las ecuaciones sólo utilizamos tasas de interés efectivas o periódicas, por ello, primero calculamos la tasa periódica trimestral a partir de la tasa nominal del 18%:

j = 0.18; n = 4; i =?

[44B] $\boldsymbol{i} = \frac{0.18}{4} = 0.045$ tasa periódica trimestral

Utilizando la tasa periódica de 4.5% por trimestre y luego períodos trimestrales para ***n***, aplicamos sucesivamente la fórmula [19].

n1..3 = (12*4) = 48, (8*4) = 32 y (6*4) = 24

$$\boldsymbol{VF} = 2{,}500 \times 1.045^{48} + 7{,}500 \times 1.045^{32} + 4{,}000 \times 1.045^{24}$$
$$= \text{UM } 62{,}857.55$$

**Respuesta**:
El monto que habremos acumulado dentro de 12 años, capitalizados trimestralmente es UM 62,857.55

**2.3.2. Factores de serie uniforme y gradientes**
Cuando utilizamos uno o más factores de serie uniforme o gradiente, debemos determinar la relación entre el período de capitalización, PC, y el período de pago, PP. Encontramos esta relación en cada uno de los 3 casos:

1. El período de pago es igual al período de capitalización, PP = PC
2. El período de pago es mayor que el período de capitalización, PP > PC
3. El período de pago es menor que el período de capitalización, PP < PC

Para los dos primeros casos PP = PC y PP > PC, debemos:

a) Contar el número de pagos y utilizar este valor como ***n***. Por ejemplo, para pagos semestrales durante 8 años, n = 16 semestres.
b) Debemos encontrar la tasa de interés *efectiva* durante el mismo período que ***n*** en (a).
c) Operar en las fórmulas de los tres grupos de problemas sólo con los valores de ***n*** e ***i***.

**Ejercicio 122 (Capitalización de una anualidad semestral)**
Si ahorramos UM 300 cada 6 meses durante 5 años. ¿Cuánto habré ahorrado después del último abono si la tasa de interés es 24% anual compuesto semestralmente?.

**Solución:**
Como ***n*** está expresado en períodos semestrales, requerimos una tasa de interés semestral, para ello utilizamos la fórmula [44B].

C = 300; m = 2; j = 0.24; n = (5*2) = 10; i =?; VF = ?

[44B] $\boldsymbol{i} = \frac{0.24}{2} = 0.12$ tasa periódica semestral

Con esta tasa calculamos el VF de estos ahorros aplicando la fórmula [27] o la función VF.

$$[27] \quad \boldsymbol{VF} = 300\left\langle\frac{1.12^{10}-1}{0.12}\right\rangle = \text{ UM } 5{,}264.62$$

**Sintaxis**

**VF(tasa;nper;pago**;va;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VA | Tipo | VF |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.12 | 10 | -300 | | | 5,264.62 |

**Respuesta**:
El monto ahorrado es UM 5,264.62

**2.3.3. Períodos de pagos menores que los períodos de capitalización**

Esta parte corresponde a la relación 3, de la sección 2.3.2. Caso en que el período de pago es menor al período de capitalización (PP < PC). El cálculo del valor actual o futuro depende de las condiciones establecidas para la capitalización entre períodos. Específicamente nos referimos al manejo de los pagos efectuados entre los períodos de capitalización. Esto puede conducir a tres posibilidades:

1. No pagamos intereses sobre el dinero depositado (o retirado) entre los períodos de capitalización.
2. Los abonos (o retiros) de dinero entre los períodos de capitalización ganan interés simple.
3. Finalmente, todas las operaciones entre los períodos ganan interés compuesto.

De las tres posibilidades la primera corresponde al mundo real de los negocios. Esto quiere decir, sobre cualquier dinero depositado o retirado entre los períodos de capitalización no pagamos intereses, en consecuencia estos retiros o depósitos corresponden al principio o al final del período de capitalización. Esta es la forma en que operan las instituciones del sistema financiero y muchas empresas de crédito.

## 3. Inflación

La inflación es el movimiento ascendente del nivel medio de precios. Su opuesto es la deflación: movimiento descendente del nivel de precios. El límite entre la inflación y deflación es la estabilidad de precios. Los cálculos de la inflación son igualmente aplicables a una economía deflacionaria.
La inflación significa reducción del valor del dinero. Como resultado de la reducción del valor del dinero, requerimos más dinero para menos bienes.
El dinero en el período T1, puede actualizarse al mismo valor que el dinero en otro t2, aplicando la fórmula:

$$[47] \quad \text{UM en el periodo } t_1 = \frac{\text{UM en el periodo } t_2}{\text{tasa de inflación } t_1 \text{ y } t_2}$$

Llamamos T1 al dinero de hoy (constante) y al dinero del período T2, dinero futuro o corriente de entonces. Si F representa la tasa de inflación por período y *n* es el número de períodos entre T1 y T2, la fórmula [48] se transforma en:

$$[48] \quad \boldsymbol{VA} = \frac{\boldsymbol{VF}}{(1+\Phi)^{\boldsymbol{n}}} \qquad \text{UM de hoy} = \frac{\text{UM corrientes de entonces}}{(1+\Phi)^{n}}$$

La unidades monetarias de hoy son conocidas también como UUMM en valores constantes, aplicando la ecuación [48] es posible determinar valores futuros inflados en términos de UUMM corrientes.

**Ejercicio 123 (Calculando el precio de un producto con inflación)**
Si un producto cuesta UM 10 en 1999 y la inflación en promedio fue 5% durante el año anterior, en dinero a valor constante de 1998, el costo es igual a:

**Solución:**
VF = 10; n = 1; F = 0.05, VA = ?

[48] $\boldsymbol{VA} = \frac{10}{(1+0.05)^1} =$ UM 9.52

**Sintaxis**

**VA(tasa;nper;pago**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VF | Tipo | VA |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.05 | 1 | | -10 | | 9.52 |

Ahora, si la inflación en promedio fue de 5% en los últimos 8 años anteriores, el equivalente en UM constantes de 1999 indudablemente es menor:

[48] $\boldsymbol{VA} = \frac{10}{(1+0.05)^8} =$ UM 6.77

**Sintaxis**

**VA(tasa;nper;pago**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VF | Tipo | VA |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.05 | 8 | | -10 | | 6.77 |

Existen tres tasas diferentes, sólo las dos primeras son tasas de interés:
– La tasa de interés real $\boldsymbol{i}$
– La tasa de interés del mercado o interés corriente $\boldsymbol{ic}$
– La tasa de inflación $\Phi$

Para estimar la inflación en un análisis de valor actual es necesario hacer el ajuste de las fórmulas del interés compuesto para considerar la inflación.

[21] $\boldsymbol{VA} = \boldsymbol{VF}\frac{1}{(1+\boldsymbol{i})^n}$, en esta fórmula $\boldsymbol{i}$ es la tasa de interés real

VF (en unidades monetarias futuras/corrientes) puede convertirse en dinero de hoy/constantes con la siguiente ecuación:

$$\boldsymbol{VA} = \frac{VF}{(1+\Phi)^n}\frac{1}{(1+i)^n} = \frac{VF}{[(1+\Phi)(1+i)]^n} \qquad \boldsymbol{VA} = \boldsymbol{VF}\frac{1}{(1+i+\Phi+i\cdot\Phi)}$$

Si definimos a $\boldsymbol{i} + \Phi + \boldsymbol{i}\,\Phi$ como $\boldsymbol{i}\,\Phi$, la fórmula es:

[49] $\boldsymbol{VA} = \boldsymbol{VF}\frac{1}{(1+\boldsymbol{i}_\Phi)^n} =$ $\boldsymbol{VF}$ (***VA/VF***, $\boldsymbol{i}_\Phi$, $\boldsymbol{n}$)

$\boldsymbol{i}_\Phi$ es la tasa de interés inflada definida como:

**<u>Símbolos</u>:**

$\boldsymbol{i}$ = tasa de interés real
$\Phi$ = tasa de inflación
$\boldsymbol{i}_\Phi$ = tasa de interés inflada

**<u>Ejercicio 124</u> (Calculando la tasa inflada)**

1) Con la tasa real del 15% y la de inflación del 6% anual, determinar la tasa de interés inflada:

**<u>Solución</u>:**

$\boldsymbol{i} = 0.15$; $\Phi = 0.06$; $\boldsymbol{i}_\Phi = ?$

[50] $\boldsymbol{i}_\Phi = 0.15 + 0.06 + 0.15*0.06 = 0.219$

Es decir, si tomo un préstamo en un mercado inflacionario el interés a pagar será mayor; igualmente, cualquier inversión requerirá una tasa de rentabilidad mayor.

**Ejercicio 125 (Seleccionando alternativas de inversión)**

Una persona debe decidir invertir en un negocio para lo cual dispone de 3 alternativas:

Alternativa A : UM 45,000 hoy
Alternativa B : UM 10,000 anuales durante 6 años comenzando dentro de 1 año.
Alternativa C : UM 35,000 dentro de 2 años y otros UM 55,000 dentro de 4 años.

Si la persona desea obtener el 15% real anual sobre su inversión y estima la tasa promedio anual de inflación en 4.5%. ¿Qué alternativa debe ejecutar?.

**Solución**:

La forma más rápida de evaluación es determinar el valor actual de cada alternativa.

$i = 0.15$; $\Phi = 0.045$; $VA_A = 45,000$; $VA_B$, $VA_C = ?$

Calculamos para B y C, la tasa inflada aplicando la fórmula [50]:

[50] $i_{\Phi} = 0.15 + 0.045 + 0.15(0.045) = 0.20175$

Luego operando adecuadamente las fórmulas [24] y [49] o las funciones VA obtenemos:

$VA_A$ = UM 45,000, está a valor actual

[24] $$\boldsymbol{VA}_B = 10,000\left\langle\frac{1.20175^6-1}{0.20175*1.20175^6}\right\rangle = \text{UM }33,111.15$$

[49] $$\boldsymbol{VA}_C = \frac{35,000}{1.20175^2} + \frac{55.000}{1.20175^4} = \text{UM }50,604.58$$

**Sintaxis**

**VA(tasa;nper;pago**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VF | Tipo | VA |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.20175 | 6 | -10,000 | | | 33,111.15 |

**Sintaxis**

**VA(tasa;nper;pago**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VF | Tipo | VA |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.20175 | 2 | | -35,000 | | 24,234.82 |
| 0.20175 | 4 | | -55,000 | | 26,369.76 |
| **VAC** | | | | | 50,604.58 |

**Respuesta:**

Seleccionamos la alternativa ***C***, por cuanto arroja el mayor valor actual.

**Ejercicio 126 (Calculando el VA con la tasa inflada)**

Necesitamos obtener el valor actual de la serie uniforme de pagos de UM 2,500 anuales durante 7 años si la tasa real es 15% anual y la tasa de inflación es 3.8% anual, asumiendo que los pagos son en términos de (1) unidades monetarias de hoy y (2) unidades monetarias futuras.

**Solución (1)**: Dado que las unidades monetarias están a valor actual, utilizamos la ***i*** real de 15%.

$C = 2,500$; $i = 0.15$; $n = 7$; $VA=?$

[24] $$\boldsymbol{VA} = 2,500\left\langle\frac{(1+0.15)^7-1}{0.15(1+0.15)^7}\right\rangle = \text{UM }10,401.05$$

**Sintaxis**

**VA**(**tasa**;**nper**;**pago**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VF | Tipo | VA |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.15 | 7 | -2,500 | | | 10,401.05 |

**Solución (2)**:
Como las unidades monetarias están expresadas a valor futuro, utilizamos la tasa inflada:

[50] $\boldsymbol{i}\Phi = 0.15 + 0.038 + 0.15 * 0.038 = 0.1937$

[24] $\boldsymbol{VA} = 2{,}500\left\langle\frac{(1+0.1937)^{7}-1}{0.1937 * 1+0.1937^{7}}\right\rangle = \text{UM } 9{,}169.38$

**Sintaxis**

**VA**(**tasa**;**nper**;**pago**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VF | Tipo | VA |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.1937 | 7 | -2,500 | | | 9,169.38 |

Calculamos también el VA convirtiendo los flujos de efectivo futuros en unidades monetarias de hoy mediante la tasa de interés real del 15%. Resulta más sencillo operar la fórmula [24] con el valor de la tasa inflada, que convertir los valores futuros a valores actuales y luego aplicar el factor (VA/VF).
Si los dólares futuros están expresados en monedas de hoy o constantes (o han sido transformados a monedas de hoy), calculamos el valor actual utilizando la tasa de interés real $\boldsymbol{i}$ en las fórmulas de valor actual. Cuando las unidades monetarias están expresadas en monedas corrientes de entonces o en valores futuros, es necesario trabajar con la tasa de interés inflada $\boldsymbol{i}_{\Phi}$.

## 3.1. El valor futuro considerando la inflación

En el cálculo del valor futuro considerando la inflación es posible presentar cualquiera de cuatro cantidades diferentes:

**1º Dólares actuales acumulados**
En este caso utilizamos en las fórmulas de equivalencia la tasa inflada establecida ($\boldsymbol{i}_{\Phi}$).

Reagrupando la fórmula [49], obtenemos:

[51] $\boldsymbol{VF} = \boldsymbol{VA}(1+\boldsymbol{i}\,\Phi)^{\boldsymbol{n}}$ o ($VF/VA$, $\boldsymbol{i}_{\Phi}$, n)

**2º Poder de compra del dinero acumulado en términos de valores de hoy**
En este grupo utilizamos la tasa inflada $\boldsymbol{i}_{\Phi}$, en equivalencia y dividida por $(1 + \boldsymbol{i}_{\Phi})$n. La división por $(1 + \boldsymbol{i}_{\Phi})$n deflacta el dinero inflado. Esto quiere decir, que los precios aumentan durante la inflación, con UM 10 en el futuro compraremos menos bienes que con UM 10 ahora. Expresamos esto en forma de ecuación:

[52] $\boldsymbol{VF} = \frac{\boldsymbol{VA}\,(1+\boldsymbol{i}_{\Phi})^{n}}{(1+\Phi)^{n}} = \frac{\boldsymbol{VA}\,(\boldsymbol{VF/VA}, \boldsymbol{i}_{\Phi}, \boldsymbol{n})}{(1+\Phi)^{n}}$

**Ejercicio 127 (De aplicación)**
Supongamos que UM 2,500 tienen la tasa inflada del 15% de interés anual durante 9 años. La tasa de inflación anual es de 6%.

**Solución:**
VA = 2,500; n = 9; $i_{\Phi} = 0.15$; $\Phi = 0.06$; VF = ?

[52] $\boldsymbol{VF} = \frac{2{,}500(1+0.15)^{9}}{(1+0.06)^{9}} = \text{UM } 5{,}206.56$

Ahora, asumamos que la inflación es nula (Φ se acerca a 0), dentro de 9 años los UM 2,500, a la tasa de interés del 15%, aumentará a:

[51] $\boldsymbol{VF} = 2{,}500\,(1 + 0.15)^9 =$ UM 8,794.69

Esto quiere decir que el poder de compra hoy y dentro de 9 años es igual. La inflación del 6% anual erosoionó el poder de compra en:

8,794.69 - 5,206.56 = UM 3,588.13.

La tasa de interés real puede calcularse resolviendo para *i* en la fórmula [50]:

[50] $\boldsymbol{i}_\Phi = \boldsymbol{i} + \Phi + \boldsymbol{i}\,.\Phi$ de donde:

[53] $\boldsymbol{i} = \dfrac{\boldsymbol{i}_\Phi - \Phi}{1+\Phi}$ o también $\boldsymbol{i} = \dfrac{1+\boldsymbol{i}_{\boldsymbol{\Phi}}}{1+\Phi}$

Esta ecuación permite calcular la tasa de interés real ***i*** a partir de la tasa de interés inflada ***i***F del mercado. Las fórmulas para calcular la tasa de interés real (**i**) y corriente o comercial (***ic***) cuando el componente riesgo es cero son: Ver Capítulo 1, numeral 13.3. Componentes de la tasa de interés, páginas 51, 52 y 53:

[2] $\boldsymbol{ic} = (1+\boldsymbol{i})(1+\Phi) - 1$, de donde

[3] $\boldsymbol{i} = \dfrac{(1+\boldsymbol{ic})}{(1+\Phi)} - 1$

**<u>Nomenclatura</u>**:
**ic** = tasa corriente
**i** = tasa real
Φ = porcentaje de inflación en el período

**Fórmula para la obtención de la inflación acumulada**:

[4] $\Phi = (1+\Phi_1)(1+\Phi_2)\ \ldots\ (1+\Phi_3) - 1$

*«El uso de la tasa de interés real i es adecuada para calcular el valor futuro de la inversión, especialmente una cuenta de ahorro o un fondo de mercado de dinero, cuando los efectos de la inflación deben ser considerados».*

Volviendo a los UM 2,500 anteriores, a partir de la fórmula [53], aplicamos la fórmula (19) o la función VF y obtenemos:

[53] $\boldsymbol{i} = \dfrac{0.15 - 0.06}{1 + 0.06} =$ 0.0849056

**VF** = 2,500(1 + 0.0849056)9 = UM 5,205.56

**Sintaxis**
**VF**(**tasa**;**nper**;**pago**;va;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VA | Tipo | VF |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.0849056 | 9 | | -2,500 | | 5,205.56 |

Como vemos, la tasa de interés de mercado del 15% anual sufre una reducción a menos del 9% anual como consecuencia de los efectos de la inflación. <u>Una tasa de inflación mayor que la tasa de interés inflada, es decir</u>, **Φ > i**$_\Phi$**,** <u>conduce a una tasa de interés real negativa ***i*** en la fórmula</u> [53]**.**

**3º Dinero requerido para tener el mismo poder de compra**
Los precios aumentan en períodos inflacionarios, luego comprar bienes en una fecha futura significa mayores desembolsos de dinero para adquirir lo mismo. En términos sencillos, el dinero futuro (corrientes de entonces) vale menos, luego necesitamos más dinero.

**Ejercicio 128 (VF considerando únicamente la inflación)**
1) ¿Cuánto tengo que pagar dentro de 7 años por un bien que hoy cuesta UM 7,500 y la inflación es de 4.8% anual?.

**Solución:**
VA = 7,500; $\Phi = 0.048$; n = 7; VF =?

[19] $\boldsymbol{VF} = 7{,}500\,(1 + 0.048)^7 =$ UM 10,413.34

Para obtener el resultado hemos adecuado ligeramente la fórmula general del valor futuro incorporando sólo la inflación a la ecuación.

2) Sí UM 2,500 es el costo de un producto cuyo precio crece exactamente con la tasa de inflación del 6% anual, el costo dentro de 9 años será:

VA = 2,500; $\Phi = 0.06$; n = 9; VF = ?

[19] $\boldsymbol{VF} = 2{,}500\,(1 + 0.06)^9 =$ UM 4,223.69

**4º Unidades monetarias futuras para mantener el poder de compra y obtener intereses**
Este caso considera tanto los precios crecientes (3º caso) como el valor del dinero en el tiempo; es decir, debemos de obtener el crecimiento real del capital, los fondos deben crecer a una tasa igual a la tasa de interés $\boldsymbol{i}$ más la tasa de inflación $\Phi$.

Luego con el ejercicio 127, para obtener la tasa de retorno de 8.49% cuando la inflación es 6%, empleamos $\boldsymbol{i}_\Phi$ en las fórmulas. Utilizando la misma cantidad:

i = 0.0849; $\Phi = 0.06$; $i\Phi$ = ?

[50] $\boldsymbol{i}_\Phi = 0.0849 + 0.06 + 0.0849 * 0.06 = 0.1499$ (15%)

VA = 2,500; $i\Phi = 0.15$; n = 9; VF =?

[51] $\boldsymbol{VF} = 2{,}500(1 + 0.15)^9 =$ UM 8,794.69

Esto demuestra que UM 8,794.69 dentro de 9 años es equivalente a UM 2,500 ahora con un retorno real de i = 8.49% anual y la inflación de 6% anual. Finalizando esta parte constatamos: que UM 2,500 hoy a la tasa del mercado de 15% anual se convierten en UM 8,794.69 en 9 años; los UM 8,794.69 tendrían el poder de compra de UM 5,205.56 de hoy si F = 6% anual; un producto con el precio de UM 2,500 ahora, tendría el precio de UM 4,223.69 dentro de 9 años con la inflación del 6% anual; y UM 8,794.69 futuros para ser equivalente a UM 2,500 ahora a la tasa de interés real de 0.0849 con la inflación del 6%.

**Ejercicio 129 (Evaluación alternativas con y sin inflación)**
Los ejecutivos de una imprenta deben decidir entre dos alternativas para incorporar a su planta de producción una nueva impresora offset: la alternativa A, supone adquirir la impresora ahora al costo de UM 150,000 instalada y lista para operar; y la alternativa B significa diferir la compra durante 4 años y estimamos que el costo aumente hasta UM 310,000. La tasa real no ajustada por inflación es del 13% anual y la inflación estimada es de 3.5% anual. Determinar la mejor alternativa tomando en cuenta: 1) ausencia de inflación y 2) presencia de inflación.

**Solución (1)** (Ausencia de inflación)
$i = 0.13$; $VA_A = 150{,}000$; $VF_B = 310.000$; $n = 4$; $VF_A = ?$

[19] $\boldsymbol{VF_A} = 150{,}000(1 + 0.13)4 =$ UM 244,571
$\boldsymbol{VF_B} =$ UM 310,000

Recomendamos la alternativa A, arroja un valor menor; la compra debe efectuarse ahora.

**Solución (2)** (Presencia de inflación)
$i = 0.13$; $\Phi = 0.035$; $i_\Phi = ?$

1º Calculamos la tasa ajustada por inflación:

[50] $i_\Phi = 0.13 + 0.035 + 0.13*0.035 = 0.16955$

2º Calculamos el VF para la alternativa B:

$i = 0.16955$; $VA_A = 150{,}000$; $VF_B = 310.000$; $n = 4$; $VF_A = ?$

[19] $\boldsymbol{VF_A} = 150{,}000(1 + 0.169555)4 =$ UM 280,651
$\boldsymbol{VF_B} =$ UM 310,000

Después de esta evaluación seguimos recomendando la alternativa A, por cuanto requerimos menos dinero futuro equivalente.
¿Qué sucede en un país con una inflación mayor?. Supongamos la tasa de inflación en 14% anual y la tasa real del 19%. Veamos que sucede:

| **Sin inflación** | **Con inflación** |
|---|---|
| i = 19% | $i_\Phi$ = 0.19 + 0.14 + 0.19*0.14 = 35.66% |
| VFA = 150,000*1,194 = UM 300,801 | VFA = 150,000*1.35664 = UM 580,041 |
| VFB = UM 310,000 | VFB = UM 310,000 |
| Aceptamos la alternativa A | Aceptamos la alternativa B |

### 3.2. Recuperación del capital y fondo de amortización considerando la inflación

En los cálculos de recuperación del capital es importante que éstos incluyan la inflación. Dado que las UM futuras (valores corrientes) tienen menos poder de compra que las UM de hoy (valores constantes), requerimos más UUMM para recuperar la inversión actual. Esto obliga al uso de la tasa de interés del mercado o la tasa inflada en la fórmula [25] (C/VA).

**Ejercicio 130 (Tasa real, tasa inflada y cálculo de la anualidad)**
Si invertimos hoy UM 5,000 a la tasa real de 15% cuando la tasa de inflación es del 12% también anual, la cantidad anual de capital que debe recuperarse durante 8 años en UM corrientes (futuros) de entonces será:

1º Calculamos la tasa inflada:
$i = 0.15$; $\Phi = 0.12$; $\boldsymbol{i_\Phi} =?$

[52] $\boldsymbol{i_\Phi} = 0.15 + 0.12 + 0.15(0.12) = 0.288$

2º Calculamos la cantidad anual a ser recuperada:

$VA = 5{,}000$; $\boldsymbol{i_\Phi} = 0.288$; $n = 8$; $C =?$

[25] $$\boldsymbol{C} = 5{,}000\left\langle\frac{0.288(1+0.288)^8}{(1+0.288)^8-1}\right\rangle = \text{UM } 1{,}659.04$$

**Sintaxis**
**PAGO**(**tasa**;**nper**;**va**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | VA | VF | Tipo | PAGO |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.288 | 8 | -5,000 | | | 1,659.04 |

**Respuesta**:
La cantidad anual que debe recuperarse considerando la tasa real incluida la inflación es UM 1,659.04.

## 4. Cálculo de rendimiento en moneda extranjera

Para el cálculo de la rentabilidad o costo de una inversión o de un préstamo en moneda extranjera, es necesario considerar el efecto de la devaluación o revaluación de la moneda (base de comparación) frente a la unidad monetaria con la cual estamos negociando.

**Ejercicio 131 (VF con devaluación monetaria)**
Consideremos la adquisición de una máquina nueva por el valor de US$ 60,000, con la tasa anual de 9%, para su liquidación en un sólo pago a fin de año. ¿Cuál será el costo en nuevos soles de dicha compra?.

**Solución:**

1º Calculamos el VF en moneda extranjera de la máquina, aplicando indistintamente la fórmula (19) o la función VF:

VA = 60,000; i = 0.09; n = 1; VF =?

[19] $VF = 60{,}000(1+0.09)^1 =$ US$ 65,400

**Sintaxis**
**VF**(**tasa**;**nper**;**pago**;va;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VA | Tipo | VF |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.09 | 1 | | -60,000 | | 65,400.00 |

2º Para determinar la rentabilidad en nuevos soles (moneda peruana) debemos tener el valor del dólar al momento inicial y final de la inversión. Supongamos que al momento de realizar la compra el tipo de cambio es de S/. 3.50 por dólar y la devaluación proyectada es de 8% anual. Con la devaluación podemos calcular el valor del dólar frente al nuevo sol, para ello aplicamos indistintamente la fórmula (19) o la función VF, considerando la devaluación como la tasa de interés:

VA = 3.50; $i_{DEV} = 0.08$; n = 1; VF =?

[19] $VF = 3.50(1+0.08)^1 =$ S/. 3.78 por dólar

**Sintaxis**
**VF**(**tasa**;**nper**;**pago**;va;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VA | Tipo | VF |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.08 | 1 | | -3.50 | | 3.78 |

Es decir, que al final del año un dólar tendrá un valor de S/. 3.78
3º Con esta información podemos calcular el equivalente del valor actual y del valor futuro (final) en nuevos soles, para determinar el costo del crédito.

VA = 60,000 * 3.50 = S/. 210,000
VF = 65,400 * 3.78 = S/. 247,212
n = 1 año
i =?

4º Aplicando la fórmula [1A] obtenemos el costo efectivo de la deuda:

$$[1A]\quad \boldsymbol{i} = \frac{\dfrac{247{,}212 - 210{,}000}{210{,}000}}{1} = 0.1772$$

El costo efectivo de dicha deuda en moneda nacional es 17.72% anual.

Del anterior procedimiento para el cálculo de la rentabilidad en moneda extranjera y mediante reemplazos derivamos la siguiente ecuación:

$$[54]\quad \boldsymbol{i}\ \text{M.E.} = \boldsymbol{i}\ \text{EXT.} + \boldsymbol{i}\ \text{DEV.} + (\boldsymbol{i}\ \text{EXT.} * \boldsymbol{i}\ \text{DEV.})$$

**Nomenclatura:**

***i*** Ext = tasa de interés en el mercado extranjero.
***i*** DEV = tasa de devaluación.
***i*** M.E. = tasa de rendimiento/costo efectivo, de una inversión/deuda en moneda extranjera, expresado en moneda nacional.

**Datos del ejemplo anterior:**

***i*** Ext = 0.09
***i*** DEV = 0.08

$$[54]\quad \boldsymbol{i}\ \text{M.E.} = 0.09 + 0.08 + (0.09 * 0.08) = 0.1772$$

La fórmula proporciona rápidamente el costo efectivo en términos porcentuales de la deuda o inversión.

# EJERCICIOS DESARROLLADOS

## Capítulo IV

**Ejercicio 132 (FSC - Calculando el VF, pospagable)**
Si abrimos una libreta de ahorros, con UM 4,800 ganando intereses de 6% anual, 7 años después por cambios en la política económica del país, la tasa de interés sube al 9% anual. ¿Cuánto tendríamos 10 años después?.

**En los primeros 7 años**:
VA = 4,800; i = 0.06; n = 7; VF = $4,800*(1+0.06)^7$

**En los siguientes 10 años**:
VA = $4,800*(1+0.06)^7$; i = 0.09; n = 10; VF = ?

[19] $\boldsymbol{VF} = 4,800*1.06^7*1.09^{10} =$ UM 17,086.27

**Respuesta**:
Después de 10 años tendremos UM 17,086.27

**Ejercicio 133 (FCS - Calculando el VF, anualidades pospagables)**
Si deposito mensualmente UM 500, a una tasa efectiva anual (TEA) del 15% a plazo fijo. ¿Cuánto habré acumulado luego de 18 meses?

**Solución:**
C = 500; n = 18; TEA = 0.15; i = ?; VF = ?

1º Calculamos la tasa periódica mensual, a partir de la TEA:

[43A] $\boldsymbol{i} = \sqrt[12]{(1+0.15)} - 1 = 0.0117$

2º Calculamos el monto acumulado después de 18 meses con la fórmula [27] y la función VF de Excel:

[27] $\boldsymbol{VF} = 500\left\langle\frac{(1+0.0117)^{18}-1}{0.0117}\right\rangle =$ UM 9,953.43

**Sintaxis**
**VF(tasa;nper;pago**;va;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VA | Tipo | VF |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.0117 | 18 | -500 | | | 9,953.43 |

**Respuesta:**
Después de 8 meses tendré UM 9,953.43

**Ejercicio 134 (FDFA - Cuotas pospagables a partir del VF)**
Tenemos planificado viajar de vacaciones, para lo cual, ahorramos mensualmente durante un año y medio cantidades uniformes. Si la tasa de interés anual del banco es 9%, ¿cuánto deberemos ahorrar mensualmente para poder acumular los UM 10,000 deseados?

**Solución:**
VF = 10,000; n = 18; i = (0.09/12) = 0.0075; C =?

[29] $\boldsymbol{C} = 10,000\left\langle\frac{0.0075}{(1+0.0075)^{18}-1}\right\rangle =$ UM 520.98

**Sintaxis**
**PAGO(tasa;nper;va**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | VA | VF | Tipo | PAGO |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.0075 | 18 | | -10,000 | | 520.98 |

**Respuesta:**
Debemos ahorrar mensualmente UM 520.98

**Ejercicio 135 (Calculando n)**
¿Deseamos saber en qué tiempo la suma de UM 2,500 al 9% trimestral serán UM 3,700?

**Solución:**
VA = 2,500; VF = 3,700; i = 0.0225 (9/4); n = ?

Calculamos el tiempo aplicando la fórmula (23) o la función NPER:

$$[23] \quad \boldsymbol{n} = \frac{\log\left\langle\frac{3,700}{2,500}\right\rangle}{\log(1.0225)} = 17.6194$$

**Sintaxis**
**NPER(tasa; pago; va**; vf; tipo)

| Tasa | Pago | VA | VF | Tipo | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.0225 | | -2,500 | 3,700 | | 17.6194 |

**Respuesta:**
Con ambos métodos obtenemos el mismo resultado. El tiempo en el que UM 2,500 al 9% trimestral se convertirán en UM 3,700 es 18 trimestres.

**Ejercicio 136 (Tasas de interés, anualidades, tabla de amortización y TIR)**
Una empresa que requiere UM 25,000, consigue un préstamo por el cual suscribe un pagaré al 22.5% de tasa efectiva anual; con los siguientes cargos: comisión administrativa de 1.65% flat sobre el monto del préstamo descontado al inicio, respaldada con una comisión aval del 4% efectivo anual contra los saldos insolutos.

1. ¿Cuál es la tasa periódica y la cuota mensual del préstamo?
2. Determine la tasa periódica de la comisión aval y elabore el cronograma del servicio de la deuda.
3. Determine la cuota uniforme mensual y la TEA del préstamo incluido todas las comisiones y gastos.

1º Calculamos la tasa periódica a partir de la TEA: Obtenemos la tasa nominal del préstamo y de la comisión aval, con la función TASA.NOMINAL de Excel y luego determinamos la tasa $i$ mensual para ambos:

**Solución**: (1)
TEAPRESTAMO = 22.5%; i =?; C = ?

Calculamos la tasa periódica y el valor de cada cuota con la fórmula (43A), (25) o la función PAGO:

$$[43A] \quad \boldsymbol{i} = \sqrt[12]{(1+0.225)} - 1 = 0.0171$$

$$[25] \quad \boldsymbol{C} = 25,000\left\langle\frac{0.0171(1+0.0171)^{12}}{(1+0.0171)^{12}-1}\right\rangle = \text{UM } 2,322.09$$

**Sintaxis**
**PAGO(tasa;nper;va**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | VA | VF | Tipo | PAGO |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.0171 | 12 | -25,000 | | | 2,322.09 |

**Solución**: (2)
$TEA_{AVAL}$= 0.04;  i = ?;  C = 2,322.09;  PAGOS NETOS = ?

Elaboramos el cuadro de servicio de la deuda, para ello calculamos primero la tasa periódica de la comisión aval y determinamos el flujo neto:

[43A] $\boldsymbol{i}=\sqrt[12]{(1+0.04)}-1=0.0033$ mensual

| AÑOS | SALDO INICIAL | C.AVAL 0.0033 | INTERES 0,0171 | AMORT. | PAGO *C* | PAGOS NETOS | SALDO FINAL |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | | 25,000.00 |
| 1 | 25,000.00 | 82.50 | 427.50 | 1,894.59 | 2,322.09 | 2,404.59 | 23,105.41 |
| 2 | 23,105.41 | 76.25 | 395.10 | 1,926.99 | 2,322.09 | 2,398.34 | 21,178.42 |
| 3 | 21,178.42 | 69.89 | 362.15 | 1,959.94 | 2,322.09 | 2,391.98 | 19,218.48 |
| 8 | 11,037.80 | 36.42 | 188.75 | 2,133.34 | 2,322.09 | 2,358.51 | 8,904.45 |
| 9 | 8,904.45 | 29.38 | 152.27 | 2,169.82 | 2,322.09 | 2,351.47 | 6,734.63 |
| 10 | 6,734.63 | 22.22 | 115.16 | 2,206.93 | 2,322.09 | 2,344.31 | 4,527.70 |
| 11 | 4,527.70 | 14.94 | 77.42 | 2,244.67 | 2,322.09 | 2,337.03 | 2,283.04 |
| 12 | 2,283.04 | 7.53 | 39.04 | 2,283.05 | 2,322.09 | 2,329.62 | 0 |

Saldo Final = Saldo Inicial - Amortización
Saldo Inicial = Saldo Final
Pagos Netos = COMISION AVAL + Pago

**Solución**: (3)
1º Para calcular la tasa periódica (flujo variable) que incluya la comisión de administración, la comisión aval y la propia tasa del préstamo aplicamos la función TIR:

| AÑOS | PREST. | C. ADM 1.65% | FLUJOS NETOS |
|---|---|---|---|
| 0 | 25,000.00 | 412.50 | -24,588.00 |
| 1 | | | 2,404.59 |
| 2 | | | 2,398.34 |
| 3 | | | 2,391.98 |
| 10 | | | 2,344.31 |
| 11 | | | 2,337.03 |
| 12 | | | 2,329.62 |
| | **TIR** | | **2.31%** |

2º Calculamos el valor de la cuota uniforme (pagos netos) aplicando la fórmula [25] o la función PAGO.

[25] $\boldsymbol{C}=25{,}000\left\langle\frac{0.0203(1+0.0231)^{12}}{(1+0.0231)^{12}-1}\right\rangle=$ UM 2,409.23

**Sintaxis**
**PAGO**(**tasa**;**nper**;**va**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | VA | VF | PAGO |
|---|---|---|---|---|
| 0.0231 | 12 | -25,000 | | 2,409.23 |

Para calcular la cuota incluido todos los gastos que la operación financiera irrogue, debemos utilizar esta TIR.

3º El costo efectivo de la deuda lo calculamos con la función INT.EFECTIVO, a partir de la tasa nominal:

$j$ = 0.0231 mensual*12 = 0.2772

**Sintaxis**
**INT.EFECTIVO(int_nominal;núm_per_año)**

| Int_nominal | núm_per_año | INT.EFECTIVO |
|---|---|---|
| 0.2772 | 12 | 0.3153 |

**Respuesta:**
1) Tasa periódica préstamo 1.17%. La cuota mensual es UM 2,322.09
2) La tasa periódica de la comisión aval es 0.33%
3) La TEA del préstamo incluido las comisiones y gastos es 31.53% y la cuota uniforme calculada con esta tasa es UM 2,409.23

**Ejercicio 137 (Cuota y costo de compra a crédito)**
Debemos comprar al crédito una camioneta cuyo precio cash es de UM 25,000, bajo las siguientes condiciones: cuota inicial de UM 5,000 y el saldo a pagar en 18 mensualidades iguales con el 1.8% de interés mensual. Al preguntar el cliente a cuánto ascenderían las cuotas mensuales a pagar, el vendedor explica que ellas contienen una porción de capital y de interés respectivamente y efectúa cálculos de la siguiente manera:

$\boldsymbol{C} = (20,000 + 20,000 * 0.018 * 18)/18 = \text{UM } 1,471.11$

El cliente dubitativo pregunta lo siguiente:
a) ¿Cuál es el costo efectivo mensual de este crédito?
b) ¿A cuánto ascenderían las cuotas mensuales a pagar si, efectivamente, me están cobrando el 1.8% de interés mensual?

**Solución:** (a)
VA = 20,000; C = 1,471.11; n = 18; i =?

a) El financiamiento es únicamente por UM 20,000 y el compromiso de pago de 18 mensualidades por UM 1,471.11 c/u, luego calculamos la tasa de Interés (***i***).

Para calcular el valor de ***i*** utilizamos la función financiera TASA:

**Sintaxis**
**TASA(nper;pago;va**;vf;tipo;estimar)

| Nper | Pago | VA | VF | Tipo | Tasa |
|---|---|---|---|---|---|
| 18 | 1,471.11 | -20,000 | | | 0.03137 |

Luego, el costo efectivo mensual del financiamiento de esta camioneta, es de 3.14% y no de 1.8% mensual como nos informan.

**Solución:** (b)
VA = 20,000; i = 0.018; n = 18; C =?

b) Calculamos el valor de la cuota con la fórmula [25] o con la función financiera PAGO:

$$[25] \quad \boldsymbol{C} = 20,000 \left\langle \frac{0.018(1+0.018)^{18}}{(1+0.018)^{18}-1} \right\rangle = \text{UM } 1,310.70$$

**Sintaxis**
**PAGO(tasa;nper;va**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | VA | VF | Tipo | PAGO |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.018 | 18 | -20,000 | | | 1,310.70 |

**Respuesta**:
El pago periódico debería ser de UM 1,310.70 mensual y no UM 1,471.11.

**Ejercicio 138 (Cuota y VA de deuda con Bancos)**
Un empresario, con una obligación bancaria por UM 60,000 pagaderos en 6 años trimestralmente al 20% de tasa efectiva anual. Al finalizar el 2º año, luego de haber efectuado el pago correspondiente a dicho trimestre plantea lo siguiente:

a) ¿Cuánto tendría que abonar al final del 2º año para pagar su deuda?
b) ¿Cuánto tendría que pagar al banco en ese momento (final 2º año) para que a futuro sus cuotas de pagos trimestrales asciendan sólo a UM 2,500?
c) ¿Cómo afectaría calcular el valor actual de la deuda considerando una menor TEA, por ejemplo, del 16%?

**Solución**: (a)
VA = 60,000; n = (6*4) = 24; TEA = 0.20; C =?

1º Calculamos el pago periódico inicialmente pactado:

[43A] $\boldsymbol{i} = \sqrt[4]{1+0.20} - 1 = 0.0466$ trimestral

**Sintaxis**
**PAGO**(**tasa**;**nper**;**va**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | VA | VF | Tipo | PAGO |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.0466 | 24 | -60,000 | | | 4,205.57 |

2º Al finalizar el segundo año deberá sólo 16 cuotas trimestrales por los 4 años que restan. Conociendo el pago periódico de UM 4,205.57, estamos en condiciones de determinar el VA de estos pagos, descontándolos a la misma tasa de interés con la que fueron calculados:

C = 4,205.57; i = 0.0466; n = 16; VA =?

[24] $\boldsymbol{VA} = 4,205.57\left\langle \frac{1.0466^{16} - 1}{0.0466 * 1.0466^{16}} \right\rangle =$ UM 46,707.16

**Sintaxis**
**VA**(**tasa**;**nper**;**pago**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VF | Tipo | VA |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.0466 | 16 | -4,206 | | | 46,707.16 |

**Respuesta (a):**
Para pagar el total de la deuda al final del año 2, tendríamos que abonar al Banco UM 46,707.16

**Solución (b):** Para resolver este problema, calculamos el valor actual de los pagos futuros de UM 2,500 teniendo en cuenta que serían dieciséis y la tasa de interés de 4.66% trimestral.

C = 2,500; n = 16; i = 0.0466; VA =?

[24] $\boldsymbol{VA} = 2,500\left\langle \frac{1.0466^{16} - 1}{0.0466 * 1.0466^{16}} \right\rangle =$ UM 27,762.22

**Sintaxis**
**VA**(**tasa**;**nper**;**pago**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VF | Tipo | VA |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.0466 | 16 | -2,500 | | | 27,762.22 |

Luego el *VA* de las cuotas de UM 2,500 cada una asciende a UM 27,762.22

**Respuesta (b):**
Al final del año 2º deberíamos pagar al Banco:
46,707.16 - 27,762.22 = UM 18,944.94 y a partir de este pago queda un saldo de UM 27,772.22 y las cuotas mensuales para los próximos 16 trimestres serían de UM 2,500, cada una.

**Solución: (c)**
Aparentemente, la menor tasa de interés es más favorable; sin embargo, vamos a calcular a cuánto ascendería el *VA* de la deuda con una TEA del 16%. Conocemos el pago periódico hallado al inicio y el número de cuotas periódicas pendientes de pago.

C = 4,205.57; n = 16; TEA = 0.16 anual; VA =?

1º Calculamos la tasa trimestral, luego el *VA* con la tasa del 16% anual:

[43A] $\boldsymbol{i}=\sqrt[4]{1+0.16}-1=0.0378$ trimestral

**Sintaxis**
**VA(tasa;nper;pago**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VF | Tipo | VA |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.0378 | 16 | -4,205.57 | | | 49,809.52 |

**Respuesta (c):**
Luego, observamos que si el banco recalcula el valor actual de la deuda con esta TEA (menor), estaría perjudicando al empresario, como vemos al comparar los valores actuales calculados con las tasas anuales del 20% y del 16%.

**Ejercicio 139 (Refinanciamiento de una deuda con cuotas pospagables)**
Contraemos una obligación por UM 10,000 para pagarlo en 24 meses a la tasa mensual del 3.8%. Luego de efectuado el décimo pago y ante problemas financieros, proponemos a nuestro acreedor el deseo de seguir pagando siempre y cuando la deuda pendiente sea refinanciada a 3 años. Calcular el importe de cada pago mensual.

**Solución:**
VA = 10,000; n = 24; i = 0.038; C =?

1º Calculamos la cuota mensual pactada a partir de las variables conocidas:

[25] $\boldsymbol{C}=10{,}000\left\langle\frac{0.038*1.038^{24}}{1.038^{24}-1}\right\rangle=$ UM 642.51

**Sintaxis**
**PAGO(tasa;nper;va**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | VA | VF | Tipo | PAGO |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.038 | 24 | -10,000 | | | 642.51 |

2º Con el valor de la cuota a pagar de UM 642.51 mensual, calculamos el VA de los 14 pagos pendientes:

[24] $\boldsymbol{VA}=642.51*\left\langle\frac{1.038^{14}-1}{0.038*1.038^{14}}\right\rangle=$ UM 6,877.41

**Sintaxis**
**VA(tasa;nper;pago**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VF | Tipo | VA |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.038 | 14 | -642.51 | | | 6,877.41 |

Con el importe de VA = 6,877.41 recalculamos la cuota mensual a pagar en los próximos 3 años:

VA = 6,877.51;   n = 36;   i = 0.038;   C =?

[25] $\boldsymbol{C}=6{,}877.51*\left\langle\frac{0.038*1.038^{36}}{1.038^{36}-1}\right\rangle=$ UM 353.72

**Sintaxis**

**PAGO(tasa;nper;va**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | VA | VF | Tipo | PAGO |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.038 | 36 | -6,877.41 | | | 353.72 |

Otra forma de recalcular la cuota a pagar en los próximos 3 años, es elaborar el CRONOGRAMA de pagos y establecer el saldo en el 10º mes y a partir de este calcular el PAGO uniforme.

**CRONOGRAMA DE PAGOS**

| *n* | SALDO INICIAL | INTERES 0.038 | AMORT. | TOTAL PAGO | SALDO FINAL |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | 10,000.00 |
| 1 | 10,000.00 | 380.00 | 262.51 | 642.51 | 9,737.49 |
| 2 | 9,737.49 | 370.02 | 272.48 | 642.51 | 9,465.01 |
| 3 | 9,465.01 | 359.67 | 282.84 | 642.51 | 9,182.17 |
| 9 | 7,598.37 | 288.74 | 353.77 | 642.51 | 7,244.60 |
| **10** | **7,244.60** | **275.29** | **367.21** | **642.51** | **6,877.38** |
| 11 | 6,877.38 | 261.34 | 92.37 | 353.72 | 6,785.01 |
| 12 | 6,785.01 | 257.83 | 95.89 | 353.72 | 6,689.12 |
| 18 | 6,152.19 | 233.78 | 119.93 | 353.72 | 6,032.26 |
| 45 | 668.96 | 25.42 | 328.30 | 353.72 | 340.67 |
| 46 | 340.67 | 12.95 | 340.77 | 353.72 | 0.00 |

**Respuesta:**
El importe de los pagos mensuales es de UM 353.72, para los próximos tres años.

**Ejercicio 140 (FAS - VA anualidades prepagables)**
Contraemos un préstamo a 10 años para comprar una camioneta y programamos su pago, por medio de cuotas adelantadas por UM 400 al inicio de cada trimestre. Luego de haber transcurrido 3 años, ganamos el premio mayor de la lotería, con lo cual cubrimos el total de la deuda. ¿Cuánto tendremos que pagar en ese momento para liquidar la deuda, si tenemos en cuenta que las cuotas fueron calculadas con la tasa de interés del 21% capitalizable trimestralmente, sin cargos adicionales por el prepago?

**Solución: (Cuotas adelantadas)**
El valor de cada cuota es UM 400 al inicio de cada período. También sabemos que restan siete años para pagar el crédito (28 trimestres). Calculamos la tasa trimestral 0.21/4 = 0.0525, con la que procedemos a calcular el valor actual de la deuda contraída con el banco para liquidar el préstamo.

C = 400;   n = (7*4) = 28;   i = 0.0525;   TIPO = 1;   VA =?

[24] $\boldsymbol{VA}=400\left\langle\frac{1.0525^{28}-1}{0.0525*1.0525^{28}}\right\rangle*(1+0.0525)=$ UM 6,105.22

**Sintaxis**

**VA(tasa;nper;pago**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VF | Tipo | VA |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.0525 | 28 | -400 | | 1 | 6,105.22 |

**Respuesta:**
Por los 28 trimestres que faltan tenemos que pagar hoy la suma de UM 6,105.22 para la liquidación total de la deuda.

**Ejercicio 141 (Anualidades pre y pos pagables)**
Un documento considera pagos trimestrales de UM 30,000 durante 5 años. Pagamos este documento en una sola cuota anticipada o vencida. Calcular ambos casos asumiendo el 28% de interés con capitalización trimestral.

**Solución:** (Cuota anticipada)
C = 30,000; n = (5*4) = 20; i = (0.28/4) = 0.07; TIPO = 1; VA = ?

[24] $$\boldsymbol{VA} = 30{,}000\left\langle\frac{1.07^{20}-1}{0.07*1.07^{20}}\right\rangle*(1+0.07) = \text{ UM } 340{,}067.86$$

**Sintaxis**
**VA(tasa;nper;pago**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VF | Tipo | VA |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.07 | 20 | -30,000 | | 1 | 340,067.86 |

**Solución:** (Cuota vencida)
C = 30,000; n = 20; i = 0.07; TIPO = 0; VA =?

[24] $$\boldsymbol{VA} = 30{,}000\left\langle\frac{1.07^{20}-1}{0.07*1.07^{20}}\right\rangle = \text{ UM } 317{,}820.43$$

**Sintaxis**
**VA(tasa;nper;pago**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VF | Tipo | VA |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.07 | 20 | -30,000 | | | 317,820.43 |

**Respuesta:**
En un solo pago anticipado es UM 340,067.86 y vencido UM 317,820.43. Por definición el VA o VF de las cuotas prepagables es mayor al VA o VF de las anualidades pospagables.

**Ejercicio 142 (Caso especial de anualidades e interés compuesto)**
Un pequeño empresario ahorra UM 10,000 anuales, en los últimos seis años para la educación de sus dos menores hijos. La institución financiera le paga el 6% de interés anual. El último abono lo hizo el 1º de enero de 1993. A partir de esta fecha decide no efectuar retiros hasta el 1º de enero de 1998, fecha elegida para retirar UM 14,000 anualmente, hasta que el saldo quede en cero. Determinar ¿cuánto tiempo podrá hacer esto? y ¿cuánto dinero podrá retirar al final si no son los UM 14,000?.

**Solución**: De 1987 a 1993 el caso es de anualidades; de 1993 a 1998 es de interés compuesto; de 1998 hasta la fecha tratamos nuevamente con anualidades.

**1º Anualidad:** (1993 - 1987 = 6 años)
C = 10,000; n = 6; i = 0.06; VF =?

[27] $$\boldsymbol{VF} = 10{,}000\left\langle\frac{(1+0.06)^{6}-1}{0.06}\right\rangle = \text{ UM } 69{,}753.19$$

**Sintaxis**
**VF(tasa;nper;pago**;va;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VA | Tipo | VF |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.06 | 6 | -10,000 | | | 69,753.19 |

**2º Interés compuesto:** (1998 - 1993 = 5 años)
VA = 69,753.19; i = 0.06; n = 5; VF =?

[19] $VF = 69{,}753.19*(1 + 0.06)^5 = \text{UM } 93{,}345.50$

**Sintaxis**
**VF**(**tasa**;**nper**;**pago**;va;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VA | Tipo | VF |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.06 | 5 | | -69,753.19 | | 93,345.50 |

**3º <u>Anualidad</u>:** (1998 a n)
C = 14,000; i = 0.06; VA = 93,345.50; n =?

Aplicando la fórmula [26] o la función NPER, tenemos:

$$[26] \quad \boldsymbol{n} = \frac{\log\left\langle 1-\frac{93,345.19}{14,000}\right\rangle * 0.06}{\log\left\langle\frac{1}{1.06}\right\rangle} = 8.7682 \text{ años}$$

**Sintaxis**
**NPER**(**tasa**; **pago**; **va**; vf; tipo)

| Tasa | Pago | VA | VF | Tipo | *n* |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.06 | 14000 | -93,345.50 | | | 8.7682 |

Esto quiere decir, que retirando durante 8 años, aun quedará un saldo en la cuenta. El valor de estos 9 retiros de UM 14,000 cada uno lo calculamos con la función VF, para ello capitalizamos los UM 93,345.50:

C = 14,000; i = 0.06; VA = 93,345.50; n = 8; VF =?

**Sintaxis**
**VF**(**tasa**;**nper**;**pago**;va;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VA | Tipo | VF |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.06 | 8 | | -93,345.50 | | 148,778.55 |
| 0.06 | 8 | -14,000 | | | 138,564.55 |
| SALDO AL FINAL DE LOS 8 AÑOS | | | | | 10,213.99 |

Si dejamos este saldo por 8 años al 6% capitalizando anualmente, hasta el año 2007, tenemos:

[19] **VF** = 10,213.99*$(1 + 0.06)^9$ = UM 16,279.55

**<u>Respuesta</u>:**
Podrá retirar UM 14,000 anuales durante 8 años y UM 16,279.55 al final del año 2007.

**<u>Ejercicio 143</u> (Un caso de testamento)**
Un testamento estipula que el albacea deberá vender todo el activo de la herencia e invertir el producto neto en una anualidad de 10 años pagadera a un sobrino, o si este muriera antes que él, a otro beneficiario nombrado.
El albacea determina que el único activo que existe en la herencia son pagarés por UM 120,000 de una compañía importante que vencen a los 8 años y devengan el 5% de interés pagadero por semestres.
Poco antes de morir el testador, la compañía giradora de los pagarés tropezó con dificultades financieras y convino con los tenedores de los títulos valores suspender el pago regular de los cupones quedando éstos como pasivo diferido. Estimamos pagar al vencimiento de los documentos el capital más los cupones con el interés sobre los mismos, capitalizando semestralmente al 5%. Esos valores no son negociables en el mercado, pero un particular ofrece comprarlos a un precio que calculando el valor actual tomando como base el 7% anual. El capital así obtenido es utilizado para comprar la anualidad de 10 años. Encontrar el importe que cobraría anualmente el sobrino, considerando la tasa del 4%.

La solución de este caso lo llevaremos a cabo en tres partes:

**<u>Solución</u>:**
VA = 120,000; n = (2 x 8) = 16; i = 0.025 (0.05/2); VF =?

1º Calculamos el monto de los pagarés a su vencimiento (VF):

[19] $\boldsymbol{VF} = 120{,}000\ (1 + 0.025)^{16}$ = UM 178,140.67

**Sintaxis**
**VF**(**tasa**;**nper**;**pago**;va;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VA | Tipo | VF |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.025 | 16 | | -120,000 | | 178,140.67 |

2º Ahora, encontraremos el valor actual de UM 178,140.67 a pagar dentro de 8 años, a la tasa anual del 7%.

VF = 178,140.61; n = 8; i = 0.07; VA =?

**Sintaxis**
**VA**(**tasa**;**nper**;**pago**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VF | VA |
|---|---|---|---|---|
| 0.07 | 8 | | -178,140.67 | 103,679.49 |

Igual resultado obtenemos aplicando la fórmula [21].

3º Tratando el capital así obtenido como el valor actual de una anualidad, calculamos la anualidad que comprarían los UM 103,679.49 por 10 años al 4%.

VA = 103,679.49; n = 10; i = 0.04; C =?

**Sintaxis**
**PAGO**(**tasa**;**nper**;**va**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | VA | VF | Tipo | PAGO |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.040 | 10 | -103,679.49 | | | 12,782.74 |

Igual resultado obtenemos aplicando la fórmula [25].

**<u>Respuesta</u>:**
Finalmente, el sobrino heredero recibirá anualmente UM 12,782.74 durante 10 años.

**<u>Ejercicio 144</u> (VA gradiente geométrico pospagable)**
Una máquina tiene los siguientes costos: Inicial UM 22,000, de salvamento UM 2,600 y de operación UM 11,700 en el año 1, con aumentos anuales de 3% en los próximos años. Duración 10 años, tasa anual de interés 21%. Calcular el valor actual de la máquina.

**<u>Solución</u>:**
Q = 11,700; i = 0.21; E = 0.03; n = 10; VAE =?

1º Encontramos el valor actual de la serie escalera con la fórmula:

$$[38] \quad \boldsymbol{VA}_E = \frac{11{,}700 * \left\langle \dfrac{1.03^{10}}{1.21^{10}} - 1 \right\rangle}{0.03 - 0.21} = \frac{11{,}700(-0.8002353)}{-0.18} = \text{ UM } 52{,}015$$

2º Actualizamos el valor de salvamento (VS) con la fórmula [21]:

VF = 2,600; i = 0.21; n = 10; $VA_0$ =?

$$[21\ ] \quad \boldsymbol{VA}_0 = \frac{2{,}600}{1.21^{10}} = \text{ UM } 386.47$$

**Sintaxis**
**VA**(**tasa**;**nper**;**pago**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VF | Tipo | VA |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.21 | 10 | | -2,600 | | 386.47 |

3º Finalmente en el año 0 (hoy), tenemos:

$VA_0$ = 22,000 + 52,015 - 386 = UM 73,629

**Respuesta:**
El valor actual de la máquina es UM 73,629.

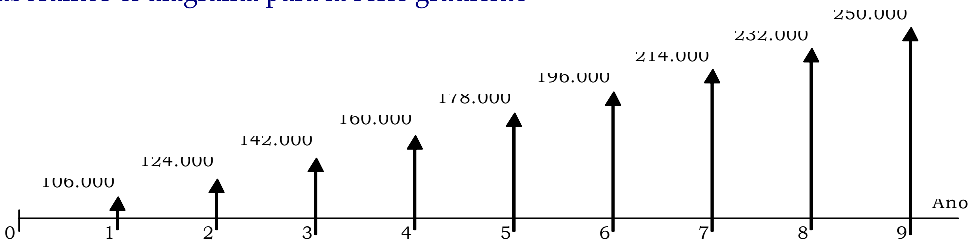
**Ejercicio 145 (Calculando el gradiente uniforme)**
Los directivos de la empresa Bebidas S.A. estiman ingresos por UM 106,000 a partir del próximo año. No obstante, esperan el incremento uniforme de las ventas con la introducción de un nuevo producto, hasta alcanzar el nivel de UM 250,000 en 9 años. ¿Cuál es el gradiente?. Construir el diagrama del flujo de efectivo.

**Solución**:
La cantidad base es de UM 106,000 y la ganancia:

Ganancia en 9 años = 250,000 - 106,000 = UM 144,000

$$Gradiente = \frac{ganacia}{n-1} \qquad G = \frac{144{,}000}{9-1} = \text{ UM } 18{,}000$$

Finalmente, elaboramos el diagrama para la serie gradiente

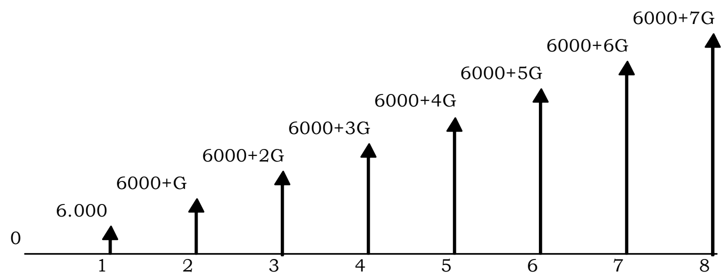



**Respuesta**:
El gradientes es UM 18,000

**Ejercicio 146 (Inversión con gradiente uniforme pospagable)**
En una empresa los directivos desean tener disponible para inversión UM 750,000 dentro de 8 años. Proyectan invertir UM 6,000 el primer año y después asumir incrementos en un gradiente uniforme. Considerando que la tasa anual de la compañía es de 22.5%. Determinar el tamaño del gradiente para que la empresa cumpla con su objetivo.

**Solución:**
VF = 750,000; C = 6,000; i = 0.225; n = 8; G =?

1º Elaboramos el diagrama de flujo:




2º Con la plantilla Excel y la herramienta Buscar Objetivo calculamos el gradiente, para ello lebaoramos el flujo de los ingresos, de la siguiente forma:

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | **n** | **GRADIENTE** | **1º PAGO** | **VF** |
| 2 | 1 | | 6,000.00 | 6,000.00 |
| 3 | 2 | 20,823.53 | | 26,823.53 |
| 4 | 3 | | | 47,647.06 |
| 5 | 4 | | | 89,294.12 |
| 6 | 5 | | | 130,941.18 |
| 7 | 6 | | | 193,411.76 |
| 8 | 7 | | | 255,882.35 |
| 9 | 8 | | | 339,176.47 |
| 10 | INVERSION REQUERIDA | | | 750,000.00 |

En la columna B3 (Gradiente) ingresamos 1000 un valor arbitrario, en la columna C2 digitamos el valor del primer abono, así:

Celda B3 Digitamos simplemente 1000
Celda C2 Digitamos simplemente 6000
Celda D2 =C2
Celda D3 =C2 + B3
Celda D4 =C2 + 2*B3
Celda D5 =C2 + 3*B3
Celda D6 =C2 + 4*B3
Celda D7 =C2 + 5*B3
Celda D8 =C2 + 6*B3
Celda D9 =C2 + 7*B3

En Buscar Objetivo (Ver Capítulo 2, páginas 87 y 88) en Definir Celda colocamos el cursor en D10 de la siguiente manera:

- Definir la celda D10
- con el valor 750000
- para cambiar la celda B3

Aplicando la fórmula [35A] también calculamos el valor del gradiente, debemos tener presente que las cuotas se capitalizan considerando 8 períodos y el gradiente 7:

$$[35A]\quad \boldsymbol{VF}=\boldsymbol{C}*\left\langle\frac{(1+\boldsymbol{i})^{n}-1}{\boldsymbol{i}}\right\rangle+\frac{\boldsymbol{G}}{\boldsymbol{i}}*\left\langle\frac{(1+\boldsymbol{i})^{n-1}-1}{\boldsymbol{i}}-\boldsymbol{n}\right\rangle$$

$$[35A]\quad 750{,}000=6{,}000*\left\langle\frac{(1+0.225)^{8}-1}{0.225}\right\rangle+\frac{\boldsymbol{G}}{0.225}*\left\langle\frac{(1+0.225)^{8-1}-1}{0.225}-8\right\rangle$$

**G** = 20,823.53

**Ejercicio 147 (Tráfico de vehículos con crecimiento geométrico)**
El flujo de tráfico esperado sobre un puente es 1’500,000 vehículos para el primer año. El aumento estimado de la tasa promedio de tráfico es 7% anual.

a) Hallar el número esperado de vehículos que utilizan el puente en el año décimo de servicio.
b) Determinar el número total esperado de vehículos que utilicen el puente durante 10 años.
c) Asumiendo el pago de una cuota de UM 2 por vehículo por el uso del puente, determinar el valor actual de todas las tarifas cobradas proyectadas, utilizando una tasa de interés de 9%.

**Solución: (a)**
C = 1’500,000; i = 0.07; n = 10; VF =?

Flujo 1º Año = 1’500,000; Tasa de crecimiento geométrico = 0.07

a) Calculamos el valor futuro con la fórmula [27]:

$$[27]\quad \boldsymbol{VF} = 1'500,000\left\langle\frac{1.05^{10}-1}{0.05}\right\rangle = 20'724{,}672 \text{ vehículos}$$

**a)** Utilizando el Programa Excel, calculamos el flujo anual de tráfico de vehículos por año:

| | | | $Q\,(1+E\,)^{n-1}$ |
|---|---|---|---|
| **AÑOS** | **FLUJO VEHICULAR** | **TASA DE CRECIMIENTO** | **TRAFICO ANUAL** |
| 1 | 1,500,000 | | 1,500,000 |
| 2 | 1,500,000 | 0.07 | 1,605,000 |
| 3 | 1,605,000 | 0.07 | 1,717,350 |
| 4 | 1,717,350 | 0.07 | 1,837,565 |
| 5 | 1,837,565 | 0.07 | 1,966,194 |
| 6 | 1,966,194 | 0.07 | 2,103,828 |
| 7 | 2,103,828 | 0.07 | 2,251,096 |
| 8 | 2,251,096 | 0.07 | 2,408,672 |
| 9 | 2,408,672 | 0.07 | 2,577,279 |
| 10 | 2,577,279 | 0.07 | 2,757,689 |
| **Total vehículos durante 10 años** | | | **20,724,672** |

**Respuesta:**
a) El número de vehículos que utilizan el puente en el año 10 es de 2’757,689
b) El número esperado de vehículos durante 10 años es 20’724,672
c) El valor de cobranza proyectado es de 20’724,672 x 2 = UM 41’449,344 durante los 10 años:

VF = 41’449,344; n = 10; i = 0.09; VA =?

$$[21]\quad \boldsymbol{VA} = \frac{41'449{,}344}{1.09^{10}} = \text{ UM } 17'508{,}651$$

**Respuesta:**
El valor actual de todas las tarifas cobradas es de UM 17’508,651

**Ejercicio 148 (Asociación de confeccionistas compra máquina)**
Una asociación de confeccionistas debe adquirir una máquina cuyos costos de mantenimiento el primer año son de UM 2,500, los mismos crecen anualmente en UM 500 por cada año adicional de servicio. La máquina estará en servicio operativo durante 5 años. Utilizando una tasa de interés de 18%, calcular la cantidad

máxima que debe pagarse por un contrato de mantenimiento por toda la vida en el momento de adquisición de la máquina.

**Solución:**
C = 2,500; G = 500; n = 5; i = 0.18; VA =?

Sumamos los valores actuales del gradiente y los beneficios uniformes aplicando las fórmulas [33], (24] o la hoja Excel:

$$[33]\quad \boldsymbol{VA} = \frac{500}{0.18}\left\langle\frac{(1+0.18)^5-1}{0.18}-5\right\rangle\left\langle\frac{1}{(1+0.18)^5}\right\rangle = \text{ UM } 2{,}615.62$$

$$[24]\quad \boldsymbol{VA} = 1{,}000\left\langle\frac{1.15^{10}-1}{0.15*1.15^{10}}\right\rangle = \text{UM } 7{,}817.93$$

**VA** = 2,615.62 + 7,817.93 = UM 10,433.55

| Períodos | BENEFICIOS | | GRADIENTE | | VA Total |
|---|---|---|---|---|---|
| | Anuales | VA | Acumulado | VA | |
| 1 | 2,500 | 2,118.64 | | | 2,118.64 |
| 2 | 2,500 | 1,795.46 | 500 | 359.09 | 2,154.55 |
| 3 | 2,500 | 1,521.58 | 1,000 | 608.63 | 2,130.21 |
| 4 | 2,500 | 1,289.47 | 1,500 | 773.68 | 2,063.16 |
| 5 | 2,500 | 1,092.77 | 2,000 | 874.22 | 1,966.99 |
| **Totales** | | **7,817.93** | | **2,615.62** | **10,433.55** |

**Respuesta:**
Lo máximo que es posible pagar durante el tiempo que esté en servicio la máquina es UM 7,817.93.

**Ejercicio 149 (Beneficios de un equipo nuevo)**
Los ingresos netos por una pieza de equipo de construcción recientemente adquirida son UM 15,000 el primer año y disminuyen en UM 2,500 cada año por costos de mantenimiento. El equipo estará en uso 5 años. ¿Qué anualidad producirá un ingreso equivalente, cuando la tasa de interés es de 9%?

**Solución**
1º Aplicando la fórmula (24) o la función VA, calculamos el VA de los beneficios:

C = 15,000; n = 5; i = 0.09; VA =?

$$[24]\quad \boldsymbol{VA} = 15{,}000\left\langle\frac{1.09^5-1}{0.09*1.09^5}\right\rangle = \text{ UM } 58{,}344.77$$

**Sintaxis**
**VA**(**tasa**;**nper**;**pago**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VF | VA |
|---|---|---|---|---|
| 0.09 | 5 | -15,000 | | 58,344.77 |

2º Procedemos a calcular con la fórmula (33) el VA del gradiente decreciente:

G = 2,500; n = 5; i = 0.09; VA =?

$$[33]\quad \boldsymbol{VA} = \frac{2{,}500}{0.09}\left\langle\frac{1.09^5-1}{0.09}-5\right\rangle\left\langle\frac{1}{1.09^5}\right\rangle = \text{UM } 17{,}777.62$$

3º Sumamos los valores actuales calculados:

**VAT** = 58,344.77 + 17,777.62 = UM 76,122.39

4º A partir del valor actual total determinamos la anualidad equivalente, bien aplicando la fórmula (25) o la función PAGO:

VAT = 76,122.39;  i = 0.09;  n = 5;  C =?

**Sintaxis**
**PAGO(tasa;nper;va**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | VA | VF | Tipo | PAGO |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.09 | 5 | -76,122.39 | | | 19,570.49 |

**Respuesta:**
La anualidad que producirá un ingreso equivalente es UM 19,570.65

**Ejercicio 150 (Proyectos alternativos de inversión - VAN y TIR)**
Evaluamos 3 proyectos alternativos de inversión cuyos flujos netos de caja son los indicados:

| Proyectos | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1º Proyecto | -60,000 | 8,000 | 15,000 | 15,000 | 15,000 | 20,000 | 28,000 | |
| 2º Proyecto | -110,000 | 40,000 | 40,000 | 40,000 | 40,000 | | | |
| 3º Proyecto | -40,000 | 15,000 | 30,000 | -15,000 | 5,000 | 15,000 | 5,000 | 17,000 |

Las tasas de descuento de los proyectos son:
1º Proyecto 13%, 2º Proyecto 16% y 3º Proyecto 18%.

Evaluar y ordenar por calificación estos proyectos utilizando los 3 métodos de evaluación VAN, RATIO V/I y TIR:

1º Determinamos el VAN y el Ratio Van Inversión, aplicando la función VNA y la fórmula (42):

$$[41]\quad \boldsymbol{VAN} = \left\langle \frac{FC_1}{(1+i)} + \frac{FC_2}{(1+i)^2} + \frac{FC_3}{(1+i)^3} + \frac{FC_4}{(1+i)^4} + \frac{FC_n}{(1+i)^n} \right\rangle - I_0$$

**Sintaxis**
**VNA(tasa;valor1**;valor2; ...)

| AÑO | Tasa | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | VAN |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1º Proy | 0.13 | -60,000 | 8,000 | 15,000 | 15,000 | 15,000 | 20,000 | 28,000 | | 2,726.50 |
| 2º Proy | 0.16 | -110,000 | 40,000 | 40,000 | 40,000 | 45,000 | | | | 4,688.68 |
| 3º Proy | 0.18 | -40,000 | 15,000 | 30,000 | -15,000 | 5,000 | 15,000 | 5,000 | 17,000 | 1,452.40 |

$$[42]\quad \text{RATIO} = \frac{\text{VAN}}{\text{INVERSION}}$$

| | 1º Proyecto | 2º Proyecto | 3º Proyecto |
|---|---|---|---|
| VAN/INVERSION | 4.54% | 4.26% | 3.63% |

2º Calculamos la TIR con la función TIR:

$$[\boldsymbol{TIR}]\quad -I_0 + \frac{FC_1}{(1+i)} + \frac{FC_2}{(1+i)^2} + \frac{FC_3}{(1+i)^3} + \frac{FC_4}{(1+i)^4} + \frac{FC_n}{(1+i)^n} = 0$$

**Sintaxis**
**TIR**(**valores**;estimar)

| AÑO | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | TIR |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1º Proy | -60,000 | 8,000 | 15,000 | 15,000 | 15,000 | 20,000 | 28,000 | | 14.36% |
| 2º Proy | -110,000 | 40,000 | 40,000 | 40,000 | 45,000 | | | | 18.08% |
| 3º Proy | -40,000 | 15,000 | 30,000 | -15,000 | 5,000 | 15,000 | 5,000 | 17,000 | 19.48% |

3º Con los resultados obtenidos ordenamos los proyectos por preferencias:

| METODOS DE EVAL | 1º Proyecto | 2º Proyecto | 3º Proyecto |
|---|---|---|---|
| VAN | 2,726.50 | 4,688.68 | 1,452.40 |
| VAN/INVERSION | 4.54% | 4.26% | 3.63% |
| TIR | 14.36% | 18.08% | 19.48% |

| | **1º Proyecto** | **2º Proyecto** | **3º Proyecto** |
|---|---|---|---|
| **VAN** | 2º | 1º | 3º |
| **VAN/INVERSION** | 1º | 2º | 3º |
| **TIR** | > QUE TASA DSCTO. | > QUE TASA DSCTO. | > QUE TASA DSCTO. |

**Respuesta:**
De acuerdo a la tabla anterior, la alternativa a seleccionar es el 1º Proyecto por cuanto el ratio VAN/Inversión, es el más elevado en esta alternativa.

**Ejercicio 151 (Evaluando un proyecto con el VAN y la TIR)**
Un proyecto cuesta UM 120,000 y promete los siguientes beneficios netos al final de cada período: UM 60,000, UM 48,000, UM 36,000, UM 25,000. Si la tasa de descuento es 15%. Calcular el VAN y la TIR del proyecto.

**Solución:**
i = 0.15; n = 4; VAN =?; TIR =?

1º Aplicando la función VNA calculamos el VAN:

**Sintaxis**
**VNA**(**tasa**;**valor1**;valor2; ...)

| Tasa | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | VAN AL 15% |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.15 | -120,000 | 60,000 | 48,000 | 36,000 | 25,000 | 6,433.22 |

**Sintaxis**
**TIR**(**valores**;estimar)

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | TIR |
|---|---|---|---|---|---|
| -120,000 | 60,000 | 48,000 | 36,000 | 25,000 | 0.1806 |

**Resultados:**
Tenemos un VAN positivo de UM 6,433.22. Según esta medida el proyecto debe ser aceptado. La TIR del 18.06% es superior a la tasa de descuento de 15% exigida por el proyecto. Según la TIR también el proyecto es aceptado.

**Ejercicio 152 (VAN y TIR)**
Aceptar o rechazar los siguientes proyectos de inversión, empleando los métodos del VAN, la TIR y el VAN / Inv.. Asumir como tasa de descuento el 15%.

**Solución**:
i = 0.15; n = 2; VAN = ?; RATIO V/I = ?; TIR = ?

Flujo de Caja de los 3 proyectos

| Proyecto | Período | | |
|---|---|---|---|
| | **0** | **1** | **2** |
| A | -50,000 | 10,000 | 76,000 |
| B | -50,000 | 0 | 55,000 |
| C | -50,000 | 0 | 95,000 |

Evaluamos los tres proyectos aplicando las fórmulas y funciones conocidas:

| Proyecto | Período | | | VAN al 15% | TIR | VAN / Inv. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | | | |
| A | -50,000 | 10,000 | 76,000 | 16,163 | 34% | 32.33% |
| B | -50,000 | 0 | 55,000 | -8,412 | 5% | -16.82% |
| C | -50,000 | 0 | 95,000 | 21,834 | 38% | 43.67% |

**Respuesta:**
Según los tres métodos de evaluación debe rechazarse el Proyecto B, aceptar el proyecto C, por cuanto arroja un VAN positivo mayor, una TIR más alta y superior al 15% exigida por los tres proyectos y un ratio VAN / Inv. más alto de UM 0.4367 por cada unidad monetaria invertida.

**Ejercicio 153 (Evaluando la compra de maquinaria)**
Un pequeño empresario está por adquirir una máquina cuyo precio de lista es UM 15,000. Si la compra al contado obtiene el 15% de descuento, si la adquiere al crédito debe pagar una cuota inicial equivalente al 25% del precio de lista y el saldo en seis cuotas constantes, con período de gracia sin desembolso de intereses y con el 3.8% de interés mensual. Elaborar el cronograma de pagos y determinar el costo de la deuda. Considerar el reajuste en la tasa de interés que sube al 4.5% después del pago de la tercera cuota.

**Solución**:
i = 0.038, 0.045; n = 6; VA = ?; C = ?

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1º Encontramos el precio contado | = (15,000)(0.85) | = | UM 12,750 |
| 2º Cuota inicial | = 15,000*0.25 | = | UM 3,750 |
| Valor actual del crédito (VA) | = 15,000 - 3,750 | = | UM 11,250 |

3º Como el préstamo considera un mes de gracia sin desembolso de intereses, calculamos el interés que sumado al principal nos proporciona el saldo con el que calculamos el valor de cada cuota para los siguientes 5 años:

***I*** = 11,250*0.038 = UM 427.50

**Saldo**1 = 11,250 + 427.50 = UM 11,677.50

4º Con el saldo 1, calculamos el valor de cada cuota para los próximos 5 años. Aplicamos indistintamente la fórmula [25] o la función PAGO:

**Sintaxis**
**PAGO**(**tasa**;**nper**;**va**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | VA | VF | Tipo | PAGO |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.038 | 5 | -11,677.50 | | | 2,608.36 |

5º Elaboramos EL CRONOGRAMA DE PAGOS de la obligación:

| AÑOS | SALDO INICIAL | INTERÉS | AMORTZ | PAGO | SALDO FINAL |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | 11,250.00 |
| 1 | 11,250.00 | 427.50 | | | **11,677.50** |
| 2 | 11,677.50 | 443.75 | 2,164.62 | 2,608.36 | 9,512.88 |
| 3 | 9,512.88 | 361.49 | 2,246.87 | 2,608.36 | 7,266.01 |
| 4 | 7,266.01 | 276.11 | 2,332.25 | 2,608.36 | **4,933.75** |
| 5 | 4,933.75 | 222.02 | 2,412.59 | 2,634.61 | 2,521.16 |
| 6 | 2,521.16 | 113.45 | 2,521.16 | 2,634.61 | 0 |

Como al pagar la tercera cuota nos informan del cambio de la tasa de interés, con el saldo que obtenemos de UM 4,933.75 descontando las tres cuotas pagadas, calculamos el valor de las dos últimas cuotas:

**Sintaxis**
**PAGO**(**tasa**;**nper**;**va**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | VA | VF | Tipo | PAGO |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.045 | 2 | -4,933.75 | | | 2,634.61 |

6º Calculamos el costo de la deuda, indistintamente actualizando los flujos de efectivo con la fórmula (21) o aplicando directamente la función TIR:

**Sintaxis**
**TIR**(**valores**;estimar)

| AÑO | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | TIR |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| FLUJO | -11,250.00 | 0.00 | 2,608.36 | 2,608.36 | 2,608.36 | 2,634.61 | 2,634.61 | 3.90% |

7º A partir de la tasa mensual de 3.9% que incluye el cambio de la tasa de interés, obtenemos la TEA del préstamo:

[43B] $\textbf{TEA}=(1+0.039)^{12}-1=0.5827$

**Respuesta:**
El costo efectivo anual del préstamo es 58.27%.

**Ejercicio 154 (Flujo de caja y TIR)**
El dueño de una imprenta solicita al banco un préstamo para adquirir una impresora Offset que al contado le cuesta UM 60,000. El banco acepta otorgarle el préstamo aplicando el 27% anual al rebatir para su pago en seis armadas iguales. El banco cobra una comisión flat del 3% y retenciones del 12%. Elaborar el flujo de caja y determinar el costo del préstamo.

**Solución**:
VA = 60,000; i = 0.27; n = 6; C =?

1º Calculamos el valor de cada cuota con la fórmula [24] o la función PAGO:

**Sintaxis**
**PAGO**(**tasa**;**nper**;**va**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | VA | VF | Tipo | PAGO |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.27 | 6 | -60,000 | | | 21,269.04 |

2º Los cálculos anteriores fueron hechos con el 27% de costo anual. Esta tasa será mayor al incluir la comisión flat del 3%, la retención del 12% y la devolución de la retención al final del año 6, conforme refleja el siguiente flujo de caja y TIR:

| Fin de Año | Préstamo | Retención | Comisión | Pagos | Devol. | Flujo Neto |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 60,000 | 7,200 | 1,800 | | | -51,000 |
| 1 | | | | 21,269 | | 21,269 |
| 2 | | | | 21,269 | | 21,269 |
| 3 | | | | 21,269 | | 21,269 |
| 4 | | | | 21,269 | | 21,269 |
| 5 | | | | 21,269 | | 21,269 |
| 6 | | | | 21,269 | 7,200 | 14,069 |
| | | | | | **TASA INTERNA DE RETORNO (TIR)** | **33.50%** |

Retención = Préstamo*0.12
Comisión flat = Préstamo*0.03

Aplicando la función TIR, obtenemos la tasa anual del préstamo:

**Sintaxis**
**TIR**(**valores**;estimar)

| **AÑO** | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **TIR** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **FLUJO** | -51,000 | 21,269 | 21,269 | 21,269 | 21,269 | 21,269 | 14,069 | **33.50%** |

**Respuesta**:
El costo efectivo del préstamo, incluido la comisión flat del 3% y el 12% de retención, es 33.50%. Es decir, 6.5% más sobre la tasa corriente del 27%.

**Ejercicio 155 (VAN y TIR de un proyecto de inversión)**
Una Máquina tiene un costo inicial (CI) de UM 20,000 y una vida útil de 5 años, al cabo de los cuales su valor de salvamento (VS) es de UM 2,000. Los costos de operación y mantenimiento (CCop) son de UM 600 al año, estimamos que los ingresos (W) asciendan a UM 6,000 al año por el aprovechamiento de la máquina ¿Cuál es el VAN y la TIR de este proyecto?

**Solución:**
CI = 20,000; n = 5; VS = 2,000; CCop = 600 año; W = 6,000 año; VAN =?; TIR =?

1º Elaboramos el flujo de caja del proyecto:

**FLUJO DE CAJA**

| AÑOS | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Cuota Inicial (CI) | -20,000 | | | | | |
| Valor de Salvamento (VS) | | | | | | 2,000 |
| Ingresos | | 6,000 | 6,000 | 6,000 | 6,000 | 6,000 |
| Egresos | | -600 | -600 | -600 | -600 | -600 |
| Flujos Netos | -20,000 | 5,400 | 5,400 | 5,400 | 5,400 | 7,400 |

2º Aplicando la función VNA y TIR calculamos el VAN y la tasa periódica anual

**Sintaxis**
**VNA**(**tasa**;**valor1**;valor2; ...)

| **AÑO** | **Tasa** | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **VAN** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **FLUJO** | 0.12 | -20,000 | 5,400 | 5,400 | 5,400 | 5,400 | 7,400 | 536.29 |

**Sintaxis**
**TIR**(**valores**;estimar)

| **AÑO** | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **TIR** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **FLUJO** | -20,000 | 5,400 | 5,400 | 5,400 | 5,400 | 7,400 | 13.15% |

Con una tasa de descuento del 13%, el VAN es igual a cero.

**Respuesta:**
La TIR del proyecto es 13% anual y el VAN es UM 536.29

**Ejercicio 156** (Evaluando flujos mutuamente excluyentes aplicando el VAN y la TIR)
Un consorcio de pequeños empresarios del sector agroindustrial tiene los siguientes flujos que deben evaluar para decidir cuál es el más rentable. Son flujos mutuamente excluyentes y cuya tasa de descuento es de 18%. Utilizar para la evaluación el VAN y la TIR.

| PROYECTOS | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 1A | -461.54 | 276.92 | 476.92 | |
| 2B | -400.00 | 184.62 | 421.54 | 523.08 |
| 3C | -276.92 | 421.54 | | |

1º Calculamos la TIR y el VAN de cada uno de los proyectos, aplicando los procedimientos conocidos:

**Sintaxis**
**VNA**(**tasa**;**valor1**;valor2; ...)

| | Tasa | 0 | 1 | 2 | 3 | VAN |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1A | 18.00% | -370.00 | 280.00 | 475.00 | | 208.43 |
| 2B | 18.00% | -380.00 | 190.00 | 430.00 | 530.00 | 412.41 |
| 3C | 18.00% | -280.00 | 430.00 | | | 84.41 |

**Sintaxis**
**TIR**(**valores**;estimar)

| | 0 | 1 | 2 | 3 | TIR |
|---|---|---|---|---|---|
| 1A | -370.00 | 280.00 | 475.00 | | 57.29% |
| 2B | -380.00 | 190.00 | 430.00 | 530.00 | 67.38% |
| 3C | -280.00 | 430.00 | | | 53.57% |

Cuadro consolidado del VAN y la TIR:

| | TIR | VAN |
|---|---|---|
| 1A | 57.29% | 208.43 |
| **2B** | **67.38%** | **412.41** |
| 3C | 53.57% | 84.41 |

**Respuesta**:
A simple vista tanto el VAN como la TIR nos indican que el mejor proyecto es el 2B, por cuanto arroja un mayor VAN y una TIR superior al costo de capital (18% contra 67.38%).

**Ejercicio 157** **(Cálculo del costo promedio de capital y evaluación de flujos de caja con VAN, TIR y B/C)**
Evaluar los siguientes flujos de caja de un proyecto aplicando el VAN, la TIR y la relación B/C: (El impuesto a la renta es de 25%)

| CONCEPTO | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Inversión | -420 | | | | | |
| Base imponible | | 133 | 200 | 333 | 307 | 467 |
| IR 25% | | -33 | -50 | -83 | -77 | -117 |
| **FNC** | **-420** | **100** | **150** | **250** | **230** | **350** |

**Solución:**
Considere la tasa de descuento del proyecto como una combinación de deuda con la siguiente estructura:

| FUENTE | PROPORCION | TEA |
|---|---|---|
| BANCO A | 30% | 36% |
| BANCO B | 25% | 42% |
| APORTE PROPIO | 45% | 25% |

2º Calculamos el costo promedio de capital:

**COSTO PROMEDIO DEL CAPITAL (WACC)**

| PROPORCION | COSTO | PONDERACION |
|---|---|---|
| 30% | 0.36 | 0.108 |
| 25% | 0.42 | 0.105 |
| 45% | 0.25 | 0.113 |
| Costo promedio | | 0.3255 |

Costo de capital = 32.55%

3º Con esta tasa calculamos el VAN. Aplicando las funciones VAN y TIR tenemos:

| AÑO | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | VAN | TIR |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| FNC | -420 | 100 | 150 | 250 | 320 | 350 | 37.37 | 0.3691 |

4º Aplicando la fórmula [42], calculamos la relación beneficio costo:

$$[42] \quad \frac{B}{C} = \frac{\text{VAC - Valor Actual de los Costos}}{\text{VAB - Valor Actual de Beneficios}}$$

El VAC lo calculamos bien aplicando al flujo neto sucesivamente la fórmula (21) o la función VNA al 32.55% de tasa por periódo. El VAB esta representado por la inversión que está a valor actual:

| AÑO | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | VAC | VAB | B/C |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| FNC | -420 | 100 | 150 | 250 | 320 | 350 | 457.37 | 420.00 | 0.9183 |

**RESULTADOS:**

1. **VAN = 37** (VAN > 1)**,** indica que los beneficios proyectados son superiores a sus costos. Aceptamos el proyecto.
2. **TIR = 36.91%,** indica que la tasa de rendimiento es superior a la tasa del proyecto (32.55%). El proyecto debe ser aceptado.
3. **B/C = 0.9183** (B/C < 1)**,** significa que los ingresos son menores que los egresos, entonces el proyecto no debe ser aceptado.

**Comentario**: Apoyándonos en el VAN, el proyecto debería llevarse a cabo. Es una medida de evaluación más consistente, por cuanto proporciona la rentabilidad del proyecto en valores monetarios deducida la inversión, actualizando los flujos a la tasa de descuento del proyecto (32.55%).

**Ejercicio 158 (TIR Banco caro versus Banco barato)**

Pedro trabaja colocando créditos en un «Banco Barato» y tiene que convencer a su cliente que el crédito que el ofrece es más barato que el crédito que le ofrece el banco competidor, el «Banco Caro». Para demostrarlo Pedro hace uso de la TIR. El préstamo en ambos casos es de UM 500,000, con pagos en cuotas pospagables a tres años. Ambos exigen las mismas garantías reales.

El Banco Barato ofrece las siguientes condiciones:

Cuotas trimestrales de UM 48,630 cada una, con pagos de intereses y capital
Comisiones fijas mensuales de UM 100
Portes mensuales de UM 10
Seguro mensual (perteneciente al grupo) sobre los bienes que la empresa puso en garantía de UM 450.
Comisión de desembolso (pago único) de UM 1,800

El Banco Caro ofrece las siguientes condiciones:
Cuotas mensuales de UM 16,335 por pago de intereses y capital
Comisiones mensuales de UM 30
Portes mensuales de UM 8
Seguro mensual (perteneciente al grupo) sobre los bienes que la empresa puso en garantía de UM 150
Comisión de desembolso (pago único) de UM 2,850

**Solución**: Banco Barato
VA = 500,000; n1 = (3*4) = 12; n2 = (12*3) 36; C = 48,630

Gastos Mensuales = 100 + 10 + 450 = 560
Pago único comisión de desembolso = 1,800

**Solución**: Banco Caro
VA = 500,000; n1 = (3*4) = 12; n2 = (12*3) 36; C = 16,335

Gastos Mensuales = 30 + 8 + 150 = 188
Pago único comisión de desembolso = 2,850

1º Elaboramos el flujo de caja de ambas instituciones financieras, a partir de esta herramienta de análisis y aplicando la función TIR, calculamos la tasa mensual de ambos préstamos:

| | BANCO BARATO | | | | | BANCO CARO | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Mes** | **Préstm.** | **Gastos Mens.** | **Cuotas. Trim.** | **Coms. Desemb.** | **Flujo Neto** | **Préstm.** | **Gastos Mens.** | **Cuotas. Mens.** | **Coms. Desemb.** | **Flujo Neto** |
| 0 | 500,000 | | | 1,800 | -498,200 | 500,000 | | | 2,850 | -497,150 |
| 1 | | 560 | | | 560 | | 188 | 16,335 | | 16,523 |
| 2 | | 560 | | | 560 | | 188 | 16,335 | | 16,523 |
| 3 | | 560 | 48,630 | | 49,190 | | 188 | 16,335 | | 16,523 |
| 4 | | 560 | | | 560 | | 188 | 16,335 | | 16,523 |
| 5 | | 560 | | | 560 | | 188 | 16,335 | | 16,523 |
| 33 | | 560 | 48,630 | | 49,190 | | 188 | 16,335 | | 16,523 |
| 34 | | 560 | | | 560 | | 188 | 16,335 | | 16,523 |
| 35 | | 560 | | | 560 | | 188 | 16,335 | | 16,523 |
| 36 | | 560 | 48,630 | | 49,190 | | 188 | 16,335 | | 16,523 |
| **TIR MENSUAL** | | | | | **1.02%** | **TIR MENSUAL** | | | | **1.00%** |

2º A partir de esta tasa periódica aplicando la fórmula (43B) determinamos el costo efectivo anual de ambos bancos:

(43B) $\mathbf{TEA}_{\mathbf{BANCO\ BARATO}} = (1+0.0102)^{12} - 1 = 0.1295$

(43B) $\mathbf{TEA}_{\mathbf{BANCO\ CARO}} = (1+0.01)^{12} - 1 = 0.1268$

Como vemos, el Banco caro resulta más barato que el de Pedro. Al objeto de mejorar nuestra posición frente al Banco de la competencia deberíamos eliminar el costo del seguro. Veamos que pasa si quitamos los UM 450 mensuales de seguro a nuestro banco:

| | BANCO BARATO | | | | | BANCO CARO | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Mes** | **Préstm.** | **Gastos Mens.** | **Cuotas. Trim.** | **Coms. Desemb.** | **Flujo Neto** | **Préstm.** | **Gastos Mens.** | **Cuotas. Mens.** | **Coms. Desemb.** | **Flujo Neto** |
| 0 | 500,000 | | | 1,800 | -498,200 | 500,000 | | | 2,850 | -497,150 |
| 1 | | 110 | | | 110 | | 188 | 16,335 | | 16,523 |
| 2 | | 110 | | | 110 | | 188 | 16,335 | | 16,523 |
| 3 | | 110 | 48,630 | | 48,740 | | 188 | 16,335 | | 16,523 |
| 4 | | 110 | | | 110 | | 188 | 16,335 | | 16,523 |
| 5 | | 110 | | | 110 | | 188 | 16,335 | | 16,523 |
| 33 | | 110 | 48,630 | | 48,740 | | 188 | 16,335 | | 16,523 |
| 34 | | 110 | | | 110 | | 188 | 16,335 | | 16,523 |
| 35 | | 110 | | | 110 | | 188 | 16,335 | | 16,523 |
| 36 | | 110 | 48,630 | | 48,740 | | 188 | 16,335 | | 16,523 |
| **TIR MENSUAL** | | | | | **0.87%** | **TIR MENSUAL** | | | | **1.00%** |

(43B) $\mathbf{TEA}_{\mathbf{BANCO\ BARATO}}=(1+0.0087)^{12}-1=0.1095$

Al quitar el costo mensual del seguro nuestro Banco se vuelve más atractivo para el mercado, de un costo efectivo anual de 12.95% baja 10.95 de TEA.

**Ejercicio 159 (Análisis de la relación B/C)**
Una institución sin fines de lucro, privilegia proyectos educativos y tiene programado financiar becas para egresados de universidades de países latinoamericanos hasta por un monto anual equivalente a UM 30 millones. El horizonte de este proyecto es de 10 años y calculamos ahorros de UM 10 millones anuales, para los países beneficiados. La tasa de retorno de la institución sobre todas las becas que financia es 8% anual. Dentro de las actividades normales de la institución, ésta es una adicional y considera el retiro de fondos por UM 4 millones de otros programas educativos para destinarlos a este proyecto.

- El proyecto supone gastos anuales de operación por UM 1 millón de su presupuesto normal de Mantenimiento y Operaciones.
- Determinar la justificación del proyecto durante 10 años. Aplique el análisis de B/C.

**Solución**:
VA = 30’000,000; i = 0.08; n = 10; C =?

| | | |
|---|---|---|
| BENEFICIO POSITIVO | (Ahorros anuales) | = 4’000,000 |
| BENEFICIO NEGATIVO | (Retiro de otros programas) | = 10’000,000 |
| VA INGRESOS | | = 6’000,000 |

Calculamos los egresos anuales por mantenimiento y operaciones:

[25] $\mathbf{C}=30'000,000\left\langle\frac{0.08(1.08)^{10}}{(1.08)^{10}-1}\right\rangle=\text{ UM } 4'470,884.66$ , anuales

**Sintaxis**
**PAGO**(**tasa**;**nper**;**va**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | VA | VF | Tipo | PAGO |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.08 | 10 | -30,000,000 | | | 4,470,884.66 |

VA DE LOS EGRESOS = 4’470,884.66 - 1’000,000 = 3’470,884.66

Calculando la razón B/C, tenemos:

[42] $\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{C}}=\frac{6'000,000}{3'470884.66}=1.7287$

**Respuesta**:
Según el criterio de la razón B/C el proyecto es viable, la razón es mayor a uno.

# Capítulo V

**Ejercicio 160 (Períodos de conversión y tasa)**
Una persona invierte por 5 años y 8 meses, al 9% convertible mensualmente. Encontrar la tasa de interés *(i)* por período de conversión y el número de períodos *(n)*.

Período de conversión = 1 año
Frecuencia de conversión = 12

$n$ = (5 x 12) + 8 = 68 períodos de conversión

**Respuesta**:
La tasa periódica es 0.75% mensual y los períodos de conversión 68.

**Ejercicio 161 (Tasa nominal)**
¿Cuál será la tasa nominal j, convertible mensualmente al 66% de TEA?.

**Solución:**
TEA = 0.66; n = 12; j =?

Para solucionar este ejercicio vamos a utilizar indistintamente cuatro modelos:

[43A] $\boldsymbol{i} = \sqrt[12]{1+0.66} - 1 = 0.0431393$

(44A) $j = 0.0431393*12 = 0.5177$

[44] $\boldsymbol{j_{12}} = 12\left\langle(1.66)^{1/12}-1\right\rangle = 0.5177$

**Sintaxis**
**TASA.NOMINAL(tasa_efectiva; núm_per)**

| tasa_efectiva | núm_per | TASA.NOMINAL |
|---|---|---|
| 0.66 | 12 | 0.5177 |

**Respuesta**:
La tasa nominal convertible mensualmente es 51.77%. La fórmula (44) y la función TASA.NOMINAL nos proporcionan resultados directamente.

**Ejercicio 162 (Interés anticipado y tasa efectiva)**
Una empresa accede a un crédito bancario con el 22% de tasa nominal capitalizable por trimestre anticipado. ¿Cuál es el costo efectivo anual de este crédito, considerando tasa vencida?.

**Solución:**
ia = (0.22/4) = 0.055; n = 4; iv =?
1º Aplicando las fórmulas respectivas o la función INT.EFECTIVO, obtenemos:

[A] $\boldsymbol{iv} = \left\langle\frac{0.055}{1-0.055}\right\rangle = 0.0582$ tasa trimestral vencida

[43B] $TEA = [1+0.0582]^4 - 1 = 0.2539$

[44A] $j = 0.0582*4 = 0.2328$

**Sintaxis**
**INT.EFECTIVO(int_nominal;núm_per_año)**

| int_nominal | núm_per_año | INT.EFECTIVO |
|---|---|---|
| 0.2328 | 4 | 0.2539 |

**Respuesta:**
El costo efectivo del crédito bancario a la tasa nominal de 22% capitalizable por trimestre anticipado es 25.39% anual con la tasa trimestral vencida.

**Ejercicio 163 (Tasa nominal y tasa efectiva)**
Deseamos saber a qué tasa nominal, convertible mensualmente, el ahorro de UM 2,500 se transformará en UM 3,700 en 5 años. ¿Cuál será la tasa efectiva en un año?

**Solución:**
VA = 2,500; VF = 3,700; n = 60; i =?; j = ?

[22] $\boldsymbol{i} = \sqrt[60]{\frac{3,700}{2,500}} - 1 = 0.00656$ mensual

**Sintaxis**
**TASA(nper;pago;va**;vf;tipo;estimar)

| Nper | Pago | VA | VF | TASA |
|---|---|---|---|---|
| 60 | | 2,500 | -3,700 | 0.00656 |

[44A] $j = 0.00656*12 = 0.0787$

**Respuesta:**
La TEA 8.16% equivalente a la tasa nominal de 7.87%.

**Ejercicio 164 (TEA y tasa efectiva semestral)**
Decidimos invertir al 24% anual compuesto diariamente. Determinar la tasa efectiva anual y semestral.

**Solución:** (tasa efectiva anual TEA)
j = 0.24; m = 365 días; i = ?

Aplicando la fórmula [43] o la función INT.EFECTIVO calculamos la TEA a partir de la tasa nominal:

[43] $\text{TEA} = \left\langle 1 + \frac{0.24}{365} \right\rangle^{365} - 1 = 0.2711$

**Sintaxis**
**INT.EFECTIVO(int_nominal;núm_per_año)**

| int_nominal | núm_per_año | INT.EFECTIVO |
|---|---|---|
| 0.24 | 365 | 0.2711 |

**Solución:** (tasa efectiva semestral)
j = 0.12; m = (365/2) = 182 días; i =?

[43] $\boldsymbol{i}(\text{semestral}) = \left\langle 1 + \frac{0.12}{182} \right\rangle^{182} - 1 = 0.1275$

**Sintaxis**
**INT.EFECTIVO(int_nominal;núm_per_año)**

| int_nominal | núm_per_año | INT.EFECTIVO |
|---|---|---|
| 0.12 | 182 | 0.1275 |

**Respuesta**:
La tasa efectiva anual TEA es 27.11% y la tasa efectiva semestral es 12.75%

**Ejercicio 165** **(FSC / FSA - VF y VA pospagable)**
En la fecha, una empresa paga una obligación de UM 15,000 vencida hace tres meses; y otra de UM 8,000, con vencimiento a dos meses. La deuda vencida genera la TEA del 39% y la deuda a dos meses genera 9% de tasa efectiva trimestral. ¿Qué importe deberá pagar la empresa?
Cuando tenemos dos capitales en distintos instantes, primero determinamos el equivalente de los mismos en un mismo instante VA o VF y luego los sumamos.

**Solución:** (Deuda vencida)
VA = 15,000; n = 3; TEA = 0.39; i =?

1º Calculamos la tasa equivalente y luego el ***VF*** de la deuda vencida:

[43A] $\boldsymbol{i} = \sqrt[12]{(1+0.39)}-1 = \;0.02782\;$ mensual

[27] $\boldsymbol{VF} = 15{,}000\left\langle\frac{(1+0.02782)^3-1}{0.02782}\right\rangle = \;$ UM 16,287.29

**Sintaxis**
**VF(tasa;nper;pago**;va;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VA | Tipo | *VF* |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.0278 | 3 | | -15,000 | | 16,287.29 |

El resultado obtenido de UM 16,287.29 es un VA de hoy de la deuda vencida hace tres meses.

**Solución:** (Deuda con vencimiento a dos meses)
VF = 8,000; n = 2 meses; iTRIMESTRAL = 0.9; i =?; VA = ?

Calcularemos el VA de la deuda de UM 8,000 para poder sumarlo a la deuda vencida que está a VA. Previamente, calculamos la tasa periódica mensual equivalente.

[43A] $\boldsymbol{i} = \sqrt[3]{(1+0.09)}-1 = \;0.02914$ mensual

[21] $\boldsymbol{VA} = \frac{3{,}000}{(1.02914)^2} = \;$ UM 7,553.96

**Sintaxis**
**VA(tasa;nper;pago**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VF | Tipo | VA |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.0291 | 2 | | -8,000 | | 7,553.96 |

**Respuesta:**
La empresa tiene que pagar por las dos obligaciones la suma de: 16,287.29 + 7,553.96 = UM 23,841.25

**Ejercicio 166** **(VF y capitalización continua)**
Dos personas invertirán UM 8,000 durante 6 años al 15% anual. Determinar el valor futuro para ambos si el primero obtiene interés compuesto anualmente y el segundo obtiene capitalización continua.

**Solución**: (Para el primero)
VA = 8,000; i = 0.15; n = 6; VF =?

Operando con la fórmula [19] y la función financiera VF, obtenemos resultados iguales:

[19] $\boldsymbol{VF} \;=\; 8{,}000 \times 1.15^6 \;=\;$ UM 18,504.49

**Sintaxis**
**VF(tasa;nper;pago**;va;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VA | Tipo | *VF* |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.15 | 6 | | -8,000 | | 18,504.49 |

**Solución**: (Para el segundo)
Calculamos la TEA, con la ecuación de capitalización continua y con la tasa encontrada determinamos el VF:

[45] $\boldsymbol{i}$ = 2.718280.15 - 1 = 0.1618 TEA

**Sintaxis**
**VF(tasa;nper;pago**;va;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VA | Tipo | *VF* |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.1618 | 6 | | -8,000 | | 19,673.35 |

**Respuesta:**
Con la capitalización continua el valor es mayor para la segunda persona.

**Ejercicio 167 (VA y capitalización continua)**
Si durante 8 años depositamos anualmente UM 4,000 a la tasa de interés de 13% anual, cuál será el valor actual anual y capitalización continua.

**Solución**: (Capitalización anual)
C = 4,000; i = 0.13; n = 8; VA =?

Operando con la fórmula [24] y la función financiera VA de Excel, obtenemos resultados iguales:

[24] $$\boldsymbol{VA} = 4{,}000 \left\langle \frac{1.13^8 - 1}{0.13 \times 1.13^8} \right\rangle = \text{UM } 19{,}195.08$$

**Sintaxis**
**VA(tasa;nper;pago**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VF | Tipo | VA |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.13 | 8 | -4,000 | | | 19,195.08 |

**Solución**: (Capitalización continua)
Calculamos la TEA, con la fórmula [46] de capitalización continua:

[46] $\boldsymbol{i}$ = 2.718280.13 - 1 = 0.1388 TEA

C = 4,000; TEA = 0.1388; n = 8; VA =?

[24] $$\boldsymbol{VA} = 4{,}000 \left\langle \frac{1.1388^8 - 1}{0.1388 \times 1.1388^8} \right\rangle = \text{UM } 18{,}630.40$$

**Sintaxis**
**VA(tasa;nper;pago**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VF | Tipo | VA |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.14 | 8 | -4,000 | | | 18,630.40 |

**Respuesta:**
A simple vista observamos que el VA para capitalización continua es menor que el VA para capitalización anual.

Esto se debe: a mayores tasas de interés requerimos mayores descuentos de flujos de efectivo futuros.

**Ejercicio 168 (Tasa efectiva y monto capitalizado)**
Una empresa accede a un crédito bancario por UM 20,000, a una tasa de interés de 29% anual, más 5% de comisión de administración capitalizables trimestralmente. ¿Cuál será la tasa efectiva anual y el monto a pagar transcurrido un año?.

**Solución**:
1º Sumamos las tasas de interés $j$ = 29 + 5% = 34% capitalizable trimestralmente, tasa con la que efectuaremos todos los cálculos.

VA = 20,000; j = 0.34; m = 4; i = ?

2º Calculamos la tasa efectiva anual a partir de la tasa nominal:

$$[43]\ \ \text{TEA} = \left\langle \left\langle 1+\frac{0.34}{4}\right\rangle^{4} -1\right\rangle = \ \ 0.3859$$

**Sintaxis**
**INT.EFECTIVO(int_nominal;núm_per_año)**

| int_nominal | núm_per_año | INT.EFECTIVO |
|---|---|---|
| 0.34 | 4 | 0.3859 |

3º Finalmente calculamos el monto, transcurrido un año:

$i$ = (0.34/4) = 0.085

[19] ***VF*** = 20,000 (1+0.085)4= UM 27,717.17

**Sintaxis**
**VF(tasa;nper;pago**;va;tipo)

| **Tasa** | **Nper** | **Pago** | **VA** | **Tipo** | **VF** |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.085 | 4 | | -20,000 | | 27,717.17 |

**Respuesta**:
La TEA es 38.59% y el monto a pagar transcurrido un año es UM 27,717.17

**Ejercicio 169 (Tasa efectiva)**
Una tienda de venta a crédito anuncia su promoción de ventas con recargos de 18% de interés anual y el pago de los créditos en cómodas cuotas semanales e iguales. Determinar la tasa efectiva anual que cobra el negocio.

**Solución: (1 año = 52 semanas)**
j = 0.18; m = 52; TEA = ?

1º Calculando la tasa efectiva anual, obtenemos:

$$[43]\ \ \boldsymbol{i} = \left\langle \left\langle 1+\frac{0.18}{52}\right\rangle^{52} -1\right\rangle = \ \ 0.1968$$

**Sintaxis**
**INT.EFECTIVO(int_nominal;núm_per_año)**

| int_nominal | núm_per_año | INT.EFECTIVO |
|---|---|---|
| 0.18 | 52 | 0.19685 |

**Respuesta:**
La tasa efectiva anual es 19.68%.

**Ejercicio 170 (Escogiendo el banco para ahorrar)**
Tres bancos pagan por ahorros según las siguientes tasas:
Banco X : paga el 9% de interés anual capitalizable semestralmente.
Banco Y : paga el 8.9% de interés anual capitalizable mensualmente.
Banco Z : paga el 8.8% de interés anual capitalizable diariamente.

¿Qué banco elegiría usted para prestarle su dinero, considerando un año mínimo para dicha operación?.

j = 0.09, 0.089 y 0.088; m = 2, 12 y 365; TEA =?

Calculamos las tasas efectivas anuales a partir de la tasa nominal:

BANCO **X** : [43] $\mathbf{TEA}=\left\langle\left\langle 1+\frac{0.09}{2}\right\rangle^{2}-1\right\rangle= 0.920$

BANCO **Y** : [43] $\mathbf{TEA}=\left\langle\left\langle 1+\frac{0.089}{12}\right\rangle^{12}-1\right\rangle= 0.\ 927$

BANCO **Z** : [43] $\mathbf{TEA}=\left\langle\left\langle 1+\frac{0.088}{365}\right\rangle^{365}-1\right\rangle= 0.9198$

**Sintaxis**
**INT.EFECTIVO(int_nominal;núm_per_año)**

| | int_nominal | núm_per_año | INT.EFECTIVO |
|---|---|---|---|
| **X** | 0.09 | 2 | 0.092 |
| **Y** | 0.089 | 12 | 0.0927 |
| **Z** | 0.088 | 365 | 0.09198 |

**Respuesta:**
Elegimos el Banco **Y** por cuanto es el que mejor paga por prestarle nuestro dinero.

**Ejercicio 171 (Costo de un producto e inflación)**
Actualmente, el costo de una impresora offset doble oficio, de segunda y en buen estado es en promedio UM 15,000. Determinar cuál fue su costo hace 3 años, si su precio aumentó solamente en la tasa de inflación de 5% anual.

**Solución:**
VF = 15,000; n = 3; F = 0.05; VA =?

[48] $\boldsymbol{VA}=\frac{15{,}000}{(1+0.05)^{3}}=$ UM 12,957.56

Resolvemos el caso aplicando indistintamente la fórmula [48] o la función VA de Excel:

**Sintaxis**
**VA(tasa;nper;pago**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VF | Tipo | VA |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.05 | 3 | | -15,000 | | 12,957.56 |

**Respuesta**:
El costo de la impresora hace 3 años fue de UM 12,957.56.

**Ejercicio 172 (Calculando la tasa de mercado)**
Calcular la tasa de interés inflada equivalente a la tasa de interés real de 1.8% por trimestre, a la tasa de inflación de 3.8% por trimestre.

**Solución:**
$i = 0.018$; $\Phi = 0.038$; $i_\Phi = ?$

[50] $\boldsymbol{i_\Phi} = 0.018 + 0.038 + 0.018 * 0.038 = 0.05668$

**Respuesta**:
La tasa de interés de mercado equivalente es 5.67% por trimestre.

**Ejercicio 173 (VF con inflación y poder de compra hoy)**
Si invertimos UM 66,000 el día de hoy, a la tasa de interés del 15% anual.
(1) ¿Cuánto tendremos en 5 años, si la tasa de inflación es de 8% anual?
(2) Determine el poder de compra del monto acumulado con respecto a unidades monetarias de hoy.

**Solución**: [1]
$VA = 66,000$; $n = 5$; $i = 0.15$; $\Phi = 0.08$; $i_\Phi = ?$

1º Calculamos la tasa inflada:

[50] $i_\Phi = 0.15 + 0.08 + (0.15*0.08) = 0.242$

2º Monto acumulado:

[52] $\boldsymbol{VF} = \dfrac{66,000(1+0.242)^5}{[1+0.08]^5} = \text{ UM } 132,749.57$

**Solución**: [2]
$VF = 132,750$; $\Phi = 0.08$; $VA = ?$

Calculamos el poder de compra de la cantidad acumulada con respecto a unidades monetarias de hoy, con la fórmula [48]:

[48] $\boldsymbol{VA} = \dfrac{132,750}{[1+0.08]^5} = \text{ UM } 90,347.42$

**Respuesta:**
[1] En 5 años tendremos UM 132,749.57 y [2] El poder compra hoy del monto acumulado es UM 90,347.42.

**Ejercicio 174 (Efectos de la inflación)**
Determinar el valor actual de UM 90,000 en 12 años a partir de ahora si la tasa real requerida por el inversionista es de 18% anual y la tasa de inflación es de 5% anual:
(1) sin inflación;
(2) considerando la inflación y
(3) Asumiendo la tasa del 18% ajustada por la inflación.

**Solución** (1) sin inflación
$VF = 90,000$; $n = 12$; $TMAR = 0.18$; $VA = ?$

[21] $\boldsymbol{VA} = \dfrac{90,000}{(1+0.18)^{12}} = \text{ UM } 12,349.76$

**Sintaxis**
**VA**(**tasa**;**nper**;**pago**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VF | Tipo | VA |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.18 | 12 | | -90,000 | | 12,349.76 |

**Solución** (2) considerando la inflación
$VF = 90,000$; $n = 12$; $i = 0.18$; $\Phi = 0.05$; $i_\Phi = ?$; $VA = ?$

1º Calculamos la tasa incorporando la inflación:

[50] $i_{\Phi} = 0.18 + 0.05 + 0.18*0.05 = 0.239$

2º Calculamos el VA con la tasa inflada:

[49] $\boldsymbol{VA} = \frac{90{,}000}{(1+0.239)^{12}} = \text{ UM } 6{,}876.81$

**Solución** (3) La tasa ajustada por la inflación
i = 0.18; F = 0.05; i = ?

1º Obtenemos la tasa de interés real deflactada:

[3] $\boldsymbol{i} = \left\langle\frac{(1+0.18)}{(1+0.05)}-1\right\rangle = 0.1238$

2º Con la tasa real deflactada determinamos el VA de la inversión:

VF = 90,000; n = 12; i = 0.1238; VA = ?

[21] $\boldsymbol{VA} = \frac{90{,}000}{(1+0.1238)^{20}} = \text{ UM } 8{,}718.91$

**Respuesta:** (Con un VF = 90,000)

| | | |
|---|---|---|
| (1) El VA en un escenario sin inflación es | UM | 12,349.76 |
| (2) El VA en un escenario con inflación es | UM | 6,876.81 |
| (3) El VA con tasa ajustada por la inflación es | UM | 8,718.91 |

**Ejercicio 175 (Inversión en un escenario inflacionario)**
Calcular para una inversión anual de UM 1,500 en un nuevo proceso de investigación, durante 5 años comenzando dentro de 1 año:

1) La cantidad de dinero invertido globalmente al final del año 5 en unidades monetarias corrientes de este período con la finalidad de recuperar la inversión a la tasa de retorno real del 5% anual y la tasa de inflación del 9% anual.
2) Determine la cantidad que permita obtener justo lo suficiente para cubrir la inflación.

**Solución** (1)
C = 1,500; n = 5; i = 0.05; Φ = 0.09; $i_{\Phi}$ = ?; VF = ?

1º Calculamos la tasa inflada:

[50] $\boldsymbol{i_{\Phi}} = 0.05 + 0.09 + (0.05*0.09) = 0.1445$

2º Inversión global:

[27] $\boldsymbol{VF} = 1{,}500\left\langle\frac{(1+0.1445)^{5}-1}{0.1445}\right\rangle = \text{ UM } 10{,}003.99$

**Sintaxis**
**VF(tasa;nper;pago;**va;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VA | Tipo | VF |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.1445 | 5 | -1,500 | | | 10,003.99 |

**Solución** (2)
C = 1,500; n = 5; F = 0.09; VF = ?

Con la tasa de inflación del caso, calculamos el monto (VF):

[27] $\boldsymbol{VF} = 1{,}500\left\langle\frac{(1+0.09)^5-1}{0.09}\right\rangle =$ UM 8,977.07

**Sintaxis**

**VF**(**tasa**;**nper**;**pago**;va;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VA | Tipo | *VF* |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.09 | 5 | -1,500 | | | 8,977.07 |

**Respuesta:**

1) La cantidad de dinero al final del año 5 será de UM 10,003.99, calculado con una tasa inflada de 14.45% anual.
2) La cantidad que permite cubrir justo la inflación es UM 8,977.07, calculada con el 9% de inflación anual.

**Ejercicio 176 (Poder de compra y tasa real de retorno en inflación)**

Una empresa de mantenimiento de parques y jardines conserva un fondo de contingencia de UM 50,000. La empresa mantiene el fondo en acciones que producen el 18% anual. La tasa de inflación durante los 6 años, tiempo de la inversión fue de 6% anual.

(1) Calcular el monto del fondo al final del año 6;
(2) Determinar el poder de compra del dinero en términos de unidades monetarias conforme a lo invertido originalmente;
(3) ¿Cuál fue la tasa de retorno real sobre la inversión?

**Solución:** (1)

VA = 50,000; i = 0.18; n = 6; VF = ?

Calculamos el VF del fondo al final del año 6, en condiciones normales:

[19] $\boldsymbol{VF} = 50{,}000(1 + 0.18)6 =$ UM 134,977.71

**Sintaxis**

**VF**(**tasa**;**nper**;**pago**;va;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VA | Tipo | *VF* |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.18 | 6 | | -50,000 | | 134,977.71 |

**Solución:** (2)

VA = 50,000; i = 0.18; n = 6; F = 0.06; ir =?; VF = ?

1º Determinamos el poder de compra en UUMM, para ello calculamos la tasa inflada:

[50] $i_\Phi = 0.18 + 0.06 + (0.18*0.06) = 0.2508$

Con esta tasa procedemos a calcular el dinero acumulado en términos de valores de hoy:

[52] $\boldsymbol{VF} = \frac{50{,}000(1+0.2508)^5}{[1+0.06]^5} =$ UM 114,387.89

**Solución**: [2]

VF = 114,387.89; VA = 50,000; r =?

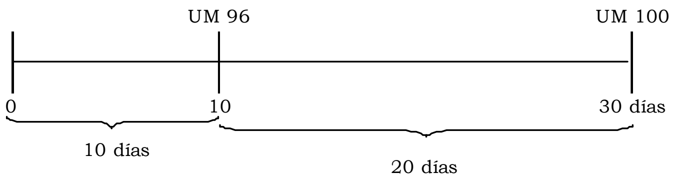
Aplicando la fórmula [1A], calculamos la tasa real de retorno de la inversión:

$$[1A]\quad \boldsymbol{i} = \frac{\frac{114{,}387.89 - 50{,}000}{50{,}000}}{6} = 0.2146$$

**Respuesta**:
(1) El monto al final del año 6 es UM 134,977.71
(2) Poder de compra UM 114,387.89
(3) La tasa de real de retorno de la inversión es 21.46% anual, superior al 18% originalmente establecido. Se cumple la definición, a mayor inflación mayor será la tasa de descuento exigida a la inversión o proyecto.

**Ejercicio 177 (Evaluando el descuento por pago anticipado de factura)**
Tenemos una factura por UM 100, cuyas condiciones normales de pago son a 30 días. Ofrecen el 4% de descuento por pronto pago (dentro de los 10 días siguientes a la entrega de la mercadería). Evaluar dicho descuento desde el punto de vista del proveedor y desde el punto de vista del cliente.

**Solución:**
VA = 96; VF = 100;




1º Calculamos la tasa efectiva correspondiente a un período de 20 días, (UM 100 es el valor de la factura a 30 días y 96 es el valor de la factura en un rango de 10 días):

$$[1]\quad \boldsymbol{r} = \left\langle \frac{100-96}{96} \right\rangle * 100 = 4.167\%$$

La tasa efectiva correspondiente a 20 días es 4.167%, luego, a partir de este resultado calculamos las tasas diaria y nominal:

$$[43A]\quad \boldsymbol{i} = \sqrt[20]{1+0.04167} - 1 = 0.00204 \text{ diaria}$$

[44A] $j_{20\ DIAS} = 0.00204*20 = 0.0408$ [44A] $j_{360} = 0.00204*360 = 0.7344$

**Sintaxis**
**TASA.NOMINAL(tasa_efectiva; núm_per)**

| Tasa_efectiva | núm_per | TASA.NOMINAL |
|---|---|---|
| 0.0416 | 20 | 0.0408 |

El resultado obtenido (costo) lo vamos a evaluar desde dos puntos de vista:

a) **Al Proveedor** no le resulta conveniente otorgar el 4% de descuento, anualizado representa el 73.44% de costo y puede ser mayor al costo del financiamiento que podría obtenerse a través del Banco.
b) **El cliente** debe considerar lo siguiente: Si tiene liquidez, debe comparar el costo de oportunidad de sus excedentes con el costo efectivo del descuento (73.44%); si este último es mayor debe acogerse al descuento.

Si no tiene liquidez, debe analizar si le resultará más barato pedirle prestado al banco y acogerse al descuento.
Como vemos, el costo del crédito de los proveedores disminuye cuando el período normal de pago se extiende, es decir, el plazo en relación con el cual rige el descuento.

**Ejercicio 178 (Rentabilidad de una inversión en moneda extrajera)**
El dueño de una fábrica de radios necesita adquirir urgentemente maquinaria, cuyo valor de mercado es de US$ 20,000. Las únicas posibilidades de financiarla corresponden a tres préstamos atados a la compra de dicha máquina:

- El primero es inglés (en libras esterlinas - LE), y cobra US$ 22,000 (al tipo de cambio actual) por dicha máquina y 12% de intereses;
- El segundo es francés (en francos franceses - FF) y cobra US$ 16,000 (al tipo de cambio actual) y 38% de interés.
- Por último la tercera, existe la posibilidad de un préstamo norteamericano (en dólares) por US$ 20,000 con el 20% de interés anual.
- En cualquiera de los casos, el período de pago es de cuatro años, no hay plazo de gracia, no hay impuesto a la renta y el sistema es de cuota fija. Además, el costo del crédito comercial, en dólares, es 9% anual, la devaluación de la libre esterlina y el franco francés respecto al dólar es 6%. Determinar el préstamo más conveniente, mostrando los cuadros de amortización o servicio de la deuda.

**Solución:**
VALOR DE MERCADO DE LA MAQUINARIA = US$ 20,000
Plazo común para todas las posibilidades de financiación = 4 años

1º Ordenamos la información de cada posibilidad de financiación:

Primera : VA = 22,000; iEXT = 0.12; iDEV = 0.06; iME =?; Moneda = LE
Segunda : VA = 16,000; iEXT = 0.38; iDEV = 0.06; iME =? Moneda = FF
Tercera : VA = 26,000; i = 0.20; Moneda = $
C. COM. : VA = 20,000; i = 0.09

2º Procedemos a determinar el costo efectivo anual o tasa periódica (i) de cada alternativa:

PRIMERA : (54) iME = 0.12 + 0.06 + (0.12*0.06) = 0.1872 tasa anual
SEGUNDA : (54) iME = 0.38 + 0.06 + (0.38*0.06) = 0.4628 tasa anual
TERCERA : i = 0.20 tasa anual
C. COM. : i = 0.09

3º Con estas tasas calculamos la cuota uniforme de cada alternativa de financiación, aplicando indistintamente la fórmula (25) o la función PAGO:

$$[25] \quad \boldsymbol{C} = \boldsymbol{VA}\left\langle \frac{\boldsymbol{i}(1+\boldsymbol{i})^n}{(1+\boldsymbol{i})^n - 1} \right\rangle$$

iME = $\boldsymbol{i}$

**Sintaxis**
**PAGO**(**tasa**;**nper**;**va**;vf;tipo)

| Alternativas | Tasa | Nper | VA | VF | Tipo | PAGO |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Inglesa | 0.1872 | 4 | -22,000 | | | 8,293.02 |
| Francesa | 0.4628 | 4 | -16,000 | | | 9,473.95 |
| Norteamericana | 0.20 | 4 | -20,000 | | | 7,725.78 |
| Créed. Comerc. | 0.09 | 4 | -20,000 | | | 6,173.37 |

4º Elaboramos los cuadros de amortización de cada alternativa:

**Crédito Inglés**

| Meses | SALDO INICIAL | INTERES 0.1872 | AMORT. | PAGO | SALDO FINAL |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | 22,000.00 |
| 1 | 22,000 | 4,118.40 | 4,174.62 | 8,293.02 | 17,825.38 |
| 2 | 17,825 | 3,336.91 | 4,956.11 | 8,293.02 | 12,869.26 |
| 3 | 12,869 | 2,409.13 | 5,883.90 | 8,293.02 | 6,985.36 |
| 4 | 6,985 | 1,307.66 | 6,985.36 | 8,293.02 | 0.00 |

**Crédito Francés**

| Meses | SALDO INICIAL | INTERES 0.4628 | AMORT. | PAGO | SALDO FINAL |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | 16,000.00 |
| 1 | 16,000 | 7,404.80 | 2,069.15 | 9,473.95 | 13,930.85 |
| 2 | 13,931 | 6,447.20 | 3,026.75 | 9,473.95 | 10,904.11 |
| 3 | 10,904 | 5,046.42 | 4,427.52 | 9,473.95 | 6,476.58 |
| 4 | 6,477 | 2,997.36 | 6,476.58 | 9,473.95 | 0.00 |

**Crédito Comercial**

| Meses | SALDO INICIAL | INTERES 0.09 | AMORT. | PAGO | SALDO FINAL |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | 20,000.00 |
| 1 | 20,000 | 1,800.00 | 4,373.37 | 6,173.37 | 15,626.63 |
| 2 | 15,627 | 1,406.40 | 4,766.98 | 6,173.37 | 10,859.65 |
| 3 | 10,860 | 977.37 | 5,196.00 | 6,173.37 | 5,663.65 |
| 4 | 5,664 | 509.73 | 5,663.65 | 6,173.37 | 0.00 |

**Respuesta:**
Costo efectivo del crédito INGLES = 18.72% anual
Costo efectivo del crédito FRANCES = 46.28% anual
Costo efectivo del crédito NORTEAMERICANO = 20.00% anual
Costo efectivo del crédito comercial = 9.00% anual

De los tres préstamos el más conveniente es la maquinaria inglesa que tiene un costo efectivo anual de 18.72%. Pero el crédito comercial resulta la alternativas más económica.

# Capítulo 5

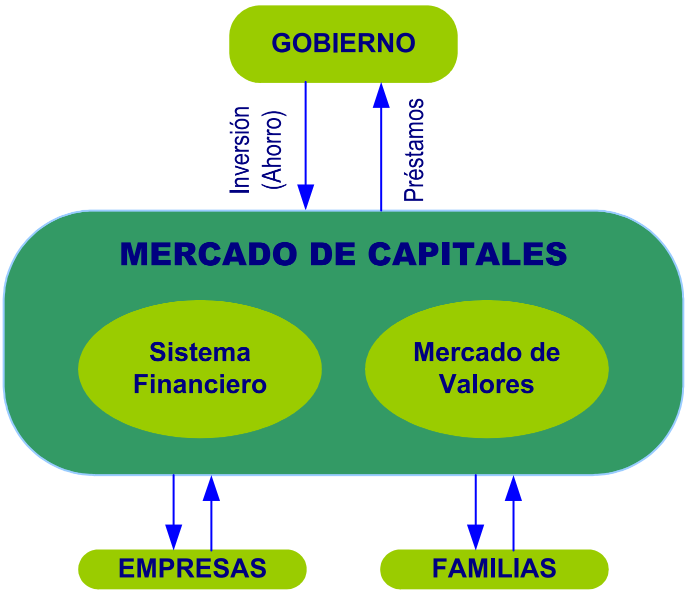
# Mercado de Capitales, Sistema Financiero, Productos Activos y Pasivos, Préstamos

## 1. Introducción

El objetivo del presente capítulo es presentar al lector, el escenario en el que ocurren los movimientos de capital y los agentes responsables de transferir los recursos del ahorro a la inversión a través de los intermediarios del mercado de capitales. Asimismo, exponemos los principales productos financieros activos y pasivos existentes; desarrollamos en profundidad y extensamente, la teoría y práctica de los préstamos.

## 2. Mercado de capitales

*Dentro del mercado de capitales se distinguen tres agentes principales de la economía: gobierno, empresas y familias...*




En todos los países del mundo existen fundamentalmente dos mercados: el primero es el de productos y servicios, que ofrecen las diferentes personas y empresas del país; el segundo el mercado de capitales, donde negocian los excedentes de capital.

En el mercado de capitales distinguimos tres agentes principales de la economía: gobierno, empresas y familias que acuden a invertir sus recursos o a conseguir financiación.

Existen principalmente dos formas de transferir los recursos del ahorro a la inversión: la primera es por medio de la intermediación, a cargo del **sistema financiero** y la segunda es por medio de la transferencia de títulos, responsable el **mercado de valores.**

Como vimos en el primer capítulo, la principal función del sistema financiero es la de servir como intermediario entre las personas o entidades que logran hacer algún tipo de ahorro y las que necesitan recursos para financiar inversiones o gastos.

**La labor de intermediación tiene cuatro elementos principales:**

1) El tiempo. El manejo de los plazos es fundamental en la labor de intermediación, no es posible distinguir entre oferentes y demandantes de dinero, si no especificamos la duración de la operación financiera, las mismas personas que hoy están ahorrando, pueden necesitar recursos en el futuro y las que invierten en el presente, seguramente obtendrán excedentes en el futuro que podrán ahorrar.

2) Los montos. Por lo general los ahorristas disponen de pequeños excedentes, mientras que los inversionistas, requieren de mayores recursos para la inversión, lo cual genera desequilibrios entre la demanda y oferta de dinero que encarece o disminuye los costos de los créditos y afecta la liquidez del sistema.

3) Los costos. Como cualquier otro mercado, el de intermediación está sujeto a las variaciones de la oferta y la demanda, por lo cual, cuando hay liquidez, las tasas de interés bajan, por el contrario, el exceso de demanda de dinero produce incrementos en éstas.

   *Los gobiernos, a través de sus acciones de política fiscal de impuestos y gastos, pueden afectar la oferta y la demanda de préstamos. Sí el gobierno gasta menos de lo que recauda por impuestos y otras fuentes de ingresos tendrá superávit fiscal lo cual significa que el gobierno tiene ahorros. Esto constituye una fuente de oferta de créditos. Si el gobierno gasta más de lo que obtiene por ingresos tributarios incurrirá en déficit, luego tendrá que prestarse para cubrir la diferencia. El endeudamiento incrementa la demanda de préstamos conduciendo al incremento de la tasa de interés en general.*

4) El riesgo. Inherente al negocio o inversión. A mayor riesgo, mayor tasa de interés. Ver Capítulo 1, Componentes de la tasa de interés.

## 2.1. Sistema Financiero

Conformado por el conjunto de empresas que, debidamente autorizadas, operan en la intermediación financiera. Incluye las subsidiarias que requieren autorización de la Superintendencia para constituirse.

Actualmente, el sistema financiero peruano lo conforman: 18 Bancos, 6 Financieras, 12 Cajas Rurales de Ahorro y Crédito, 6 Almacenaras, 13 Cajas Municipales de Ahorro y Crédito, 7 Empresas de Arrendamiento Financiero, 13 EDPYMES, 4 Administradoras de Fondos de Pensiones (AFP), 17 Empresas de Seguros, 2 Cajas (Caja de Beneficios y Seguridad Social del pescador y Caja de Pensión Militar Policial) y 2 Derramas (Derrama de Retirados del Sector Educación y Derrama Magisterial).

Encabeza el sistema bancario peruano el **Banco Central de Reserva** (BCR) que controla la mayoría de las operaciones en moneda extranjera. Otras operaciones bancarias del Estado, incluyendo la recaudación de impuestos, son operadas por el **Banco de la Nación** (BN) y otras entidades bancarias autorizadas por éste.

## 2.2. Mercado de valores

Bolsa de Valores**.** En el Perú, existen aproximadamente 200 grandes empresas que cotizan en la Bolsa de Valores de Lima (BVL), incluyendo bancos, financieras, compañías de seguros, empresas industriales, mineras y comerciales, así como algunas de servicios. Son líquidas unas 15 empresas. Las operaciones desarrolladas por estas entidades fuera de la jurisdicción peruana no están controladas por las autoridades nacionales.

## 2.3. Fuentes de Financiamiento

Toda empresa, pública o privada, requiere de recursos financieros (capital) para realizar sus actividades, desarrollar sus funciones actuales o ampliarlas, así como el inicio de nuevos proyectos que impliquen inversión.

### 2.3.1. Objetivos

La carencia de liquidez en las empresas (públicas o privadas) hace que recurran a las fuentes de financiamiento para aplicarlos en ampliar sus instalaciones, comprar activos, iniciar nuevos proyectos, ejecutar proyectos de desarrollo económico-social, implementar la infraestructura tecno-material y jurídica de una región o país que aseguren las inversiones. Todo financiamiento es el resultado de una necesidad.

### 2.3.2. Análisis de las fuentes de financiamiento

Es importante conocer de cada fuente:

1. Monto máximo y el mínimo que otorgan.
2. Tipo de crédito que manejan y sus condiciones.
3. Tipos de documentos que solicitan.
4. Políticas de renovación de créditos (flexibilidad de reestructuración).
5. Flexibilidad que otorgan al vencimiento de cada pago y sus sanciones.
6. Los tiempos máximos para cada tipo de crédito.

### 2.3.3. Políticas en la utilización de los créditos

- ✓ Las inversiones a largo plazo (construcción de instalaciones, maquinaria, etc.) deben ser financiadas con créditos a largo plazo, o en su caso con capital propio, esto es, nunca debemos usar los recursos circulantes para financiar inversiones a largo plazo, ya que provocaría la falta de liquidez para pago de sueldos, salarios, materia prima, etc.
- ✓ Los compromisos financieros siempre deben ser menores a la posibilidad de pago que tiene la empresa, de no suceder así la empresa tendría que recurrir a financiamiento constantes, hasta llegar a un punto de no poder liquidar sus pasivos, lo que en muchos casos son motivo de quiebra.
- ✓ Toda inversión genera flujos, los cuales son analizados en base a su valor actual.
- ✓ Los créditos deben ser suficientes y oportunos, con el menor costo posible y que alcancen a cubrir cuantitativamente la necesidad por el cual fueron solicitados.
- ✓ Buscar que las empresas mantengan estructura sana.

### 2.3.4. Prototipos de fuentes de financiamiento

Existen diversas fuentes de financiamiento, sin embargo, las más comunes son: internas y externas.

**A.** **Fuentes internas:** Generadas dentro de la empresa, como resultado de sus operaciones y promoción, entre éstas están:

  **a)** **Aportaciones de los Socios:** Referida a las aportaciones de los socios, en el momento de constituir legalmente la sociedad (capital social) o mediante nuevas aportaciones con el fin de aumentar éste.

  b) **Utilidades Reinvertidas:** Esta fuente es muy común, sobre todo en las empresas de nueva creación, y en la cual, los socios deciden que en los primeros años, no repartirán dividendos, sino que estos son invertidos en la organización mediante la programación predeterminada de adquisiciones o construcciones (compras calendarizadas de mobiliario y equipo, según necesidades ya conocidas).

  c) **Depreciaciones y Amortizaciones:** Son operaciones mediante las cuales, y al paso del tiempo, las empresas recuperan el costo de la inversión, por que las provisiones para tal fin son aplicados directamente a los gastos de la empresa, disminuyendo con esto las utilidades, por lo tanto, no existe la salida de dinero al pagar menos impuestos y dividendos.

d) **Incrementos de Pasivos Acumulados:** Son los generados íntegramente en la empresa. Como ejemplo tenemos los impuestos que deben ser reconocidos mensualmente, independientemente de su pago, las pensiones, las provisiones contingentes (accidentes, devaluaciones, incendios), etc.

e) **Venta de Activos (desinversiones):** Como la venta de terrenos, edificios o maquinaria en desuso para cubrir necesidades financieras.

1. **Fuentes externas:** Aquellas otorgadas por terceras personas tales como:

a) **Proveedoras:** Esta fuente es la más común. Generada mediante la adquisición o compra de bienes y servicios que la empresa utiliza para sus operaciones a corto y largo plazo. El monto del crédito está en función de la demanda del bien o servicio de mercado. Esta fuente de financiamiento es necesaria analizarla con detenimiento, para de determinar los costos reales teniendo en cuenta los descuentos por pronto pago, el tiempo de pago y sus condiciones, así como la investigación de las políticas de ventas de diferentes proveedores que existen en el mercado.

b) **Créditos Bancarios:** Las principales operaciones crediticias, que son ofrecidas por las instituciones bancarias de acuerdo a su clasificación son a corto y a largo plazo. En el Perú, el financiamiento no gubernamental disponible para las empresas proviene de operaciones bancarias tradicionales, principalmente utilizando pagarés bancarios con plazos de 60, 90 ó 120 días de vencimiento, que en algunos casos pueden ser prorrogados. Los pagarés son emitidos por el prestatario para cubrir el préstamo, que puede estar garantizado por bienes del activo fijo u otras garantías.

Los préstamos de corto y largo plazo están disponibles en empresas financieras. La SBS, en cumplimiento de la política general del gobierno dirigida a reducir la inflación, supervisa el nivel de créditos extendidos por los bancos.

Los bancos y las instituciones financieras pueden establecer sus propias tasas de interés para las operaciones de préstamo y ahorros. Estas tasas no pueden exceder de la tasa máxima establecida por el BCR. Debido a las condiciones de la economía del país, la tasa de interés para las operaciones en dólares estadounidenses excede las tasas establecidas en el mercado internacional.

## 3. Funciones y productos activos y pasivos del sistema financiero

La función principal del sistema financiero es simplemente la intermediación financiera; es decir, el proceso mediante el cual captan fondos del público con diferentes tipos de depósitos (productos pasivos) para colocarlos a través de operaciones financieras (productos activos) según las necesidades del mercado. Igualmente intermedian en la colocación de recursos provenientes de Instituciones gubernamentales, por ejemplo, COFIDE en el caso peruano.

### 3.1. Productos activos

A continuación exponemos conceptos básicos de algunos productos de crédito destinados al sector empresarial. Cada institución financiera tiene políticas y productos distintos, con bases comunes; así tenemos:

#### 3.1.1.) El préstamo pagaré

Es una operación a corto plazo (máximo un año), cuyas amortizaciones mensuales o trimestrales también pueden ser pagadas al vencimiento. Por lo general, son operaciones a 90 días prorrogables a un año con intereses mensuales cobrados por anticipado. Generalmente utilizado para financiar la compra de mercancías dentro del ciclo económico de la empresa comercial (comprar-vender-cobrar).

Otra de las razones para solicitar un pagaré, es por las deficiencias temporales de caja que requieren ser puestas en positivo, producidas entre otras, por los mayores plazos de crédito frente a los plazos que otorgan los proveedores.

### 3.1.2.) El préstamo a interés

Es una operación de corto y largo plazo, que puede ir desde uno hasta cinco años. Las cuotas son por lo general mensuales, pero también pueden ser negociadas y los intereses son cobrados al vencimiento. Este tipo de crédito es utilizado generalmente para adquirir bienes inmuebles, o activos que por el volumen de efectivo que representan, no es posible amortizarlo con el flujo de caja de la empresa en el corto plazo.

La garantía de esta operación puede ser el bien adquirido o garantías reales distintas (prendarias o hipotecarias). Adicionalmente, puede llevar las fianzas consideradas necesarias.

### 3.1.3.) El leasing

Operación mediante la cual, la institución financiera, adquiere bienes muebles o inmuebles de acuerdo a las especificaciones del arrendatario, quien lo recibe para su uso y preservación por períodos determinados, a cambio de la contraprestación dineraria (canon) que incluye amortización de capital, intereses, comisiones y recargos emergentes de la operación financiera.

**Características del leasing:**

- ✓ Los bienes adquiridos son para ser arrendados, según lo solicitado por el arrendatario.
- ✓ Durante la vigencia del contrato es responsabilidad del arrendatario mantener el bien arrendado y estar al día con el pago de las pólizas de seguro.
- ✓ La duración del alquiler debe ser igual o menor a la vida útil estimada del bien.
- ✓ El monto del alquiler es fijado para amortizar el valor del bien alquilado durante el período de uso determinado en el contrato.
- ✓ El contrato le permite al arrendatario, la adquisición del bien al final del período de arriendo mediante el pago de un valor de rescate que corresponde al valor residual del bien.
- ✓ Debe estar relacionado a equipos o bienes de producción, que el arrendatario utilizará para fines productivos o profesionales.

**Tipos de arrendamiento financiero:**

<u>Arrendamiento Financiero Mobiliario</u>. Un empresario contacta con el distribuidor de los equipos que requiere, una vez seleccionados, contrata con la entidad financiera y vía arrendamiento adquiere los bienes, durante el plazo determinado que está directamente relacionado con la duración económica de los equipos. Transcurrido el tiempo estipulado en el contrato, el cliente ejerce la opción de compra con lo cual adquiere el bien.

<u>Arrendamiento Financiero Inmobiliario</u>. Es igual al anterior, con la diferencia que el bien adquirido es un inmueble que será destinado a la producción o uso profesional: Edificios, cobertizos, locales comerciales o de oficina. El plazo de este tipo de operación, es por lo general, más largo que el mobiliario, por los montos que implica y por el impacto de las cuotas en el flujo de caja de las empresas.

<u>Sale And Lease Back</u>. Consiste en que el cliente vende un bien mueble o inmueble al banco, para que éste a su vez, lo arriende por período determinado, para al final, retornar la propiedad al cliente, mediante el uso de la opción de compra. Esta operación tiene como intención, satisfacer requerimientos de capital de trabajo.

Precisamos, que no obstante el bien adquirido mediante esta modalidad es propiedad de la institución financiera, por lo tanto, es la garantía primaria. <u>La institución financiera solicita tantas garantías adicionales como difícil sea vender el bien para cobrar el crédito fallido</u>.

### 3.1.4.) El descuento

Generalmente, el comercio de bienes y servicios no es de contado. Cuando la empresa vende a crédito a sus clientes, recibe letras de cambio por los productos entregados. Cuando las empresas carecen de liquidez para adquirir nuevos inventarios o pagar a sus proveedores acuden a las instituciones financieras (generalmente bancos) y ofrecen en cesión sus letras de cambio antes del vencimiento, recibiendo efectivo equivalente al valor nominal de los documentos menos la comisión que la institución financiera recibe por adelantarle el pago. Esta comisión es conocida como descuento. Según van ocurriendo los vencimientos de los documentos de crédito, la institución financiera envía el cobro para que los deudores paguen la deuda que originalmente le pertenecía a la empresa.

Por política de cobranza, las instituciones financieras después de haber presentado estos documentos para el cobro por tres veces o más a sus correspondientes deudores y no haber recibido el pago, cargan el valor del o de los documento en la cuenta del cliente (descontante) con el que hicieron la operación de descuento. En estos casos el cliente es gravado con intereses de mora por el plazo que va desde el vencimiento hasta la fecha en que es cargado en la cuenta.

En las operaciones de descuento son analizados fundamentalmente los estados financieros de la empresa que realiza con el banco la operación de descuento y de manera secundaria, la situación financiera de los acreedores señalados en los documentos de crédito. Dependiendo de la situación financiera del solicitante del descuento y de los acreedores en los documentos, el banco podrá pedir garantías adicionales al descontante.

### 3.1.5.) La carta de crédito

Instrumento mediante el cual, el banco emisor se compromete a pagar por cuenta del cliente (ordenante) una determinada suma de dinero a un tercero (beneficiario), cumplidos los requisitos solicitados en dicho instrumento.

**Por ejemplo**: una persona en Lima desea importar un carro desde Miami y llama al concesionario de esa ciudad. Este le solicita que le transfiera dólares para despacharle el carro, pero la persona en Lima le responde que hasta que el vehículo no esté en su destino, no le remitirá un céntimo. El problema es la desconfianza de ambos lados. Por esta razón existe la Carta de Crédito.

La persona en Lima (Ordenante) solicita en su banco la apertura de una carta de crédito. El banco (Banco Emisor) establece las condiciones necesarias según el riesgo del cliente y abre la carta de crédito enviando fax o E-mail al banco (Banco Notificador) en Miami, instruyendo al vendedor (Beneficiario) para el embarque del carro a Lima detallando las características del vehículo.

El vendedor de carros, notificado, entrega y pone el carro en el barco, por lo cual recibe el Conocimiento de Embarque, que certifica el despacho del vehículo. Este documento es entregado por el vendedor al banco de Miami, quienes verifican que el vehículo embarcado es exactamente el mismo cuyos detalles están descritos en el fax o E-mail remitido por el banco de Lima, procediendo a pagarle al vendedor.

Cuando el auto llega al puerto, en este caso El Callao, es comunicado el banco en Lima, pues el bien está a nombre y es propiedad del banco. Este convoca a su cliente, quien pasa por las oficinas, paga el auto y el banco emite la **Carta de Renuncia**, que transfiere la propiedad del vehículo al cliente. Este va al Callao, paga los impuestos y retira el auto. Con esto finaliza el proceso de la carta de crédito.

## Tipos de Cartas de Crédito

Existen dos tipos básicos: revocables e irrevocables Toda carta de crédito debe indicar con claridad cuál de estas dos es.

**Crédito Revocable**. Puede modificarse o revocarse sin aviso previo para el beneficiario. Pero el Banco Emisor deberá rembolsar al Banco Notificador el valor pagado, la aceptación a la negociación que haya realizado en base a lo expresado en la carta de crédito, antes de haber recibido la modificación o revocación.

**Crédito Irrevocable**. No puede ser alterada ni anulada, sin la conformidad de las partes (Ordenante, beneficiario, Banco Emisor y Banco Notificador).

**Según la forma de pago al beneficiario, las cartas de crédito pueden ser:**

**A la vista**. El Banco Notificador paga al Beneficiario, a la presentación de los documentos que demuestran el embarque de la mercancía bajo los términos planteados.

**Contra aceptación**. El Banco Notificador acepta (firma como deudor) al beneficiario una letra de cambio con plazo determinado en la carta de crédito. Cuando el cliente acude al Banco Notificador al vencimiento, éste paga contra la cuenta del Banco Emisor, quien a su vez cobra a su cliente. Para los exportadores es interesante vender sus mercancías ofreciendo plazos para pagar a través de cartas de crédito con aceptación. Entregando los documentos de embarque al banco, según lo solicitado en la carta de crédito, los exportadores obtienen a cambio una letra aceptada por el banco, que puede ser descontada en cualquier otra institución financiera a tasas preferenciales por la calidad del girador de la letra.

**Con refinanciamiento.** Es cuando el Ordenante no paga la carta de crédito, al momento de recibir la mercancía, sino que recibe refinanciamiento mediante préstamo a interés para el pago al banco del monto de la carta de crédito.

**También pueden clasificarse en:**

**De importación.** Emitidas a favor del beneficiario para garantizar el pago de las mercancías a ser importadas.

**De exportación.** Recibidas, emitidas por bancos del exterior a favor de beneficiarios en nuestro país y en la que actuamos como banco Notificador o Pagador.

**Domésticas.** Son las que abrimos por cuenta del ordenante a favor del beneficiario y ambos están en nuestro país.

**Hay cartas de crédito especiales que destacamos a continuación:**

**Stand By.** Muy parecida a la fianza bancaria. El Ordenante garantiza al beneficiario, que un tercero (puede ser el mismo ordenante), cumplirá con las condiciones especificadas, las consecuencias del no cumplimiento es el pago por parte banco al beneficiario.

**Con cláusula roja.** Permite que el beneficiario utilice fondos de la carta de crédito antes de embarcar la mercancía. Surge, cuando por ejemplo, el beneficiario requiere fondos para elaborar la maquinaria que enviará al Ordenante.

**Con cláusula verde.** Permite al beneficiario cobrar la carta de crédito contra entrega del Certificado de Depósito por la mercancía puesta a disposición del comprador, pero que por falta de transporte no ha podido ser despachada al lugar de destino.

**Documentos que intervienen en la operación:**

**Factura Comercial.** Documento que da al comprador la evidencia de haber adquirido la mercancía legalmente.

**Conocimiento de Embarque.** Documento emitido por el transportista mediante el cual declara haber recibido la mercancía y se compromete a llevarla hasta determinado puerto o aeropuerto, para ser entregada a la persona designada en el documento. Cuando el transporte es aéreo hablamos de Guía Aérea.

**Póliza de seguro.** Cubre la mercancía contra daños que le puedan ocurrir durante el transporte, puede ser pagado por el Ordenante o el Beneficiario, depende del acuerdo.

## 3.2. Los productos pasivos

Las instituciones financieras, con el fin de obtener fondos del público, desarrollan productos con los cuales las personas puedan canalizar sus fondos de uso común o sus excedentes destinados al ahorro y obtener beneficios a cambio por medio de intereses.

**Estos productos pueden ser clasificados en tres grandes grupos:**

**3.2.1. Los depósitos.** Son el mayor volumen pues provienen de la gran masa de pequeños y medianos ahorristas. Estos fondos son por lo general los más económicos, dependiendo de la mezcla de fondos. Esto último está referido a la proporción entre los depósitos más baratos (ningún o muy bajo interés) y los depósitos más caros (aquellos que para mantenerlos pagan altos intereses).

**3.2.2. Los fondos interbancarios.** Fondos que las instituciones financieras no colocan a sus clientes en forma de créditos. Estos no pueden quedar ociosos y son destinados a inversiones o a préstamos a otros bancos cuyos depósitos no son suficientes para satisfacer la demanda de crédito de sus clientes. En el último caso, el banco que solicita los fondos, está recibiendo «depósitos» de otro banco. Esto es una forma de depósito de gran volumen.

**3.2.3. Captación por entrega de valores**. En algunos casos, los bancos emiten valores comerciales para captar fondos del público. Pueden estar garantizados por la cartera de créditos hipotecarios o por la de tarjetas de crédito. En cualquier caso, la tasa de interés será casi directamente proporcional al riesgo promedio total de la cartera que garantiza la emisión. Por ejemplo, la emisión de títulos contra cartera hipotecaria, tiene menor tasa de interés disminuye el riesgo de morosidad y las garantías son reales y de fácil liquidación en caso de falla del deudor.

## 4. Las tarjetas de crédito

### 4.1. Breve historia

Las tarjetas de crédito empezaron a ser utilizadas en algunas tiendas al detalle y sólo podían ser usadas en el detallista que las emitía. Algún tiempo después y en vista de lo exitoso de la idea, algunas compañías petroleras emitieron tarjetas que permitían hacer consumo de gasolina en las estaciones de servicio.

Para 1936, American Airlines creó su propio sistema de crédito, llamado Universal Air Travel Plan (UATP), que inicialmente fue una libreta de cupones desprendibles emitida contra depósitos en garantía. Este evolucionaría después a un sistema de tarjetas de crédito propias que competiría con las tarjetas de crédito emitidas por la banca.

Diners Club fue la primera de las que hoy conocemos como tarjetas de crédito bancarias y nació en 1946. Los ingresos necesarios para el financiamiento de la compañía, provenían de la tasa de descuento del 7% retenida a los comerciantes y de una comisión mensual cobrada a la tarjeta habiente (Ver numeral 4.2. El Proceso) por el uso y mantenimiento.

En 1958, American Express y Carte Blanche (que era la tarjeta propia de Hilton Hotel Corporation) ingresan al negocio de las tarjetas de aceptación general. En ese momento, entran tanto el Bank of America, el banco más grande de los Estados Unidos y el Chase Manhattan Bank.

En 1966, El Bank of America licencia su producto BankAmericard a través de los Estados Unidos. En respuesta, sus principales competidores unidos forman la Interbank Card Association, que transcurrido un tiempo es el Master Charge. A finales de los 60, ambas compañías tendrían gran éxito en la colocación de plásticos mediante el envío de correos masivos, otorgando millones de tarjetas. Para el año 78, había más de 11,000 bancos trabajando con una de las dos marcas, sus ventas 42 mil millones de dólares y más de 52 millones de norteamericanos tenían al menos una de las dos tarjetas.

En el 76, Bank Americard cambia su nombre a Visa con la idea de tener mayor proyección internacional. Master Charge, la siguió después cambiando su nombre a Master Card.

### 4.2. El proceso

Un consumidor abre una de tarjeta de crédito a través de un banco emisor, quien la aprueba previa evaluación de su capacidad de endeudamiento y le otorga una línea de crédito. El consumidor, ahora es un cliente y al recibir la tarjeta es portador de una **tarjeta habiente**, que le permite comprar bienes y servicios en todos aquellos comercios que aceptan esta tarjeta como forma de pago. Para hacer uso de su línea de crédito, el cliente requiere una tarjeta de plástico, con un número de cuenta y ciertos datos embozados (Texto en relieve), cinta magnética en el reverso y ciertas características de seguridad que pueden estar en el reverso y el anverso.

Los emisores, son requeridos como resultado de su asociación con Visa o Master Card, que cumplan con ciertos requisitos específicos para cada marca, en la preparación de los plásticos con el fin de ser aceptadas en todas partes. Estas características alertan a los comerciantes ante fraude. Por otro lado, los comerciantes acuerdan con una institución financiera que en adelante llamaremos **Adquirente**, la aceptación de las tarjetas de crédito como forma de pago. Con este fin, el comercio, abre una cuenta con el Banco Adquirente. Este acuerdo permite que el comerciante venda sus bienes y servicios a los clientes portadores de las tarjetas. La aceptación de las tarjetas implica en la mayoría de casos, transacciones electrónicas a través de un punto de venta al banco Adquirente, es la persona que tiene comunicación con el Emisor de la Tarjeta y solicita la autorización de pago. El Banco Emisor revisa la cuenta del cliente para verificar su conformidad y responde aprobando o negando la operación. Esta respuesta la recibe a través de su banco Adquirente en el punto de venta. La aprobación implica que el Banco Emisor acuerda reembolsar el monto de la compra al Banco Adquirente, quien a su vez lo depositará en la cuenta del comerciante.

El depósito en la cuenta es realizado al final del día, el punto de venta envía al banco Adquirente el resumen de las ventas efectuadas a través de un proceso Batch. También es posible hacerlo a través de resúmenes de venta que el comerciante llena manualmente y que deposita en las ventanillas del banco, a este resumen anexa los comprobantes firmados por cada uno de sus clientes portadores de la tarjeta habiente.

## 5. Préstamo

*Cantidad de dinero que se solicita, generalmente a una institución financiera, con la obligación de devolverlo con un interés.*

Préstamo es el contrato en el que una de las partes (prestamista) entrega activos físicos, financieros o dinero en efectivo y la otra (prestatario) comprometiéndose a devolverlos en una fecha o fechas determinadas y a pagar intereses sobre el valor del préstamo.

Así como «la suma» es la única operación matemática que existe y de la que todas las demás derivan; el **préstamo** es la única alternativa que existe en el mundo de las inversiones y de la que todas las demás derivan. En matemáticas, la «resta» es una suma donde uno de los números es negativo, la «multiplicación» es una sucesión de sumas, la «división» es una multiplicación de números fraccionarios, y así todas las demás. En inversiones pasa lo mismo.

Las alternativas más comunes de inversión, generalmente lo constituyen los distintos tipos de depósito que hacemos en los bancos: cuentas de ahorro, cuentas corrientes y plazo fijos. El banco reconoce un «interés» por nuestros depósitos (por el hecho de prestarle nuestro dinero), que los empleará para «prestárselo» a otras personas, empresas o gobierno. El banco intermedia, entonces, entre quienes tienen ahorros y los que necesitan fondos. <u>El riesgo es la solvencia del banco para devolvernos el dinero prestado.</u>

### 5.1. Grupos de préstamos

Por su uso existen hasta dos grupos de préstamos: **uno**, el denominado préstamo de consumo o préstamos personales, para compras de las economías domésticas (familias e individuos particulares) de bienes de consumo duraderos, como automóviles y electrodomésticos, es decir para consumo privado; y, **dos** el de inversión o capital productivo para fábricas, maquinaria o medios de transporte público así como para el aumento del capital humano como mano de obra calificada (no como gasto sino como inversión). Las economías nacionales requieren capital productivo, a tasas de interés de inversión que permitan aumentar y desarrollar el aparato productivo (MYPES) de las naciones.

Los capitales deberían estar presentes donde son necesarios, esto corresponde a mercados normales. Es urgente para los países emergentes salir del mercado de divisas, para reactivar la demanda agregada y salir de la orientación rentista del capital financiero especulativo.

### 5.2. Elementos de los préstamos

<u>Crédito</u>. Cantidad recibida por un préstamo (***VA***), monto afecto a intereses. En un crédito tenemos la posibilidad de disponer sumas de dinero hasta el límite de la línea autorizada o en cantidades menores una o varias veces, sobre los montos retirados el banco aplica intereses.

<u>Plazos</u>. Modalidad o tiempo en el que tenemos que devolver el crédito otorgado (***n***).

TEA (***i***). Es la tasa efectiva anual de interés. En función del plazo en días fijado se calcula la tasa de interés equivalente, adelantada o vencida, según sea el caso.

Interés. Rendimiento que obtenemos o pagamos por una inversión o préstamo en un período determinado. Es una cantidad de unidades monetarias (***VA*i***).

También se utiliza el término tipo de interés, que normalmente se refiere a la tasa nominal anual y no a la tasa del período. Ambos se formulan en tanto por ciento (%). Debemos especificar si los intereses son pagados al vencimiento o por adelantado.

Tasa de interés convencional compensatorio, cuando constituye la contraprestación por el uso del dinero o de cualquier otro bien. En operaciones bancarias ésta representada por la tasa activa para las colocaciones y la tasa pasiva para las captaciones que cobran o pagan las instituciones financieras.

Cualquier exceso sobre la tasa máxima da lugar a la devolución o a la imputación de capital a voluntad del deudor. Cuando el interés compensatorio es diferente a la tasa de interés inicialmente pactada, influye en el costo anual del crédito (TEA).

Tasa de interés moratorio, cuando tiene por finalidad indemnizar la mora en el pago. No cumplimiento de una deuda en el plazo estipulado. Se cobra cuando ha sido acordada. Aplicable al saldo de la deuda correspondiente al capital. Cuando la devolución del préstamo se hace en cuotas, el cobro del interés moratorio procede únicamente sobre el saldo de capital de las cuotas vencidas y no pagadas.

Tasa de interés legal, La tasa de interés legal en moneda nacional y extranjera, es fijada, según el Código Civil por el BCRP, cuando deba pagarse la tasa de interés compensatoria y/o moratoria no acordadas, en este caso, el prestatario abonará la tasa de interés legal efectiva publicado diariamente por la SBS.

Comisiones. Al recibir un préstamo (aparte de los intereses) podemos tener otros gastos. Pueden pedirnos certificaciones registrales, suscripción de una póliza de seguros, gastos de fedatario público (notario) y de registro (de la propiedad o mercantil). La entidad financiera puede también imponernos otras cantidades, como son gastos de estudios, comisiones de apertura, mantenimiento o pago anticipado, etc. Algunas serán fijas, otras variables (con o sin mínimo), unas las pagaremos al principio del período; otras a lo largo de la vida del préstamo; y habrá otras al final. Estos gastos elevan el costo (TEA) del préstamo por encima del tipo de interés pactado.

Por esta razón para la evaluación de productos financieros similares no basta simplemente la comparación por el tipo de interés ofertado, sino que hay que tener en cuenta otras herramientas de evaluación ya estudiados en capítulos anteriores y que aplicaremos en la solución de los ejemplos y ejercicios que se presenten en este libro.

Comisión bancaria. Retribución que el banco percibe por sus servicios. La comisión puede ser por la renovación del documento y/o por los gastos y servicios que ocasiona la gestión de cobranza (protesto).

Portes. Cantidad que se paga por transportar una cosa.

Protesto. Diligencia que se realiza cuando no es pagada una letra de cambio, cheque o pagaré. Se practica a fin de no perjudicar los derechos y acciones de las personas que intervienen en el giro o en los endoses. Esta acción demanda, como es obvio, gastos notariales.

Amortización. Reembolso del principal de los préstamos recibidos, de acuerdo al calendario de vencimiento del contrato, mediante cuotas periódicas generalmente iguales. Amortizar un préstamo es determinar las diferentes combinaciones de equivalencia del dinero a través del tiempo.

La deuda pendiente crece en el interior de cada uno de los períodos en los que está dividida la operación, para disminuir al final de los mismos como consecuencia de la entrega del término amortizativo.

Es decir, en cada uno de los períodos se producen dos movimientos de signo contrario, uno de crecimiento como consecuencia de los intereses generados y otro de disminución por la amortización del principal.

La suma de estos dos movimientos proporciona la variación total de la deuda pendiente al final del período. Existirá disminución de la obligación si la amortización es mayor que los intereses generados en el período e incremento en caso contrario. Cuando el valor de la amortización coincida con la cuota de interés no habrá variación de la deuda.

Pago (***C***). Es el efectuado en cada período, que no puede variar durante la anualidad. Generalmente el pago incluye el capital y el interés, no contiene aranceles, impuestos, seguros u otros gastos, que si viene reflejado en la tabla de amortización (estado de cuenta) que la institución financiera remite a sus clientes.

## 5.3. Descuento Bancario

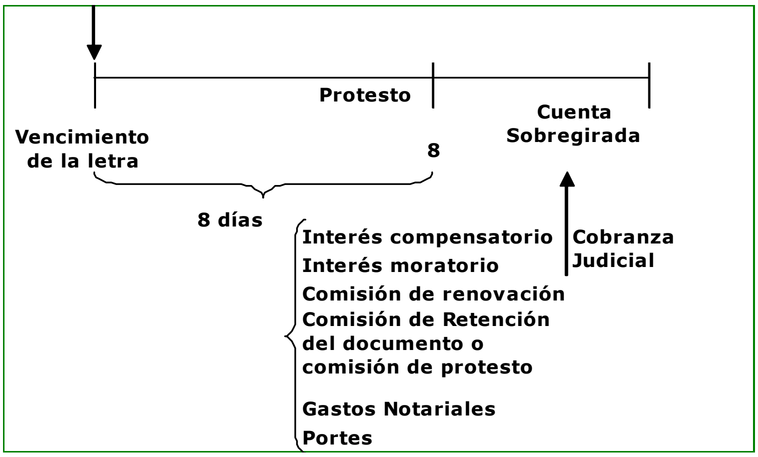
***Descuento***, *es el proceso de deducir la tasa de interés a un capital determinado para encontrar el valor presente de ese capital cuando el mismo es pagable a futuro.*

Es necesario conocer **cuánto** recibiremos al solicitar un préstamo. También debemos conocer **cuánto** pagaremos en la fecha de liquidación o el pago de una parte de la deuda, son pocas las veces que los pagos de una obligación son efectuadas en la fecha de vencimiento. De acuerdo a los días transcurridos, el Banco en forma adicional, cobra otros gastos como los intereses compensatorios, intereses moratorios, portes e inclusive distintos tipos de comisiones, así como gastos notariales cuando el documento es protestado. Por otro lado, como en la mayoría de casos los pagos de las obligaciones son parciales, aparecen los **intereses adicionales por la renovación del documento**.

El diagrama explicativo muestra los costos adicionales en los que incurrimos al no honrar el pago de una obligación a su vencimiento.

Normalmente, los empresarios piensan que llegado el vencimiento de un documento (pagaré, letra), cuentan con 8 días de gracia adicionales para su pago. Esto no es cierto. En todo caso sería el banco el que tiene hasta 8 días para protestar el documento pudiendo hacerlo antes del plazo establecido. Sin embargo, debemos tener en cuenta que un plazo adicional de 8 días, significa nuevos costos por concepto de comisiones, gastos notariales o porque el interés compensatorio se incrementa en relación al interés inicialmente acordado (tasa activa) que repercute en el costo financiero del crédito.

El protesto del documento puede tener lugar en cualquiera de los ocho días siguientes después del vencimiento de la letra.




Si sólo amortizamos parte de la deuda, deberemos pagar además de los gastos ya mencionados, intereses adelantados o vencidos, según sea el caso, por la renovación del documento.

## 5.4. Tipos de préstamos

Existen hasta cuatro clasificaciones basados en:

### 5.4.1. En el tipo de interés asociado al préstamo

Distinguimos tres tipos de préstamos:

1) De interés fijo. El tipo de interés permanece fijo durante la vida del préstamo. En este caso, el cliente tiene la cuota constante y su cálculo dependerá del plazo que escoja.

2) De interés variable. Está referenciado a un índice que viene predeterminado en el contrato, con plazo determinado (normalmente un año) y revisable periódicamente (la revisión más general es la anual). Debido a esto, la cuota varía por cada revisión.

3) De interés mixto. Mezcla de los dos anteriores. Definido como préstamo a tipo variable con período fijo inicial superior a 1 año.

### 5.4.2. En el concepto de carencia o diferimiento

Distinguimos dos clases de préstamos diferidos:

1) Préstamos sin carencia. Los más comunes. En ellos el prestatario empieza a pagar inmediatamente después de recibir el préstamo y su cuota es dividido entre intereses y amortización.

2) Préstamo con carencia. Aquellos en los que el prestatario paga sólo intereses o no paga nada al inicio del préstamo (generalmente dos años). El primer caso, paga sólo intereses y en segundo no paga capital ni intereses durante el período de gracia.

### 5.4.3. En las diferentes modalidades de cuota

Distinguimos cuatro clases de préstamos:

1) De cuota constante. Los más comunes. Aplicados a los préstamos a tipo fijo. La composición de la cuota es la suma de intereses y capital amortizado. Estas dos partidas evolucionan inversamente, es decir, la evolución de los intereses dentro de la cuota es decreciente mientras que la amortización es creciente.

2) De cuota fija. Término utilizado para los préstamos a tipo fijo, referenciados a índices en los cuales el prestatario paga una cantidad fija periódicamente (cuota fija) independientemente de la evolución de los tipos de interés.

3) En este tipo de préstamos, la duración no es fija, es variable; es decir, la fecha de amortización del préstamo es desconocida, (si los tipos de interés suben, el préstamo es en más tiempo y viceversa). Los intereses dentro de la cuota son decrecientes y la amortización creciente.

4) De cuota creciente. En este caso la cuota aumenta un porcentaje anual previamente establecido. Los pagos aumentan con el tiempo, siendo las primeras cuotas pequeñas. Debemos considerar que la cantidad total de intereses pagados al finalizar el préstamo son mayores. La cuota es la suma de amortización e intereses. Al pagar una pequeña cuota al principio, sólo estamos amortizando los intereses del préstamo. La ventaja es el pago de cuotas pequeñas al principio, liberando en éste momento de mayores gastos al prestatario.

5) De cuota decreciente. Contraria a la anterior. Aquí, las cuotas son mayores al principio del préstamo, pagando menos con el paso del tiempo. La forma de hacerlo es pagar siempre la misma cantidad de capital, para que los intereses aplicados sobre el capital pendiente sean cada vez menores. Al tener una cantidad fija por amortización y otra decreciente por intereses. El efecto es que tenemos una cuota decreciente.

#### 5.4.4. En la diferente periodicidad de la cuota

En función del pago de la cuota distinguimos varios tipos:

1) Mensuales (la más común en los préstamos personales)
2) Trimestrales (poco usada)
3) Semestrales (raramente usada)
4) Anuales (Aplicable para proyectos de desarrollo)

## 6. Modalidad de pago de las deudas

Como acabamos de ver en el numeral anterior, los tipos de préstamos son varios. Según las condiciones (a interés simple o compuesto) la estructura de pago varía. Puede ser un sólo pago o en cuotas. Unos pagos son mayores o constantes en los primeros o últimos períodos.

Reiteramos, los créditos consideran opcionalmente plazos de gracia (carencia), en los cuales no amortiza el préstamo, pudiendo sí consignar desembolso de intereses (pago de intereses generados en el período). Cuando la condición del préstamo es pago con interés compuesto y no considera desembolso de intereses generados, éstos capitalizan. Por lo general existen hasta cinco **sistemas de pago** de préstamos, estos son:

6.1. Flat,

6.2. En un sólo pago (Método americano),

6.3. En cuotas constantes (Método francés),

6.4. En cuotas decrecientes (sistema alemán),

6.5. En cuotas crecientes.

### 6.1. Sistema de pago Flat

«*Sistema de pago con aplicación del interés simple*»

El interés generado en este sistema de pagos es calculado únicamente sobre el principal. Los intereses causados de un período a otro no ganan intereses. Por esta razón, el valor de los intereses es constante. En este sistema de pago, distinguimos tres casos particulares:

**A) Préstamo con amortización única al vencimiento (Método americano simple).**

La característica de este tipo de préstamos es:

a) Única amortización de capital al vencimiento por el total del préstamo.

b) En las demás cuotas periódicas tan sólo pagan los intereses del período.

**B) Pago flat en un sólo pago final**

El principal y los intereses son pagados al final en un sólo pago.

**C) Préstamo con amortización de capital constante**

En este tipo de préstamos la amortización de capital es constante en todas las cuotas. También y a efectos de simplificar, vamos a considerar que el tipo de interés es constante durante toda la operación, aunque este requisito no es necesario. Calculamos fácilmente el importe de la amortización de capital constante. Basta con dividir el importe del préstamo por el número de períodos.

**<u>EJEMPLO 179</u> (Ejemplo para la aplicación de los cinco sistemas de pago)**

Un pequeño empresario en expansión, requiere capital de trabajo para ampliar la capacidad de producción y acude a una EDPYME, gestionando un préstamo por UM 70,000, para su liquidación en un sólo pago o en cinco años al 22% anual. Solucione el ejemplo aplicando los tres casos del sistema flat (A, B y C) y calcule el costo global del préstamo:

**Solución**:

VA = 70,000; n = 5; i = 22% flat; I = ?; VF = ?

**A) Método americano simple:**

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **AÑO** | **SALDO INICIAL** | **INTERÉS** | **AMORTZ** | **PAGO** | **SALDO FINAL** |
| 2 | 0 | | | | | 70,000.00 |
| 3 | 1 | 70,000.00 | 15,400.00 | | 15,400.00 | 70,000.00 |
| 4 | 2 | 70,000.00 | 15,400.00 | | 15,400.00 | 70,000.00 |
| 5 | 3 | 70,000.00 | 15,400.00 | | 15,400.00 | 70,000.00 |
| 6 | 4 | 70,000.00 | 15,400.00 | | 15,400.00 | 70,000.00 |
| 7 | 5 | 70,000.00 | 15,400.00 | | 15,400.00 | 70,000.00 |
| 8 | 6 | 70,000.00 | 15,400.00 | 70,000.00 | 85,400.00 | 0.00 |

Calculo del monto a pagar:

[8] Interés por período I1...5 = 70,000*0.22 = UM 15,400

Pago final período 5 = 70,000 + 15,400 = UM 85,400

**B) Pago flat en un sólo pago**:

[5] Pago total *VF* = 70,000[1+(0.22*5)] = **UM 147,000**

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **AÑO** | **SALDO INICIAL** | **INTERÉS ACUMUL** | **AMORTZ** | **PAGO** | **SALDO FINAL** |
| 2 | 0 | | | | | 70,000.00 |
| 3 | 1 | 70,000.00 | 15,400.00 | | | 70,000.00 |
| 4 | 2 | 70,000.00 | 30,800.00 | | | 70,000.00 |
| 5 | 3 | 70,000.00 | 46,200.00 | | | 70,000.00 |
| 6 | 4 | 70,000.00 | 61,600.00 | | | 70,000.00 |
| 7 | 5 | 70,000.00 | 77,000.00 | 70,000.00 | 147,000.00 | 0.00 |

**C) En cinco cuotas de amortización constante flat:**

**Amortización** = 70,000 / 5 = UM 14,000/ anuales

***I1...5*** **=** 70,000*0.22 = UM 15,400 anuales

***C1...5*** = 14,000 + 15,400 = UM 29,400 anuales

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **AÑO** | **SALDO INICIAL** | **INTERÉS** | **AMORTZ** | **PAGO** | **SALDO FINAL** |
| 2 | 0 | | | | | 70,000.00 |
| 3 | 1 | 70,000.00 | 15,400.00 | 14,000.00 | 29,400.00 | 56,000.00 |
| 4 | 2 | 56,000.00 | 15,400.00 | 14,000.00 | 29,400.00 | 42,000.00 |
| 5 | 3 | 42,000.00 | 15,400.00 | 14,000.00 | 29,400.00 | 28,000.00 |
| 6 | 4 | 28,000.00 | 15,400.00 | 14,000.00 | 29,400.00 | 14,000.00 |
| 7 | 5 | 14,000.00 | 15,400.00 | 14,000.00 | 29,400.00 | 0.00 |

Calculando el costo del préstamo, tenemos:

VA = 70,000;   VF = 147,000;   $i_T = j$

[7] $\boldsymbol{I} = 147{,}000 - 70{,}000 =$ UM 77,000     $\boldsymbol{j} = 22\%*5 = 110\%$

[1] $\boldsymbol{i}_T = \dfrac{147{,}000 - 70{,}000}{70{,}000} \times 100 = 110\%$

Finalmente, a una tasa anual de 22%, en las tres formas de pago la tasa de interés global del préstamo es 110%.

## 6.2. Sistema de pago en un solo pago futuro

*«Sistema de pago con aplicación del interés compuesto»*

Este sistema de pagos está referido a los conceptos y fórmulas del 1º y 2º Factores Financieros de las Seis Llaves Maestras de las Matemáticas Financieras, tratado ampliamente en el Capítulo 3.

Con el ejemplo 179, consideremos el préstamo de UM 70,000 para su liquidación al final del quinto año, en una sola armada con un interés del 22% anual. Determinar el monto a pagar transcurrido los cinco años y calcule el costo global del préstamo.

**Solución**:

VA = 70,000;   n = 5;   i = 0.22%;   VF = ?

Obtenemos directamente aplicando la fórmula [19]

[19] $\boldsymbol{VF} = 70{,}000\,(1 + 0.22)^5 =$ UM 189,190 pago total final

Finalmente, calculamos el costo del préstamo:

[22] $\boldsymbol{i} = \sqrt[n]{\dfrac{\boldsymbol{VF}}{\boldsymbol{VA}}} - 1$     [1] $\boldsymbol{i}_T = \dfrac{189{,}190 - 70{,}000}{70{,}000} \times 100 = 170.27\%$

**Respuesta:** A la tasa anual de 22%, el costo global del préstamo es de 170.27%.

## 6.3. Sistema de pago en cuotas constantes (Método francés)

*«Pagos iguales efectuados periódicamente del interés compuesto y del principal».*

Caracterizado por cuotas de pago constante a lo largo de la vida del préstamo. También considera que el tipo de interés es único durante toda la operación. El pago de la deuda es en cuotas constantes o uniformes. La cuota a pagar durante los plazos establecidos es constante hasta su liquidación. El interés es al rebatir, es decir, aplicado sobre los saldos existentes de la deuda en un período. **Es muy utilizado por los bancos y tiendas que venden al crédito**. Son ejemplos de este Sistema de pago los préstamos personales del sistema bancario, las ventas a crédito de los supermercados, ect..

Ahora, consideremos el préstamo de UM 70,000 para su pago en cinco cuotas anuales y uniformes, a la tasa de interés del 22% anual. Determinar el valor de cada cuota y elabore el cronograma del plan de pagos.

**Solución**:

VA = 70,000;   n = 5;   i = 0.22%;   C = ?

1º Calculamos el valor de cada cuota (**Pago)** con la fórmula [24], la función PAGO o Buscar Objetivo:

[25] $\boldsymbol{C} = 70{,}000\left\langle \dfrac{0.22 * 1.22^5}{1.22^5 - 1} \right\rangle =$ UM 24,444

**Sintaxis**

**PAGO**(**tasa**;**nper**;**va**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | VA | VF | Tipo | PAGO |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.22 | 5 | -70,000 | | | 24,444.42 |

2º Elaboramos el CRONOGRAMA DE LA DEUDA:

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | AÑO | SALDO INICIAL | INTERÉS | AMORTZ | PAGO | SALDO FINAL |
| 2 | 0 | | | | | 70,000.00 |
| 3 | 1 | 70,000.00 | 15,400.00 | 9,044.42 | 24,444 | 60,955.58 |
| 4 | 2 | 60,955.58 | 13,410.23 | 11,034.19 | 24,444 | 49,921.40 |
| 5 | 3 | 49,921.40 | 10,982.71 | 13,461.71 | 24,444 | 36,459.69 |
| 6 | 4 | 36,459.69 | 8,021.13 | 16,423.28 | 24,444 | 20,036.41 |
| 7 | 5 | 20,036.41 | 4,408.01 | 20,036.41 | 24,444 | 0.00 |

## 6.4. Sistema de pago en cuotas decrecientes (Sistema Alemán)

*«Sistema de pago con aplicación del interés compuesto»*

Como su nombre lo indica, las cuotas disminuyen período a período, la amortización es constante hasta la extinción de la deuda. El interés compuesto y una parte del principal son abonados periódicamente. Para la solución de casos con este sistema de pagos, conocida la amortización, necesariamente operamos con las tablas de amortización. No hay fórmulas para determinar las cuotas. El interés aplicado a los saldos es al rebatir.

Continuando con el ejemplo 179, consideremos ahora, el préstamo de UM 70,000 para su pago en cinco cuotas anuales decrecientes, a la tasa de interés del 22% anual. Determinar el valor de la amortización anual cuota y elabore el cronograma del plan de pagos.

**Solución**:

VA = 70,000; n = 5; i = 0.22%

Como la amortización es constante:

**Amortización** = 70,000 / 5 = UM 14,000/ anuales

| AÑO | SALDO INICIAL | INTERÉS | AMORTZ | PAGO | SALDO FINAL |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | 70,000.00 |
| 1 | 70,000.00 | 15,400.00 | 14,000.00 | 29,400 | 56,000.00 |
| 2 | 56,000.00 | 12,320.00 | 14,000.00 | 26,320 | 42,000.00 |
| 3 | 42,000.00 | 9,240.00 | 14,000.00 | 23,240 | 28,000.00 |
| 4 | 28,000.00 | 6,160.00 | 14,000.00 | 20,160 | 14,000.00 |
| 5 | 14,000.00 | 3,080.00 | 14,000.00 | 17,080 | 0.00 |

Interés = Saldo Inicial*0.22

PAGO = INTERES + AMORTIZACION

## 6.5. Sistema de pago en cuotas crecientes

*«Sistema de pago con aplicación del interés compuesto»*

Esta forma de pago, por sus características resulta cómodo al deudor, por cuanto las primeras cuotas son menores. Como utiliza el factor que está en función al número de cuotas por pagar, la amortización y las cuotas aumentan en forma gradual. Aplicando la progresión aritmética, calculamos el factor por período de capitalización que multiplicado por el valor del préstamo nos proporcionará el monto de cada amortización.

Siempre con el ejemplo 179, consideremos ahora, el préstamo de UM 70,000 para su pago en cinco cuotas anuales crecientes, a la tasa de interés del 22% anual. Determinar el valor de cada cuota y elaborara el cronograma del plan de pagos.

**Solución**:

VA = 70,000; n = 5; i = 0.22%

1º Aplicando la progresión aritmética, tenemos:

$\sum = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$

FACTOR Año 1 1/15 = 0.0667

FACTOR Año 2 2/15 = 0.1333, así sucesivamente

Interés = Saldo Inicial*0.22

AMORTIZACION = PRESTAMO*FACTOR

PAGO = AMORTIZACION + INTERES

| AÑO | FACTOR | PTMO. | AMORTZ | SALDO INICIAL | INTERES | PAGO | SALDO FINAL |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | | 70,000 |
| 1 | 0.0667 | 70,000 | 4,667 | 70,000 | 15,400 | 20,067 | 65,333 |
| 2 | 0.1333 | 70,000 | 9,333 | 65,333 | 14,373 | 23,707 | 56,000 |
| 3 | 0.2000 | 70,000 | 14,000 | 56,000 | 12,320 | 26,320 | 42,000 |
| 4 | 0.2667 | 70,000 | 18,667 | 42,000 | 9,240 | 27,907 | 23,333 |
| 5 | 0.3333 | 70,000 | 23,333 | 23,333 | 5,133 | 28,467 | 0 |

## 7. Formas de Pago de los Préstamos

Aplicando cualquiera de estos cinco sistemas de pago existen hasta **tres formas** de pago de los préstamos:

7.1. Préstamos con período de carencia o período de gracia

7.2. Préstamos con distintos tipos de interés

7.3. Préstamos con intereses anticipados

De los cinco sistemas de pago de los préstamos analizados, el denominado sistema de pagos en cuotas constantes o método de amortización francés, es la modalidad de amortización de uso común por la mayoría de entidades financieras y tiendas de venta al crédito.

## 7.1. Préstamo con período de carencia

En algunos préstamos consideran un período inicial de carencia (período de gracia), con el que el prestatario dispone del plazo para que la inversión asociada al crédito, genere los ingresos para afrontar la amortización del mismo.

**El período de carencia puede ser de dos tipos**:

a) Carencia en la amortización del capital, haciendo frente al pago de intereses.

b) Carencia total. El prestatario no realiza ningún pago durante este período.

**a) Carencia en la amortización del capital**

Durante el período de carencia, el prestatario paga cuotas constantes equivalentes a la liquidación de los intereses periódicos:

$$[8] \quad \boldsymbol{I = VA*i*n}$$

(Siendo ***VA*** el importe del capital inicial del préstamo)

Finalizado este período, el préstamo discurre normalmente (del tipo que sea: cuota constante, amortización al vencimiento, etc.).

**Ejemplo 180 (Carencia en la amortización del capital)**

Un empresario tiene una obligación por UM 40,000 para su liquidación en 3 años, con pagos trimestrales con el 52% de interés anual. Considera 4 trimestres de carencia durante el cual sólo amortizan los intereses. Transcurrido este período, la deuda es pagada normalmente con cuotas constantes.

**Solución**: [$n = 4_{\text{AÑOS}}*3_{\text{MESES}} = 12_{\text{TRIMESTRES}} - 4_{\text{(TRIMESTRES CARENCIA)}}$] $i = 0.52_{\text{(TASA NOMINAL)}}/4_{\text{TRIMESTRES ANUALES}}$

VA = 40,000; n = 8; i = 0.13; $I_{1...4}$ = ?

1º Calculamos los intereses pagados durante el período de carencia.

[8] $\mathbf{I_{1...4}} = 40{,}000*0.13*1 = \text{UM } 5{,}200$

2º Transcurrido los 4 trimestres, la obligación es pagada en cuotas constantes: $\boldsymbol{n} = 8_{\text{ TRIMESTRES}}$

$$[25]\ C=40{,}000\left\langle\frac{0.13*1.13^8}{1.13^8-1}\right\rangle = \text{ UM } 8{,}335.47$$

**Sintaxis**
**PAGO (tasa; nper; va**; vf; tipo)

| Tasa | Nper | VA | VF | Tipo | PAGO |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.13 | 8 | (40,000) | | | 8,335.47 |

3º Finalmente, elaboramos LA TABLA DE AMORTIZACION DE LA DEUDA:

| TRIMESTRES | SALDO INICIAL | INTERES | AMORTIZ | PAGO | SALDO FINAL |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | 40,000.00 |
| 1 | 40,000.00 | 5,200.00 | | 5,200.00 | 40,000.00 |
| 2 | 40,000.00 | 5,200.00 | | 5,200.00 | 40,000.00 |
| 3 | 40,000.00 | 5,200.00 | | 5,200.00 | 40,000.00 |
| 4 | 40,000.00 | 5,200.00 | | 5,200.00 | 40,000.00 |
| 5 | 40,000.00 | 5,200.00 | 3,135.47 | 8,335.47 | 36,864.53 |
| 6 | 36,864.53 | 4,792.39 | 3,543.08 | 8,335.47 | 33,321.45 |
| 7 | 33,321.45 | 4,331.79 | 4,003.68 | 8,335.47 | 29,317.77 |
| 8 | 29,317.77 | 3,811.31 | 4,524.16 | 8,335.47 | 24,793.61 |
| 9 | 24,793.61 | 3,223.17 | 5,112.30 | 8,335.47 | 19,681.31 |
| 10 | 19,681.31 | 2,558.57 | 5,776.90 | 8,335.47 | 13,904.42 |
| 11 | 13,904.42 | 1,807.57 | 6,527.89 | 8,335.47 | 7,376.52 |
| 12 | 7,376.52 | 958.95 | 7,376.52 | 8,335.47 | 0.00 |

PAGO : FORMULA 22, en nuestro caso la función buscar objetivo de Excel.

**b) Carencia total**

En este caso, el empresario no realiza ningún pago durante el período de carencia, razón por la cual el importe del principal aumenta, debido a la acumulación de los intereses. Con el ejemplo 180, suponiendo que hay carencia total de pago, en el lapso establecido.

**Solución**:

VA = 40,000; n = 8; i = 0.13; $I_{1...4}$ = ?

1º Con la fórmula [19] o la función VF de Excel, calculamos el importe (futuro) del principal al finalizar los 4 trimestres de carencia:

[19] $VF = 40{,}000(1 + 0.13)^4 = \text{UM } 65{,}218.94$

2º Durante los 8 trimestres que van desde el final del período de carencia hasta el vencimiento del préstamo los pagos son en cuotas trimestrales constantes; para el cálculo de la cuota aplicamos la fórmula [24] o la función PAGO de Excel y la respectiva tabla de amortización de la operación:

**Sintaxis**

**PAGO (tasa; nper; va**; vf; tipo)

| Tasa | Nper | VA | VF | Tipo | PAGO |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.13 | 8 | (65,219) | | | 13,590.76 |

| TRIMESTRES | SALDO INICIAL | INTERES | AMORTIZ | PAGO | SALDO FINAL |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | 40,000.00 |
| 1 | 40,000.00 | 5,200.00 | | 5,200.00 | 45,200.00 |
| 2 | 45,200.00 | 5,876.00 | | 5,876.00 | 51,076.00 |
| 3 | 51,076.00 | 6,639.88 | | 6,639.88 | 57,715.88 |
| 4 | 57,715.88 | 7,503.06 | | 7,503.06 | 65,218.94 |
| 5 | 65,218.94 | 8,478.46 | 5,112.30 | 13,590.76 | 60,106.65 |
| 6 | 60,106.65 | 7,813.86 | 5,776.90 | 13,590.76 | 54,329.75 |
| 7 | 54,329.75 | 7,062.87 | 6,527.89 | 13,590.76 | 47,801.85 |
| 8 | 47,801.85 | 6,214.24 | 7,376.52 | 13,590.76 | 40,425.33 |
| 9 | 40,425.33 | 5,255.29 | 8,335.47 | 13,590.76 | 32,089.86 |
| 10 | 32,089.86 | 4,171.68 | 9,419.08 | 13,590.76 | 22,670.78 |
| 11 | 22,670.78 | 2,947.20 | 10,643.56 | 13,590.76 | 12,027.22 |
| 12 | 12,027.22 | 1,563.54 | 12,027.22 | 13,590.76 | 0.00 |

## 7.2. Préstamo con distintos tipos de interés

Usualmente existen préstamos con distintos tipos de interés. Por ejemplo: 5% durante los tres primeros años, 8% durante el 4º y 5º año y 10% durante los dos últimos años. Suelen ser operaciones a largo plazo, en las que el tipo de interés va aumentando a medida que el plazo sube. Aparte de esta particularidad, estos préstamos pueden seguir el desarrollo de algunos de los sistemas de pago que hemos analizado (cuotas periódicas constantes, amortización de principal constante, etc.).

**a) Préstamos con distintos tipos de interés y cuotas constantes**

Supongamos que existen 2 tramos: uno que va del inicio hasta el período «n», con un tipo de interés «i1», y un segundo tramo que va desde el período n+1 hasta el vencimiento, con un tipo de interés «i2». Entonces:

La cuota uniforme de cada tramo, la calculamos con la expresión [25] o la función PAGO, en la que operamos con la tasa de interés del tramo y con ***n*** igual al total de períodos pendientes de pago. Al saldo final, deducida las cuotas del tramo calculado, aplicamos nuevamente la notación [25] para el cálculo del pago del siguiente tramo y así sucesivamente. Los valores que obtenemos con este método son cuotas constantes de un tramo a otro. Método válido para más de dos cambios en la tasa de interés con cuotas uniformes.

Para la solución de casos de este tipo, en el presente libro, aplicaremos este método por ser más sencillo y adecuado a casos de la vida real, por cuanto los intereses varían en el tiempo y difícilmente pueden ser pronosticados.

**Ejemplo 181 (Cuota constante con distintos tipos de interés)**

Calcular la cuota periódica constante y el cuadro de amortización de un préstamo de UM 40,000, a 6 años, con el 8% de interés durante los 3 primeros años y del 12% durante los 3 restantes. Calcular la cuota constante, con los dos tipos de interés.

**Solución**:

VA = 40,000; n = 6; i = 0.08; C = ?

**Cuotas del primer tramo**:

[25] $\boldsymbol{C} = 40{,}000 \left\langle \frac{0.08*1.08^{6}}{1.08^{6}-1} \right\rangle = \text{UM } 8{,}652.62$

**Sintaxis**

**PAGO (tasa; nper; va**; vf; tipo)

| Tasa | Nper | VA | VF | Tipo | PAGO |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.08 | 6 | (40,000) | | | 8,652.62 |

**Cuotas del segundo tramo**:

Para el cálculo de la cuota de este tramo, elaboramos la tabla de amortización del préstamo y con el saldo pendiente de pago (VA) determinamos la cuota del segundo tramo:

$VA_{\text{(SALDO PENDIENTE)}}$ = 22,298.63; n = 3; i = 0.12; C = ?

**Sintaxis**

**PAGO (tasa; nper; va**; vf; tipo)

| Tasa | Nper | VA | VF | Tipo | PAGO |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.12 | 3 | (22,299) | | | 9,284.01 |

| TRIMESTRES | SALDO INICIAL | INTERES | AMORTIZ | PAGO | SALDO FINAL |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | 40,000.00 |
| 1 | 40,000.00 | 3,200.00 | 5,452.62 | 8,652.62 | 34,547.38 |
| 2 | 34,547.38 | 2,763.79 | 5,888.82 | 8,652.62 | 28,658.56 |
| 3 | 28,658.56 | 2,292.68 | 6,359.93 | 8,652.62 | 22,298.63 |
| 4 | 22,298.63 | 2,675.84 | 6,608.18 | 9,284.01 | 15,690.45 |
| 5 | 15,690.45 | 1,882.85 | 7,401.16 | 9,284.01 | 8,289.30 |
| 6 | 8,289.30 | 994.72 | 8,289.30 | 9,284.01 | 0.00 |

**b) Préstamos con distintos tipos de interés y devolución de principal constante**

Con este tipo de préstamos amortizamos el mismo capital en todos los períodos, con independencia del tipo de interés vigente en ese momento.

**Ejemplo 182 (Amortización constante y distintos tipos de interés)**

Determinar la amortización de capital constante y elaborar el cuadro de amortización de un préstamo de UM 30,000, a 8 años, con la tasa de interés del 32% durante los 3 primeros años y del 48% durante los 5 restantes:

**Solución**:

VA = 30,000; n = 3 y 5; i1 = 0.32; i2 = 0.48;

1º El monto constante de la amortización de capital lo calculamos de la siguiente forma:

$$\textbf{AMORTIZACION} = \frac{30{,}000}{8} = \text{UM } 3{,}750 \text{ constante durante los 8 años}$$

2º Elaboramos la tabla de amortización de la operación financiera, método recomendable para la solución de casos de este tipo:

| AÑOS | SALDO INICIAL | INTERÉS | AMORTZ | PAGO | SALDO FINAL |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | 40,000.00 |
| 1 | 30,000.00 | 9,600.00 | 3,750.00 | 13,350.00 | 26,250.00 |
| 2 | 26,250.00 | 8,400.00 | 3,750.00 | 12,150.00 | 22,500.00 |
| 3 | 22,500.00 | 7,200.00 | 3,750.00 | 10,950.00 | 18,750.00 |
| 4 | 18,750.00 | 9,000.00 | 3,750.00 | 12,750.00 | 15,000.00 |
| 5 | 15,000.00 | 7,200.00 | 3,750.00 | 10,950.00 | 11,250.00 |
| 6 | 11,250.00 | 5,400.00 | 3,750.00 | 9,150.00 | 7,500.00 |
| 7 | 7,500.00 | 3,600.00 | 3,750.00 | 7,350.00 | 3,750.00 |
| 8 | 3,750.00 | 1,800.00 | 3,750.00 | 5,550.00 | 0.00 |

PAGO = INTERES + AMORTIZACION

## 7.3. Préstamos con intereses anticipados

Es decir, los intereses son pagados por anticipado, al inicio de cada período. El monto efectivo inicial que recibe el prestatario será el importe del préstamo menos los intereses del primero. Estos préstamos pueden ofrecer diversas modalidades, entre las que destacamos:

a) Cuota constante

b) Amortización de capital constante

**a) Cuota constante**

Como vimos en el numeral 6.3. Plan de pago en cuotas constantes (Método francés), esta cuota es calculada con la fórmula [25] o la función PAGO.

**EJEMPLO 183 (Préstamo con intereses anticipados y cuota constante )**

Si obtenemos un préstamo por UM 6,000 a la tasa de interés de 48% anual, compuesto semestralmente, con pagos de intereses anticipados y 5 pagos semestrales iguales. Determinar el importe de cada cuota y elaborar la tabla de amortización.

**Solución**: [i = 0.48/2 $_{\text{SEMESTRES}}$]

VA = 6,000; n = 5; i = 0.24; C = ?

1º Aplicando la fórmula (25) o la función PAGO, calculamos la cuota semestral a pagar por el préstamo:

$$[25]\quad \boldsymbol{C} = 6{,}000\left\langle\frac{0.24*1.24^{5}}{1.24^{5}-1}\right\rangle = \text{UM } 2{,}185.49$$

**Sintaxis**

**PAGO (tasa; nper; va**; vf; tipo)

| Tasa | Nper | VA | VF | Tipo | PAGO |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.24 | 5 | (6,000) | | | 2,185.49 |

2º Elaboramos la tabla de amortización:

| TRIMESTRES | SALDO INICIAL | INTERES | AMORTIZ | PAGO | SALDO FINAL |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 6,000.00 | 1,440.00 | | 1,440.00 | 6,000.00 |
| 1 | 5,254.51 | 1,261.08 | 745.49 | 2,185.49 | 5,254.51 |
| 2 | 4,330.11 | 1,039.23 | 924.40 | 2,185.49 | 4,330.11 |
| 3 | 3,183.85 | 764.12 | 1,146.26 | 2,185.49 | 3,183.85 |
| 4 | 1,762.49 | 423.00 | 1,421.36 | 2,185.49 | 1,762.49 |
| 5 | 0.00 | 0.00 | 1,762.49 | 2,185.49 | 0.00 |

El prestatario recibe en el momento inicial UM 4,560 (UM 6,000 del préstamo, menos los intereses de UM 1,440 del primer año). La cuota periódica de UM 2,185.49 anual, es calculada con el valor del préstamo y pagada al final de cada período, compuesta por la amortización de capital de dicho período, más los intereses del período anterior. La última cuota no paga intereses, por cuanto los intereses de esta cuota fueron pagadas el mes anterior.

**b) Amortización de capital constante**

En este tipo de préstamos la amortización de capital es constante en cada período. La cuota periódica disminuye debido a que los intereses van disminuyendo.

Con el ejemplo 183, tenemos:

**Solución**:

VA = 6,000; n = 5; i = 0.24; C = ?

AMORTIZACION = 6,000 / 5 = UM 1,200

| AÑOS | SALDO INICIAL | INTERÉS | AMORTZ | PAGO | SALDO FINAL |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 6,000.00 | 1,440.00 | | 1,440.00 | 6,000.00 |
| 1 | 4,800.00 | 1,152.00 | 1,200.00 | 2,352.00 | 4,800.00 |
| 2 | 3,600.00 | 864.00 | 1,200.00 | 2,064.00 | 3,600.00 |
| 3 | 2,400.00 | 576.00 | 1,200.00 | 1,776.00 | 2,400.00 |
| 4 | 1,200.00 | 288.00 | 1,200.00 | 1,488.00 | 1,200.00 |
| 5 | 0.00 | 0.00 | 1,200.00 | 1,200.00 | 0.00 |

AMORTIZACION = 6,000/5
PAGO = INTERES + AMORTIZACION
ALDO FINAL = SALDO INICIAL

# 8. Préstamos hipotecarios y préstamos personales

## 8.1. Préstamos hipotecarios

Los préstamos hipotecarios son otorgados para financiar la adquisición de viviendas. Son préstamos a largo plazo, entre 15 y 30 años, con tasas que suelen ser variables. Las cuotas de amortización son constantes en el período que va entre cada revisión de tipos. Cuando solicitamos un préstamo es necesario conocer el valor de la cuota mensual. Esta dependerá del monto del préstamo, su duración y tipo de interés aplicado. El cálculo del importe de la cuota mensual es posible hacerlo asumiendo que la tasa no cambiará durante el tiempo que dure la operación.

**Gastos asociados a la contratación de préstamos hipotecarios:**

El hecho de solicitar un **préstamo hipotecario** lleva implícito una serie de comisiones y gastos asociados.

Gastos de corretaje. Para dar validez a las escrituras, es necesaria la firma de un corredor de comercio. Por tanto, incurriremos en el gasto que supone pagar la minuta del corredor.

Seguros.

Seguro de vida. El hecho de solicitar préstamos hipotecarios lleva asociado (obligatoriamente) un seguro de vida que cubra el valor del préstamo.

**Ejemplo:** Es permisible confeccionar tablas que determinan el importe de la cuota mensual por cada millón UM, según el tipo y el plazo.

**Solución**:

VA = 1’000,000; n = 5, 10, 15, 25, 30 años; i = 5%, 7%, 9%, 12% y 15% anual; $C_{MESUAL}$ = ?

Para calcular el importe mensual por cada millón de UM aplicamos la fórmula [25]: n = (5*12) = 60 y así sucesivamente; i = (0.05/12) = 0.004166 y así sucesivamente o la función PAGO. Operamos la fórmula o la función con la tasa mensual:

$$[25]\quad \boldsymbol{C}_5 = 1'000{,}000\left\langle\frac{0.004166 * 1.004166^{60}}{1.004166^{60}-1}\right\rangle = \text{UM } 18{,}871 \text{ mensual}$$

**Sintaxis**

**PAGO**(**tasa**;**nper**;**va**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | VA | VF | Tipo | PAGO |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.004167 | 60 | -1,000,000 | | | 18,871.23 |
| 0.005833 | 120 | -1,000,000 | | | 11,610.85 |
| 0.007500 | 180 | -1,000,000 | | | 10,142.67 |
| 0.010000 | 300 | -1,000,000 | | | 10,532.24 |
| 0.012500 | 360 | -1,000,000 | | | 12,644.44 |

TASA : i/12
Nper : n/12

**CUOTA MENSUAL POR UM 1'000,000**

$$[25]\quad \boldsymbol{C} = \boldsymbol{VA}\left\langle\frac{\boldsymbol{i}(1+\boldsymbol{i})^{n}}{(1+\boldsymbol{i})^{n}-1}\right\rangle$$

| Tasa mes | 5 años | 10 años | 15 años | 20 años | 25 años | 30 años |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.004167 | 18,871 | 10,607 | 7,908 | 6,600 | 5,846 | 5,368 |
| 0.005833 | 19,801 | 11,611 | 8,988 | 7,753 | 7,068 | 6,653 |
| 0.007500 | 20,758 | 12,668 | 10,143 | 8,997 | 8,392 | 8,046 |
| 0.010000 | 22,244 | 14,347 | 12,002 | 11,011 | 10,532 | 10,286 |
| 0.012500 | 23,790 | 16,133 | 13,996 | 13,168 | 12,808 | 12,644 |

El sistema de préstamos hipotecarios permite a las personas naturales obtener recursos a largo plazo para comprar, ampliar bienes inmuebles, terrenos urbanizados, casas de playa o campo, oficinas o locales comerciales

Además de la tasa de interés pactada, los bancos toman dos seguros: uno para el inmueble contra todo riesgo, cuyo costo promedio es de 0.054% y es calculada sobre el saldo del préstamo. Aplicado sobre construcciones más no terrenos. Otro seguro es el de desgravámen, su costo promedio es 0.096% si es para el titular más el cónyuge y de 0.054% si es sólo para el solicitante. Cabe señalar que los parámetros y métodos para trabajar el Crédito Hipotecario son los mismos que utilizan para la elaboración de la tabla de amortización de créditos tradicionales.

**Opciones:**

Valor del inmueble, representa el valor de adquisición del bien, es el monto a financiar por el Banco, fijado por acuerdo de las partes. Usualmente el banco financia el 70% u 80% de dicho valor.

Detalles. Debe especificarse del monto a financiar que porcentaje corresponde a las construcciones y cual a los terrenos, por cuanto el seguro del inmueble es aplicado únicamente sobre el valor de las construcciones. El seguro de desgravámen, sin embargo, es aplicado sobre el monto total a financiar, es decir, sobre el valor de las construcciones y el valor del terreno.

Seguro Inmueble. Es el que cubre las construcciones contra todo tipo de riesgos.

Seguro de Desgravámen. Efectivo al fallecer el titular, el seguro permite la exoneración del pago del resto del préstamo al cónyuge del fallecido.

## 8.2. Préstamos personales

El Préstamo Personal**.** Es aquel en el que el prestamista otorga fondos a ser cobrados en plazos establecidos en un contrato de préstamo, a una tasa que al día de hoy puede ser conocido (tipo fijo) o desconocido (interés variable). Estos fondos son de libre disponibilidad del prestatario. Otorgados exclusivamente contra garantías personales del solicitante. El riesgo asignado por las entidades financieras a este tipo de préstamo, es superior al de los préstamos hipotecarios, lo cual repercute indudablemente en su tasa de interés.

### 8.2.1. Tipos de Préstamos Personales

Es la misma que la indicada en el punto 5 del presente libro.

1º. Según el tipo de interés distinguimos tres clases de préstamos personales:

a. De interés fijo
b. De interés variable
c. De interés mixto

2º. De acuerdo al concepto de carencia distinguimos dos clases de préstamos:

a. Préstamos personales sin carencia
b. Préstamos personales con carencia

3º. La tercera clasificación tiene su base en las diferentes modalidades de cuota:

a. De cuota constante
b. De cuota fija
c. De cuota creciente
d. De cuota decreciente

4º. La cuarta clasificación tiene su base en la diferente periodicidad de la cuota. En función del pago de la cuota se pueden distinguir varios tipos:

a. Mensuales (la más común)

b. Trimestrales (poco usada)

c. Semestrales (raramente usada)

d. Anuales (Existe como opción, no es de uso común, significa fuertes desembolsos).

## 8.2.2. Características

**A) Límite máximo**

Para el cálculo de la financiación máxima, las entidades siguen dos criterios:

La solvencia del prestatario. La entidad recaba información sobre la situación patrimonial del prestatario, boletas de pago, ingresos, etc., para asegurarse el pago de las cuotas.

Estipulan un máximo para el producto. La entidad, a la hora de comercializar el producto, e independientemente del riesgo del usuario, establece la cantidad máxima del préstamo.

**B) Riesgo de crédito o impago**

Como ya señalamos al inicio, estos fondos pueden ser usados para cualquier fin. Como garantía, el préstamo se sustenta en la garantía personal del prestatario. A efectos de poder cuantificar el riesgo asumido, la entidad recurre a una gran cantidad de información; obliga al prestatario a contratar seguros (como por ejemplo, seguros de vida).

**C) Tipo de interés**

Como especificamos en los puntos anteriores, los préstamos pueden ser a tipo de interés fijo o referenciado a un índice. Los préstamos a tipo fijo tienen expresado el mismo en el contrato y es conocido desde el inicio, mientras que los referenciados a índice sólo tienen establecido en el contrato el indicador a utilizar sobre ellos, pero su evolución es desconocida y depende del mercado.

**D) Comisiones y gastos asociados**

Las comisiones que detallamos a continuación son aplicables a todas las modalidades de préstamos personales:

1. Apertura. Porcentaje sobre el total concedido. Generados para cubrir los gastos de tramitación del préstamo. Normalmente lleva asociado una cuantía mínima. Aplicado al inicio del préstamo y cobrado una sola vez.

2. Estudio. Porcentaje sobre el total concedido. Generado para cubrir los gastos de estudio del préstamo. Aplicado al inicio del préstamo y cobrado una sola vez.

3. Amortización y pagos anticipados. Aplicable únicamente sobre el capital pagado con anticipación y existe únicamente si el hecho es llevado a cabo. Sirve para compensar a las entidades por la pérdida de beneficios que supone el pago anticipado a voluntad del prestatario. En los préstamos variables hay un máximo legal. En cambio, en los préstamos fijos, salvo en el caso de subrogación, no existe máximo establecido, debido, en gran parte, al mayor riesgo asociado.

## 8.3. Riesgo de interés

El riesgo depende de las características del préstamo. El préstamo a tipo fijo tiene un porcentaje de riesgo diferente a un tipo variable. Distinguimos 2 situaciones:

1. **Subida de los tipos de interés**: Los préstamos de tipo variable perjudican al prestatario por el incremento de los intereses, contrariamente lo benefician los préstamos de tipo fijo, las cuotas permanecen constantes. Algunas entidades ofrecen préstamos a tipo variable con un límite máximo en el tipo de interés (a través de una cláusula que limitaría la posible pérdida al prestatario).

2. **Bajada de los tipos de interés:** Es la situación inversa. Los préstamos de tipo variable benefician al prestatario por la baja de los intereses, contrariamente lo perjudican los préstamos a tipo fijo, las cuotas permanecen constantes.

Desde el punto de vista de la entidad, tiene más riesgo prestar a tipo fijo que a tipo variable, por ésta razón las entidades financieras suelen asociar comisiones más altas a estos préstamos y así traspasar la demanda de préstamos a aquellos referenciados a tipos variables. Por esa misma razón, el plazo máximo para fijos es menor que el de los variables. En los préstamos a tipo fijo, la comisión suele ser alta, para que el usuario no pague el préstamo ante cualquier bajada en los tipos de interés.

## 9. Valoración de los préstamos

Significa calcular el valor actual del mismo, en cualquier momento de vigencia del crédito. En cuanto a bonos, letras, etc. es determinar el precio de venta al cual el tenedor de la obligación estaría dispuesto a venderlo.

El valor del préstamo varía a lo largo de la vida de la operación, dependiendo fundamentalmente de su saldo vivo y del tipo de interés vigente en el mercado para operaciones similares.

**La regla que cumple es la siguiente:**

a) Si las tasas para préstamos similares son superiores, su valor será inferior al importe de su saldo vivo.

b) Si las tasas de mercado son inferiores, su valor será superior al importe de su saldo vivo.

**¿A qué responde esta relación?**

Si las tasas de mercado son superiores a los del préstamo, la entidad financiera obtiene un costo de oportunidad, por cuanto podría obtener la misma cuota periódica otorgando menos dinero.

Si las tasas de mercado fueran inferiores a los del préstamo, la entidad financiera estaría obteniendo una rentabilidad más elevada que la que podría obtener concediendo monto similar en las nuevas condiciones de mercado.

**¿Cómo calculamos el valor de los préstamos?**

Actualizando al momento de la valorización todas las cuotas periódicas pendientes de vencimiento, al tipo de interés de mercado en ese momento para montos similares.

**EJEMPLO 184 (Evaluando un préstamo MYPE)**

Una MYPE obtiene un préstamo de UM 60,000 para su pago en 6 años, con tipo de interés fijo del 27% y con amortización del principal constante. La estructura del préstamo es como sigue:

$$\textbf{AMORT.} = \frac{60{,}000}{6} = \text{UM } 10{,}000$$

| AÑOS | SALDO INICIAL | INTERÉS | AMORTZ | PAGO | SALDO FINAL |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | 60,000.00 |
| 1 | 60,000.00 | 16,200.00 | 10,000.00 | 26,200.00 | 50,000.00 |
| 2 | 50,000.00 | 13,500.00 | 10,000.00 | 23,500.00 | 40,000.00 |
| 3 | 40,000.00 | 10,800.00 | 10,000.00 | 20,800.00 | 30,000.00 |
| 4 | 30,000.00 | 8,100.00 | 10,000.00 | 18,100.00 | 20,000.00 |
| 5 | 20,000.00 | 5,400.00 | 10,000.00 | 15,400.00 | 10,000.00 |
| 6 | 10,000.00 | 2,700.00 | 10,000.00 | 12,700.00 | 0.00 |

Conociendo el valor del saldo al final del tercer año de UM 30,000 y sí la tasa de mercado para préstamos similares fuera en ese momento del 30% determinar:

A) El valor actual al final del año 3 de todas las cuotas pendientes de pago:

1º Aplicando sucesivamente la fórmula [21] o la función VNA (omitiendo en este caso la sustracción del valor del préstamo):

[21] $\boldsymbol{VA_3} = \frac{18,100}{1.30^1} + \frac{15,400}{1.30^2} + \frac{12,700}{1.30^3}$

$\boldsymbol{VA_3}$ = UM 28,816.11

**Sintaxis**

**VNA**(**tasa**;**valor1**;valor2; ...)

| **Tasa** | **1** | **2** | **3** | **VAN** |
|---|---|---|---|---|
| 0.30 | 18,100 | 15,400 | 12,700 | 28,816.11 |

Como vemos el valor actual del préstamo al final del año 3 es de UM 28,816.11, inferior al saldo final de la tabla (UM 30,000). Esto sucede, porque la tasa de mercado es superior al del préstamo.

B) Considere como tasa de mercado el 18%:

[21] $\boldsymbol{VA_3} = \frac{18,100}{1.18^1} + \frac{15,400}{1.18^2} + \frac{12,700}{1.18^3}$

$\boldsymbol{VA_3}$ = UM 34,128.64

Ahora el valor actual del préstamo es de UM 34,128.64, superior a su saldo vivo. Debido a que la tasa de mercado es inferior al del préstamo.

C) Ahora considere como tasa de mercado el 27%:

[21] $\boldsymbol{VA_3} = \frac{18,100}{1.18^1} + \frac{15,400}{1.18^2} + \frac{12,700}{1.18^3}$

$\boldsymbol{VA_3}$ = UM 30,000

**Sintaxis**

**VNA**(**tasa**;**valor1**;valor2; ...)

| **Tasa** | **1** | **2** | **3** | **VAN** |
|---|---|---|---|---|
| 0.27 | 18,100 | 15,400 | 12,700 | 30,000 |

En este caso el valor al final del tercer año del préstamo coincide con el importe de su saldo vivo, la tasa de interés es exactamente igual al del préstamo.

# EJERCICIOS DESARROLLADOS

**Ejercicio 185 (Compra de Camión con pago en cuotas)**

Una empresa que extrae madera de la selva amazónica compra un camión, para su pago en 10 cuotas semestrales iguales de UM 30,000 cada una a una tasa del 8% anual.

a) ¿Cuánto costará el camión dentro de 5 años?

b) ¿Cuánto cuesta el camión hoy?

**Solución: (a) (i = 0.08/2 = 0.04)**

C = 30,000; i = 0.04; n = 10; VF = ?

1º Calculamos el valor del camión dentro de cinco años (10 semestres), aplicando indistintamente la fórmula (27) o la función PAGO:

$$[27]\quad \boldsymbol{VF} = 30{,}000\left\langle\frac{1.04^{10}-1}{0.04}\right\rangle = \text{ UM } 360{,}183$$

**Sintaxis**

**VF**(**tasa**;**nper**;**pago**;va;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VA | Tipo | VF |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.04 | 10 | -30,000 | | | 360,183.21 |

**Solución**: (b)

C = 30,000; i = 0.04; n = 10; VA = ?

2º Calculamos el valor del camión hoy, aplicando indistintamente la fórmula (24) o la función VA:

$$[24]\quad \boldsymbol{VA} = 30{,}000\left\langle\frac{1.04^{10}-1}{0.04*1.04^{10}}\right\rangle = \text{ UM } 243{,}326.87$$

**Sintaxis**

**VA**(**tasa**;**nper**;**pago**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VF | Tipo | VA |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.04 | 10 | -30,000 | | | 243,326.87 |

**Respuesta**:
a) ¿Cuánto costará el camión dentro de 5 años?: Costará UM 360,183.21
b) ¿Cuánto cuesta el camión hoy?: Al día de hoy el camión cuesta UM 243,326.87

**Ejercicio 186 (Préstamo con distintos tipos de interés)**

Un pequeño empresario accede a una línea de crédito, pagadera en 6 cuotas uniformes, el monto es de UM 80,000 con 15% en los 2 primeros años, 18% en el 3º y 4º año y 22% en los 2 últimos años. Determinar el valor de cada cuota por tramos y elaborar la tabla de amortización.

**Solución**:

VA = 80,000; n = 6 $_{(2,\,3\text{ y }4,\,5\text{ y }6)}$; $i_{1\text{-}2} = 0.15$; $i_{3\text{-}4} = 0.18$; $i_{5\text{-}6} = 0.22$

1º Calculamos las cuotas de los dos primeros años:

VA = 80,000; n = 6; i = 0.15.

$$[25]\quad \boldsymbol{C} = 50{,}000\left\langle\frac{0.15*1.15^{6}}{1.15^{6}-1}\right\rangle = \text{ UM } 21{,}138.95$$

**Sintaxis**

**PAGO**(**tasa**;**nper**;**va**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | VA | VF | Tipo | PAGO |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.15 | 6 | -80,000 | | | 21,138.95 |

2º Con la cuota calculada, elaboramos la TABLA DE AMORTIZACION en la que establecemos los saldos por tramos según tipo de interés:

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **AÑOS** | **SALDO INICIAL** | **INTERÉS** | **AMORTZ** | **PAGO** | **SALDO FINAL** |
| 2 | 0 | | | | | **80,000.00** |
| 3 | 1 | 80,000 | 12,000 | 9,139 | 21,138.95 | 70,861.05 |
| 4 | 2 | 70,861 | 10,629 | 10,510 | 21,138.95 | **60,351.25** |
| 5 | 3 | 60,351 | 10,863 | 11,572 | 22,434.89 | 48,779.58 |
| 6 | 4 | 48,780 | 8,780 | 13,655 | 22,434.89 | **35,125.01** |
| 7 | 5 | 35,125 | 7,728 | 15,822 | 23,549.58 | 19,302.94 |
| 8 | 6 | 19,303 | 4,247 | 19,303 | 23,549.58 | 0.00 |

Interés = Saldo Inicial*$\boldsymbol{i}$

PAGO = FORMULA (25) o FUNCION PAGO

AMORTIZACION = pago - interés

Seguidamente calculamos las cuotas del tercer, cuarto y dos últimos años, con los saldos pendientes de pago en cada caso:

VA = 60,351.25; n = (6 - 2) = 4; i = 0.18

**Sintaxis**

**PAGO**(**tasa**;**nper**;**va**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | VA | VF | Tipo | PAGO |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.18 | 4 | -60,351.25 | | | 22,434.89 |

Cuotas de los dos últimos años:

VA = 35,125.01; n = (6 - 4) = 2; i = 0.22

**Sintaxis**

**PAGO**(**tasa**;**nper**;**va**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | VA | VF | Tipo | PAGO |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.22 | 2 | -35,125.01 | | | 23,549.58 |

**Respuesta**:

Las cuotas para los dos primeros años es UM 21,138.95
Las cuotas para el tercer y cuarto año es UM 22,434.89
Las cuotas para los dos últimos años es UM 23,549.58

**Ejercicio 187 (Préstamo para la compra de un automóvil)**

Un pequeño empresario obtiene en préstamo UM 12,000 para comprarse un automóvil, considera la liquidación en pagos trimestrales durante dos años. Determinar el monto que tendrá que pagar al final del octavo trimestre si paga UM 2,500 al final del primer trimestre. Asumimos una tasa de interés del 24% anual.

**Solución**:

VA = 12,000; n = 8; i = (0.24/4) = 0.06; $C_{1º\ TRIMESTRE}$ = 2,500; VF = ?

Aplicando la fórmula [19] y la función VF de Excel tenemos:

Final trimestre 1 : $VF = 12{,}000(1.06)^{1} - 2{,}500 \quad = \text{UM } 10{,}220.00$

Final trimestre 8 : $VF = 10{,}220(1.06)^{8-1} \quad = \text{UM } 15{,}367.10$

**Sintaxis**
**VF**(**tasa**;**nper**;**pago**;va;tipo)

| Trimestre | Tasa | Nper | Pago | VA | Tipo | VF |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.06 | 1 | 2,500 | -12,000 | | 10,220.00 |
| 8 | 0.06 | 7 | | -10,220 | | 15,367.10 |

**Respuesta**: El monto que el empresario tiene que pagar al final del octavo trimestre, es UM 15,367.10.

**Ejercicio 188 (Préstamo con período de carencia o gracia)**

Un préstamo de UM 70,000, a 6 años (2 de ellos de carencia o gracia) y tipo de interés fijo del 27%. Cumplido el período de carencia, el préstamo es con amortización de capital constante. Calcular las cuotas de amortización de toda la vida del préstamo, suponiendo:

a) Período de carencia con pago de intereses

b) Período de carencia total

**Solución**:

VA = 80,000; n = 2 y 4; i = 0.27; AMORT. = ?; C = ?

**a)** Período de carencia con pago de intereses

[8] $\mathbf{I}_1 = 70{,}000*0.27*1 = \text{UM } 18{,}900$

[8] $\mathbf{I}_2 = 70{,}000*0.27*1 = \text{UM } 18{,}900$

A partir del 2º año, el préstamo tiene un desarrollo normal, con amortización de capital constante:

$$\textbf{AMORT.} = \frac{70{,}000}{4} = \text{UM } 17{,}500$$

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Años | SALDO INICIAL | INTERES | AMORT. | PAGO | SALDO FINAL |
| 2 | 0 | | | | | 70,000 |
| 3 | 1 | 70,000 | 18,900 | | 18,900 | 70,000 |
| 4 | 2 | 70,000 | 18,900 | | 18,900 | 70,000 |
| 5 | 3 | 70,000 | 15,400 | 17,500 | 32,900 | 52,500 |
| 6 | 4 | 52,500 | 11,550 | 17,500 | 29,050 | 35,000 |
| 7 | 5 | 35,000 | 7,700 | 17,500 | 25,200 | 17,500 |
| 8 | 6 | 17,500 | 3,850 | 17,500 | 21,350 | 0 |

**PAGO** = Interés + Amortización

**b) Período de carencia total**

Durante los dos primeros años del préstamo no paga intereses, estos son acumulados al importe del principal. Al final de estos 2 años, el importe de los intereses acumulados al principal asciende a UM 112,903; con este saldo en el 3º período obtenemos la Amortización.

| Años | SALDO INICIAL | INTERES | AMORTIZACION | PAGO | SALDO FINAL |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | 70,000 |
| 1 | 70,000 | 18,900 | | | 88,900 |
| 2 | 88,900 | 24,003 | | | 112,903 |
| 3 | 112,903 | 30,484 | 28,226 | 58,710 | 84,677 |
| 4 | 84,677 | 22,863 | 28,226 | 51,089 | 56,452 |
| 5 | 56,452 | 15,242 | 28,226 | 43,468 | 28,226 |
| 6 | 28,226 | 7,621 | 28,226 | 35,847 | 0 |

**Respuesta:**
a) La amortización con períodos de carencia y pago de intereses es UM 17,500
b) La amortización con período de carencia total es UM 28,226

**Ejercicio 189 (Anualidades Vencidas)**

En un SUPERMERCADO con el cual tenemos una TARJETA DE CREDITO, necesitamos adquirir al contado un producto que nos cuesta UM 160. Preguntamos al vendedor ¿cuánto sería la cuota a pagar por este producto en 12 meses? Nos responde que UM 19 mensual.

**Determinar:**
1) La tasa mensual de interés y la tasa efectiva anual.
2) El FRC que aplica el SUPERMERCADO para calcular sus cuotas en 12 meses.
3) Con la tasa mensual calculada en (1) determine el FRC para 18, 24 y 36 meses y la cuota mensual de UM 160 en cada período.
4) El valor futuro de la cuota de UM 19 en 12 meses a la tasa de interés encontrada en (1).
5) Comente los criterios que utiliza el SUPERMERCADO para determinar la tasa de interés de sus créditos.

**Solución: (1)**

VA = 160; C = 19; n = 12; i = ?

1º Calculamos la tasa mensual de interés con la función TASA:

**Sintaxis**
**TASA(nper;pago;va**;vf;tipo;estimar)

| Nper | Pago | VA | VF | TASA |
|---|---|---|---|---|
| 12 | -19 | 160 | | 0.0592 |

2º Calculamos la TEA aplicando la fórmula (43B):

$$[43B] \quad \boldsymbol{TEA} = (1+0.05919)^{12} - 1 = 0.9938$$

**Respuesta (1)**: La tasa mensual es 5.919% y la tasa efectiva anual (TEA) es 99.38%.

**Solución: (2)**

i = 0.05919; n = 12; FRC = ?

Aplicando el factor la fórmula (25) o la función PAGO, obtenemos el factor:

$$\boldsymbol{FRC}_{12}^{0.0519} = \left\langle \frac{0.05919 * 1.05919^{12}}{1.05919^{12} - 1} \right\rangle = 0.1187479$$

**Sintaxis**
**PAGO(tasa;nper;va**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | VA | VF | Tipo | PAGO |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.05919 | 12 | -1 | | | 0.1187479 |

**Respuesta (2)**: El FACTOR DE RECUPERACIÓN DEL CAPITAL (FRC) es 0.1187479 para 12 cuotas.

2º Aplicando este factor al valor contado de la venta tenemos:

160*0.1187479 = UM 19 cuota mensual

**Solución: (3)**

VA = -1; i = 0.05919; n = 18, 24 y 36; FRC = ?

Calculamos el FRC con la función PAGO o con la fórmula [25]; en ambos casos consideramos el VA = -1:

**Sintaxis**

**PAGO**(**tasa**;**nper**;**va**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | VA | VF | Tipo | FRC |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.05919 | 18 | -1 | | | 0.0917956 |
| 0.05919 | 24 | -1 | | | 0.0790836 |
| 0.05919 | 36 | -1 | | | 0.0677359 |

Cuota en 18 meses : 160*0.0917956 = UM 15
Cuota en 24 meses : 160*0.0790836 = UM 13
Cuota en 36 meses : 160*0.0677359 = UM 11

**Solución: (4)**

C = 19; n = 12; i = 0.05919; VF = ?

Calculamos el VF, con la fórmula [27] o con la función VF de Excel:

**Sintaxis**

**VF**(**tasa**;**nper**;**pago**;va;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VA | Tipo | *VF* |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.05919 | 12 | -19 | | | 319.02 |

Con la fórmula [1], calculamos la tasa global del crédito en 12 meses:

$$[1]\quad \boldsymbol{i} = \left\langle \frac{319-160}{160} \right\rangle * 100 = 99.38\%$$

, Resultado que coincide con el encontrado en (1).

**Respuesta (4):** El valor futuro de una cuota de UM 19 en 12 meses es UM 319.02.

**Respuesta (5):** La tasa que cobra el SUPERMERCADO es la tasa de interés corriente **(***ic***),** es decir aquella tasa que considera el efecto de la inflación **(Φ),** el efecto del riesgo (*ip*) y el interés real (*i*).

**Ejercicio 190 (Anualidades pospagables y prepagables)**

Una entidad bancaria desea implementar créditos al sector informal. Para ello, la Gerencia aprueba como plan piloto inicial el programa de financiamiento con plazos de hasta 12 meses. La TEA cobrarda por el financiamiento es del 24%.

**Pedimos**:

a) Una Tabla de Factores que nos permitan calcular el pago periódico mensual vencido que debería efectuar cada cliente por los distintos montos solicitados. Considere una columna adicional que muestre a cuánto ascendería el pago periódico, en el hipotético caso que el préstamo sea por UM 20,000 a pagarse en 6, 9 y 12 meses.
b) Calcular en (a) el VA y VF considerando pagos por adelantado.

c) Suponga que el prestatario es cliente del Banco que pide UM 20,000 en préstamo a pagar al final de cada mes durante 12 meses; luego de haber efectuado 4 pagos, tuvo problemas de liquidez que le impidieron pagar las cuotas 5 y 6. Si el prestatario quisiera ponerse al día con el Banco y pagar en el séptimo mes las cuotas atrasadas, más la que corresponde a ese mes, ¿Cuánto tendría que pagar?. Suponemos que no existen gastos adicionales por mora.

d) Si el prestatario tiene la posibilidad de pagar el saldo de su deuda, luego de haber abonado las 8 primeras ¿cuánto es lo que debería pagar al Banco, teniendo en cuenta que el préstamo solicitado fue por UM 20,000 y que había acordado redimirlo en 12 meses?

**Solución:** (a) Pagos vencidos

VA = 20,000; TEA = 0.24 anual; n = 6, 9 y 12; i = ?; C = ?

1º Como los pagos periódicos que debemos determinar serán mensuales, necesitamos encontrar la tasa mensual, a partir de la TEA del 24%, aplicando directamente la fórmula [43A]:

[43A] $\boldsymbol{i} = \sqrt[12]{1+0.24} - 1 = 0.0180875$

2º Asumiendo un VA = 1, aplicamos sucesivamente la fórmula (25) o la función PAGO y calculamos el factor FRC y la cuota periódica para el número de pagos deseado:

[25] $\boldsymbol{FRC} = \left\langle \frac{\boldsymbol{i}(1+\boldsymbol{i})^{n}}{(1+\boldsymbol{i})^{n} - 1} \right\rangle$

**Sintaxis**
**PAGO(tasa;nper;va;vf;tipo)**

| Tasa | Nper | VA | VF | Tipo | FRC | PRESTAMO | Cuotas Vencidas |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0180875 | 6 | -1 | | | 0.17738 | 20,000 | 3,547.51 |
| 0.0180875 | 9 | -1 | | | 0.12140 | 20,000 | 2,428.00 |
| 0.0180875 | 12 | -1 | | | 0.09345 | 20,000 | 1,869.05 |

Cuota = 20,000*FRC

**Solución:** (b) Anualidades prepagables

VA = 20,000; i = 0.0180875; *C = ?*

A partir de (a) calculamos el VA y VF con pagos anticipados aplicando sucesivamente la fórmula (24) y (27) multiplicando los resultados por (1 + i) o la función VA y VF con tipo =1:

**Sintaxis**
**VA(tasa;nper;pago**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VF | Tipo | VA |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.0180875 | 6 | -3,547.51 | | 1 | 20,000 |
| 0.0180875 | 9 | -2,428.00 | | 1 | 20,000 |
| 0.0180875 | 12 | -1,869.05 | | 1 | 20,000 |

**Sintaxis**
**VF(tasa;nper;pago**;va;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VA | Tipo | VF |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.0180875 | 6 | -3,547.51 | | 1 | 22,673.90 |
| 0.0180875 | 9 | -2,428.00 | | 1 | 23,926.64 |
| 0.0180875 | 12 | -1,869.05 | | 1 | 25,248.56 |

Como vimos en el capítulo 3, el VA o VF es mayor cuando los pagos son anticipados, ya que el VA o VF de las anualidades prepagables es el resultado de actualizar o capitalizar con un periódo más las pospagables.

**Solución:** (c) Anualidades pospagables

VA = 20,000; C = 1,869.05; n = 12; $\boldsymbol{i}$ = 0.0180875; VF5, 6 y 7= ?

1º En la tabla de la solución (a) vemos que a un préstamo de UM 20,000 a pagar en 12 meses, le corresponde pagos periódico de UM 1,869.05, al interés mensual de 0.01880875. Con estos datos elaboramos el cuadro siguiente:

| Meses | SALDO INICIAL | INTERES 0.0180875 | AMORT. | PAGO | SALDO FINAL |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | 20,000.00 |
| 1 | 20,000.00 | 361.75 | 1,507.30 | 1,869.05 | 18,492.70 |
| 2 | 18,492.70 | 334.49 | 1,534.56 | 1,869.05 | 16,958.14 |
| 3 | 16,958.14 | 306.73 | 1,562.32 | 1,869.05 | 15,395.82 |
| 4 | 15,395.82 | 278.47 | 1,590.58 | 1,869.05 | 13,805.24 |
| 5 | 13,805.24 | 249.70 | 1,619.35 | 1,869.05 | 12,185.90 |
| 6 | 12,185.90 | 220.41 | 1,648.64 | 1,869.05 | 10,537.26 |
| 7 | 10,537.26 | 190.59 | 1,678.46 | 1,869.05 | 8,858.80 |
| 8 | 8,858.80 | 160.23 | 1,708.82 | 1,869.05 | 7,149.99 |
| 9 | 7,149.99 | 129.33 | 1,739.72 | 1,869.05 | 5,410.26 |
| 10 | 5,410.26 | 97.86 | 1,771.19 | 1,869.05 | 3,639.07 |
| 11 | 3,639.07 | 65.82 | 1,803.23 | 1,869.05 | 1,835.84 |
| 12 | 1,835.84 | 33.21 | 1,835.84 | 1,869.05 | 0.00 |

2º Habiéndose el prestatario atrasado en dos cuotas, deberá pagar al finalizar el 7º mes (para ponerse al día) tres cuotas. No es una reestructuración de los pagos, el valor de las cuotas uniformes y los saldos continúan invariables. Luego, procedemos a calcular el VF de las cuotas 5º, 6º y 7º, para determinar el monto que tiene que pagar al final del sétimo mes:

$$[27] \quad \boldsymbol{VF} = 1{,}869.05\left\langle\frac{1.0180875^{12}-1}{0.0180875}\right\rangle = \text{ UM } 5{,}709.18$$

**Sintaxis**
**VF**(**tasa**;**nper**;**pago**;va;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VA | VF |
|---|---|---|---|---|
| 0.018088 | 3 | -1,869.05 | | 5,709.18 |

**<u>Solución</u>: (d)** Pagos vencidos

C = 1,869.05;   n = 12;   $\boldsymbol{i}$ = 0.0180875;   VA = ?

1º En la solución (a), tenemos que al préstamo de UM 20,000 a liquidar en 12 cuotas vencidas, le corresponde pagos periódicos de UM 1,869.05, al 0.0180875 de tasa periódica mensual. Las cuotas pendientes de pago son 4 (12-8) y debemos actualizarlas a fines del octavo mes:

$$[24] \quad \boldsymbol{VA} = 1{,}869.05\left\langle\frac{1.0180875^{4}-1}{0.0180875*1.0180875^{4}}\right\rangle = \text{ UM } 7{,}149.99$$

**Sintaxis**
**VA**(**tasa**;**nper**;**pago**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VF | VA |
|---|---|---|---|---|
| 0.0180875 | 4 | -1,869.05 | | 7,149.99 |

Finalmente, el prestatario deberá pagar al Banco al finalizar el octavo mes, por las 4 cuotas pendientes la suma de UM 7,149.99, tal como mostramos en los resultados anteriores.

**<u>Ejercicio 191</u> (Anualidades pospagables)**

Un pequeño empresario solicita UM 20,000 en préstamo para su pago en 12 cuotas mensuales iguales, con una TEA del 32%. Si el cliente cuando está próximo a pagar la cuarta cuota realiza un prepago por UM 4,000. ¿A cuánto ascenderá el monto de las nuevas cuotas para reducir únicamente el importe de las cuotas restantes y no el plazo de pago del préstamo? Considere UM 5 de portes mensuales.

**Solución:**

VA = 20,000; n = 12; TEA = 0.32; Portes = 5; $i$ = ?; C = ?

1º Como los pagos periódicos (C) que debemos determinar serán mensuales, necesitamos encontrar una tasa efectiva mensual, a partir de la TEA del 32%, utilizando la fórmula [43A]:

$$[43A] \quad i = \sqrt[12]{1+0.32} - 1 = 0.0234 \text{ mensual}$$

2º Con esta tasa de interés aplicando indistintamente la fórmula (25) o la función PAGO, calculamos el valor de cada una de las 12 cuotas:

**Sintaxis**

**PAGO**(**tasa**;**nper**;**va**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | VA | VF | Tipo | PAGO |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.0234 | 12 | -20,000 | | | 1,931.02 |

3º Con esta cuota elaboramos el cuadro de servicio de la deuda:

| $n$ | SALDO INICIAL | INTERES | PORTES | AMORT. | PAGO | TOTAL PAGO | SALDO FINAL |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | | 20,000.00 |
| 1 | 20,000.00 | 468.20 | 5.00 | 1,462.82 | 1,931.02 | 1,936.02 | 18,537.18 |
| 2 | 18,537.18 | 433.96 | 5.00 | 1,497.06 | 1,931.02 | 1,936.02 | 17,040.12 |
| 3 | 17,040.12 | 398.91 | 5.00 | 1,532.11 | 1,931.02 | 1,936.02 | 15,508.00 |
| 4 | 15,508.00 | 363.04 | 5.00 | 1,567.98 | 1,931.02 | 1,936.02 | 13,940.03 |
| 5 | 13,940.03 | 326.34 | 5.00 | 1,604.68 | 1,931.02 | 1,936.02 | 12,335.34 |
| 6 | 12,335.34 | 288.77 | 5.00 | 1,642.25 | 1,931.02 | 1,936.02 | 10,693.09 |
| 7 | 10,693.09 | 250.33 | 5.00 | 1,680.69 | 1,931.02 | 1,936.02 | 9,012.40 |
| 8 | 9,012.40 | 210.98 | 5.00 | 1,720.04 | 1,931.02 | 1,936.02 | 7,292.36 |
| 9 | 7,292.36 | 170.71 | 5.00 | 1,760.31 | 1,931.02 | 1,936.02 | 5,532.05 |
| 10 | 5,532.05 | 129.51 | 5.00 | 1,801.51 | 1,931.02 | 1,936.02 | 3,730.54 |
| 11 | 3,730.54 | 87.33 | 5.00 | 1,843.69 | 1,931.02 | 1,936.02 | 1,886.85 |
| 12 | 1,886.85 | 44.17 | 5.00 | 1,886.85 | 1,931.02 | 1,936.02 | 0.00 |

En la tabla vemos que la deuda, luego de haber pagado la tercera cuota es de UM 15,508, y con el prepago de UM 4,000 queda reducido a UM 11,508.

VA = 11,508(15,508 - 4,000); n = 8; 0.0234; Portes = 5; C = ?

Obviamente, las cuotas pendientes (C) serán menores. Las cuales pasamos a recalcularlas, aplicando la función financiera PAGO, también podemos calcular las cuotas con la fórmula [25]:

**Sintaxis**

**PAGO**(**tasa**;**nper**;**va**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | VA | VF | Tipo | PAGO |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.0234 | 8 | -11,508.00 | | | 1,594.13 |

Finalmente, a partir del quinto mes hasta fines del mes 12 las cuotas serían de UM 1,594.13 cada una.

Por lo general los bancos cobran adicionalmente una comisión sobre el monto pre - pago.

**Ejercicio 192 (Descuento Bancario)**

Un empresario solicita al Banco UM 80,000 contra un pagaré a 90 días. La TEA vigente en el mercado es del 22% y los intereses son cobrados por adelantado.

a) Si el empresario recién paga su préstamo a los 16 días de haber transcurrido el vencimiento. ¿Cuánto pagará en total si sabemos que el interés compensatorio es del 21.5%, el interés moratorio de 4.5% y portes UM 2? Los gastos por concepto de comisiones de protesto ascienden a UM 70 y los gastos notariales a UM 20.

b) Resolver el problema anterior suponiendo que el empresario depués de 16 días de vencido el préstamo, decide amortizar sólo el 40% y pagar el saldo luego de 30 días, contados desde el vencimiento inicial de la deuda. ¿Cuánto es lo que pagaría en este caso?. Los intereses son pagados por adelantado.

**Solución: (a)**

VA = 80,000; n = (90/30) = 3; TEA = 0.22; i = ?; D = ?

1º Para calcular la tasa del período a partir de la TEA, aplicamos la fórmula (43A):

$[43A] \quad \boldsymbol{i} = \sqrt[12]{1+0.22} - 1 = 0.0167 \text{ mensual}$

2º Con la fórmula (20) calculamos el importe de los intereses de 3 meses, cobrados por adelantado:

$[20] \quad \boldsymbol{I} = 80{,}000\left\langle\left(1.0167^{3}\right)-1\right\rangle = \text{UM } 4{,}075.31$

Importe a recibir hoy**:** 80,000 - 4,075.31 **=** UM 75,924.69

Es decir, que el día de hoy (período cero) recibimos únicamente UM 75,924.69 descontado los intereses.

3º Establecemos los días de atraso en el pago, en este caso es de 16 días, para calcular los intereses moratorios e intereses compensatorios, obviamente pagamos al final de los 16 días, el día 106; juntamente con las comisiones, gastos notariales y portes.

VA = 80,000; n = 16; TEAMORATORIO = 0.045; $\text{TEA}_{\text{COMPENS}}$ = 0.215;

Calculamos el interés diario compensatorio y moratorio con la fórmula (43A):

$[43A] \quad \boldsymbol{i}_{\text{MORATORIO}} = \sqrt[12]{1+0.045} - 1 = 0.0037 / 30 = 0.0001222 \text{ diario}$

$[43A] \quad \boldsymbol{i}_{\text{COMPENSATORIO}} = \sqrt[12]{1+0.215} - 1 = 0.0164 / 30 = 0.0005411 \text{ diario}$

Luego determinamos los importes de los intereses moratorio y compensatorio:

$[20] \quad \boldsymbol{I}_{\text{MORATORIO}} = 80{,}000 \left\langle(1+0.0001222)^{16}-1\right\rangle = \text{ UM } 156.56$

$[20] \quad \boldsymbol{I}_{\text{COMPENSATORIO}} = 80{,}000 \left\langle(1+0.0005411)^{16}-1\right\rangle = \text{ UM } 695.43$

4º Finalmente calculamos el total a pagar a los 16 días (Consideramos los gastos por concepto de comisiones, gastos notariales y portes):

| Días | Pagaré al inicio | Pago de Principal | Interés Adelantado | Int. Moratorio | Int. Compens. | Cms. Gg. Not. Portes | Pago Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 80,000 | | 4,075.31 | | | | 4,075.31 |
| 106 | 80,000 | 80,000 | | 156.56 | 695.43 | 92.00 | 80,943.99 |
| | | | | | | | |

**Respuesta:** El monto que paga el día 106 es UM 80,943.99, incluye los intereses compensatorios, moratorios y portes.

**Solución**: **(b)** Los pasos son los mismos de (a)

VA = (80,000 - 40%) = 48,000; n = 30 días; i = 0.0167/30 = 0.00046

1º A partir del día 106, calculamos los intereses por renovación (los intereses los pagamos por adelantado). Debemos tomar en cuenta los días de atraso (16 días), así como el tiempo para el siguiente pago, que cuenta a partir de la fecha de vencimiento (90 días).

$[20] \quad \boldsymbol{I} = 48{,}000\left\langle\left(1.00046^{30}\right)-1\right\rangle = \text{UM } 666.84$

| Días | Pagaré al inicio | Pago de Principal | Interés Adelantado | Int. Moratorio | Int. Compens. | Cms. Gg. Not. Portes | Pago Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 80,000 | | 4,075.31 | | | | 4,075.31 |
| 106 | 80,000 | 32,000 | 666.84 | 156.56 | 695.43 | 92.00 | 32,943.99 |
| 120 | 80,000 | 48,000 | | | | | 48,000.00 |

**Respuesta:** El día 106 paga UM 32,943.99, que incluye los intereses de los UM 48,000 a pagar a los 30 días más los intereses compensatorios, moratorios y portes originados por el retraso de los 16 días.

**Comentario:** Cuando los pagos los hace el prestamista en forma regular de acuerdo al cronograma establecido, carecen de razón los intereses moratorios, compensatorios y otros gastos derivados por la morosidad en los pagos.

**Ejercicio 193 (Descuento Bancario - Pago con retraso)**

Un empresario solicita al banco UM 18,000 contra un pagaré a 30 días. Si la tasa de interés vigente en el mercado es de 24.38% anual y los intereses son cobrados al vencimiento. Sí paga 6 días despúes de la fecha de vencimiento, determinar el monto deudor total.

Asuma que el interés compensatorio es 48.65% y el interés moratorio es 16.74%. Además, tenga en cuenta que sólo amortiza UM 3,600 y que el banco cobra una comisión de renovación de UM 30 y UM 15 por concepto de portes. El prestatario conviene con su banco en pagar el saldo luego de 30 días, contados desde el vencimiento inicial de la obligación.

**Solución:** (a)

VA = 18,000; n = 30 y n =6; TEA = 0.2438; TEAMORAT=0.1674; TEACOMP= 0.4865

1º Calculamos los intereses periódicos vigente en el mercado, moratorio y compensatorio con la fórmula:

$$[43A]\quad \boldsymbol{i}_{\text{VIG. MERCADO}} = \sqrt[12]{1+0.2438} - 1 = 0.007298882 / 30 = 0.000243296 \text{ diario}$$

$$[43A]\quad \boldsymbol{i}_{\text{MORATORIO}} = \sqrt[12]{1+0.1674} - 1 = 0.0129818 / 30 = 0.00043273 \text{ diario}$$

$$[43A]\quad \boldsymbol{i}_{\text{COMPENSATORIO}} = \sqrt[12]{1+0.4865} - 1 = 0.013301838 / 30 = 0.000443395 \text{ diario}$$

2º Calculamos los intereses del período por renovación y compensatorios; con la fórmula [20].

$$[20]\quad \boldsymbol{I}_{\text{POR RENOVACION}} = 18{,}000\left\langle(1+0.000243296)^{36}\right\rangle\text{-}1= \text{ UM } 158.33$$

$$[20]\quad \boldsymbol{I}_{\text{MORATORIO}} = 18{,}000\left\langle(1+0.00043273)^{6}\right\rangle\text{-}1= \text{ UM } 46.79$$

$$[20]\quad \boldsymbol{I}_{\text{COMPENSATORIO}} = 18{,}000\left\langle(1+0.00111957)^{6}\right\rangle\text{-}1= \text{ UM } 121.25$$

3º Con los resultados obtenidos y los datos del problema referente al abono, a gastos y comisiones, elaboramos el flujo bancario.

Debemos considerar los días de atraso (6 días) así como el tiempo a efectuarse el siguiente pago, el cual lo contaremos a partir de la fecha de vencimiento (30 días) en este caso.

| Días | Prést. | Pago Princip | Int. | Int. Comp | Int. Morat | Gastos | Pago Total | Prést Final | Próximo Pago |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 18,000 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 18,000 | 30 |
| 36 | 18,000 | 3,600 | 158.33 | 121.25 | 46.79 | 45.00 | 3,971.37 | 14,400 | 36 |

**Respuesta**: Al sexto día de la fecha de vencimiento el empresario, paga al banco la suma de UM 3,791.37, por concepto de amortización del principal (UM 3,600), intereses, gastos y comisiones. El préstamo final es: 18,000 - 3,600 = 14,400.

**Ejercicio 194 (Pandero de trabajadores)**

Los empleados de una prestigiosa empresa, deciden juntarse, con la finalidad de acumular UM 10,000 cada uno para afrontar gastos de la casa, vacaciones, etc. Todos acuerdan aportar una cantidad fija, durante 12 meses abonado a fines de mes, percibiendo por estos depósitos el 1.8% de interés mensual, que paga el Banco por depósitos en ahorro.

a) Elabore una Tabla que indique el pago periódico que habría que efectuar en función del número de cuotas en que desee pagar su pandero hasta que haya acumulado los UM 10,000 requeridos.

b) Con la misma información del caso, elabore una Tabla de Factores, suponiendo que los pagos periódicos son por adelantado.

**Solución**: (a) Anualidades pospagables

VF = 10,000; n = 12; i = 0.018; C = ?

1º Calculamos el valor de cada cuota una de las 12 cuotas, con la fórmula [29] o la función PAGO:

[29] $\mathbf{C} = 10{,}000\left\langle\frac{0.018}{1.018^{12}-1}\right\rangle = \text{UM } 754.02$

**Sintaxis**

**PAGO(tasa;nper;va;**vf;tipo)

| Tasa | Nper | VA | VF | Tipo | PAGO |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.018 | 12 | | -10,000 | | 754.02 |

2º Luego, elaboramos la TABLA que nos proporciona el valor de las cuotas para diferentes períodos:

**Sintaxis**

**PAGO(tasa;nper;va;vf;tipo)**

| Tasa | Nper | VA | VF | Tipo | FDFA | MONTO | Cuota |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.018 | 1 | | -1 | | 1.00000 | 10,000 | 10,000.00 |
| 0.018 | 2 | | -1 | | 0.49554 | 10,000 | 4,955.40 |
| 0.018 | 3 | | -1 | | 0.32740 | 10,000 | 3,274.05 |
| 0.018 | 4 | | -1 | | 0.24335 | 10,000 | 2,433.50 |
| 0.018 | 5 | | -1 | | 0.19293 | 10,000 | 1,929.28 |
| 0.018 | 6 | | -1 | | 0.15932 | 10,000 | 1,593.23 |
| 0.018 | 7 | | -1 | | 0.13533 | 10,000 | 1,353.26 |
| 0.018 | 8 | | -1 | | 0.11734 | 10,000 | 1,173.36 |
| 0.018 | 9 | | -1 | | 0.10335 | 10,000 | 1,033.49 |
| 0.018 | 10 | | -1 | | 0.09216 | 10,000 | 921.65 |
| 0.018 | 11 | | -1 | | 0.08302 | 10,000 | 830.19 |
| 0.018 | 12 | | -1 | | 0.07540 | 10,000 | 754.02 |

Cuota = 10,000*FDFA Tipo = 0, para anualidades vencidas

**Solución**: **(b)** Anualidades prepagables

VF = 10,000; n = 12; Tipo = 1; i = 0.018; VF = ?

**Sintaxis**
**PAGO(tasa;nper;va;vf;tipo)**

| Tasa | Nper | VA | VF | Tipo | FDFA | MONTO | Cuota |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.018 | 1 | | -1 | 1 | 0.98232 | 10,000 | 9,823.18 |
| 0.018 | 2 | | -1 | 1 | 0.48678 | 10,000 | 4,867.78 |
| 0.018 | 3 | | -1 | 1 | 0.32162 | 10,000 | 3,216.16 |
| 0.018 | 4 | | -1 | 1 | 0.23905 | 10,000 | 2,390.47 |
| 0.018 | 5 | | -1 | 1 | 0.18952 | 10,000 | 1,895.17 |
| 0.018 | 6 | | -1 | 1 | 0.15651 | 10,000 | 1,565.06 |
| 0.018 | 7 | | -1 | 1 | 0.13293 | 10,000 | 1,329.34 |
| 0.018 | 8 | | -1 | 1 | 0.11526 | 10,000 | 1,152.61 |
| 0.018 | 9 | | -1 | 1 | 0.10152 | 10,000 | 1,015.21 |
| 0.018 | 10 | | -1 | 1 | 0.09054 | 10,000 | 905.35 |
| 0.018 | 11 | | -1 | 1 | 0.08155 | 10,000 | 815.51 |
| 0.018 | 12 | | -1 | 1 | 0.07407 | 10,000 | 740.69 |

Cuota = 10,000*FDFA Tipo = 1, para anualidades anticipadas

Como vemos, si alguien quisiera pagar su pandero en 12 meses tendría que abonar UM 740.69 mensuales por adelantado.

**Ejercicio 195 (Refinanciamiento de préstamo)**

El dueño de una empresa solicita un préstamo para la adquisición de activos fijos por UM 150,000 para pagarlo en 24 cuotas iguales, pactándose una TEA del 18.5%. Supongamos que después de haber pagado 10 cuotas, la empresa solicita el refinanciamiento de la deuda vigente; el prestamista acepta y le otorga 24 meses manteniendo la misma tasa de interés.

**Solución**:

VA = 150,000; TEA = 0.185; n = 24; C = ?

1º A partir de la TEA, calculamos la tasa del período:

[43A] $\boldsymbol{i} = \sqrt[12]{1+0.185} - 1 = 0.014245748$ mensual

2º Elaboramos el CRONOGRAMA DE PAGOS, la cuota la calculamos indistintamente con la fórmula [25], la función PAGO o con la herramienta Buscar Objetivo, como es nuestro caso:

| MESES | SALDO INICIAL | INTERES | AMORT | PAGO | SALDO FINAL |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | 150,000.00 |
| 1 | 150,000.00 | 2,136.24 | 5,286.58 | 7,422.82 | 144,713.42 |
| 2 | 144,713.42 | 2,060.95 | 5,361.87 | 7,422.82 | 139,351.55 |
| 7 | 117,129.49 | 1,668.11 | 5,754.71 | 7,422.82 | 111,374.78 |
| 8 | 111,374.78 | 1,586.16 | 5,836.67 | 7,422.82 | 105,538.11 |
| 9 | 105,538.11 | 1,503.03 | 5,919.79 | 7,422.82 | 99,618.32 |
| 10 | 99,618.32 | 1,418.72 | 6,004.10 | 7,422.82 | 93,614.22 |
| 11 | 93,614.22 | 1,333.22 | 6,089.61 | 7,422.82 | 87,524.62 |
| 24 | 7,318.59 | 104.23 | 7,318.59 | 7,422.82 | 0.00 |

Como el saldo después de pagar la décima cuota es UM 93,614.22 y el plazo para pagar las 14 cuotas restantes son ampliadas a 24. A partir de éste saldo, para recalcularlas procedemos en forma similar a la metodología utilizada en la elaboración de la tabla anterior.

| MESES | SALDO INICIAL | INTERES | AMORT. | PAGO | SALDO FINAL |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | 93,614.22 |
| 1 | 93,614.22 | 1,333.22 | 3,299.33 | 4,632.54 | 90,314.89 |
| 2 | 90,314.89 | 1,286.23 | 3,346.32 | 4,632.54 | 86,968.58 |
| 3 | 86,968.58 | 1,238.57 | 3,393.97 | 4,632.54 | 83,574.60 |
| 4 | 83,574.60 | 1,190.24 | 3,442.31 | 4,632.54 | 80,132.29 |
| 5 | 80,132.29 | 1,141.21 | 3,491.33 | 4,632.54 | 76,640.96 |
| 6 | 76,640.96 | 1,091.49 | 3,541.05 | 4,632.54 | 73,099.91 |
| 7 | 73,099.91 | 1,041.06 | 3,591.49 | 4,632.54 | 69,508.42 |
| 24 | 4,567.50 | 65.05 | 4,567.50 | 4,632.54 | 0.00 |

Generalmente, los créditos bancarios, están gravados con una comisión porcentual sobre el saldo de la deuda, como condición para aceptar el refinanciamiento. En muchos casos con la aprobación del refinanciamiento viene una nueva TEA.

**Ejercicio 196 (Préstamo hipotecario)**

Una persona desea adquirir una casa valorizada en UM 70,000, el valor del terreno es UM 9,000. Para ello, solicita un préstamo a pagar en cuotas mensuales uniformes durante 10 años, con una TEA del 10%.

Elabore la Tabla de Amortización de la hipoteca, considerando que el Banco le financiará el 75% del valor del inmueble y que, además, pagarán dos seguros: uno para el inmueble contra todo riesgo con el costo de 0.054% (el pago del seguro del inmueble solo es por las edificaciones, más no para los terrenos); y otro seguro de desgravámen con el costo de 0.096%. Ambos son aplicados sobre el saldo del préstamo (considerar que del 75% del valor del inmueble que financia el banco (52,500), el 80% corresponde a edificaciones (42,000) y el 20% al terreno (10,500). Asuma UM 1.50 de portes por período de pago.

**Solución**:

VA = 70,000; n = 120 (10*12); TEA = 0.10; C = ?

| | |
|---|---|
| Valor del Inmueble | 70,000 |
| Financiamiento bancario | 52,500 |
| Portes | 1.50 |

**Datos adicionales:**

| | |
|---|---|
| 80% por concepto de edificaciones | 42,000 |
| 20% por concepto del terreno | 10,500 |

**Seguro**:

| | |
|---|---|
| 1. Seguro inmueble | 0.054% |
| 2. Seguro de desgravámen | 0.096% |

1º A partir de la TEA, calculamos la tasa del período:

[43A] $\boldsymbol{i}=\sqrt[12]{1+0.10}-1=0.00797414$ mensual

2º Calculamos el valor de cada una de las 120 cuotas mensuales, aplicando indistintamente la fórmula (25) o la función PAGO:

**Sintaxis**
**PAGO(tasa;nper;va**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | VA | VF | Tipo | PAGO |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.00797414 | 120 | -52,500.00 | | | 681.32 |

3º Con los datos del caso y los últimos resultados, elaboramos la tabla de amortización de la hipoteca:

| *n* | SALDO INICIAL | INTERES | SEG. INMB. | DSGV. | PRTES | AMORT. | CUOTA | PAGO TOTAL | SALDO FINAL |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | | | | 52,500 |
| 1 | 52,500 | 418.64 | 22.68 | 50.40 | 1.50 | 263 | 681.32 | 755.90 | 52,237 |
| 2 | 52,237 | 416.55 | 22.57 | 50.15 | 1.50 | 265 | 681.32 | 755.53 | 51,973 |
| 3 | 51,973 | 414.43 | 22.45 | 49.89 | 1.50 | 267 | 681.32 | 755.17 | 51,706 |
| 4 | 51,706 | 412.31 | 22.34 | 49.64 | 1.50 | 269 | 681.32 | 754.79 | 51,437 |
| 5 | 51,437 | 410.16 | 22.22 | 49.38 | 1.50 | 271 | 681.32 | 754.42 | 51,165 |
| 6 | 51,165 | 408.00 | 22.10 | 49.12 | 1.50 | 273 | 681.32 | 754.04 | 50,892 |
| 7 | 50,892 | 405.82 | 21.99 | 48.86 | 1.50 | 276 | 681.32 | 753.66 | 50,617 |
| 8 | 50,617 | 403.62 | 21.87 | 48.59 | 1.50 | 278 | 681.32 | 753.28 | 50,339 |
| 9 | 50,339 | 401.41 | 21.75 | 48.33 | 1.50 | 280 | 681.32 | 752.89 | 50,059 |
| 10 | 50,059 | 399.18 | 21.63 | 48.06 | 1.50 | 282 | 681.32 | 752.50 | 49,777 |
| 11 | 49,777 | 396.93 | 21.50 | 47.79 | 1.50 | 284 | 681.32 | 752.11 | 49,493 |
| 12 | 49,493 | 394.66 | 21.38 | 47.51 | 1.50 | 287 | 681.32 | 751.71 | 49,206 |
| 13 | 49,206 | 392.37 | 21.26 | 47.24 | 1.50 | 289 | 681.32 | 751.31 | 48,917 |
| 120 | 676 | 5.39 | 0.29 | 0.65 | 1.50 | 676 | 681.32 | 683.76 | 0 |

SEGURO INMUEBLE : Saldo Inicial*0.054%
DESGRAVAMEN : [(Saldo Inicial*80%)+(Saldo Inicial*20%)]*0.096%
CUOTA : Fórmula [25], función PAGO o Buscar Objetivo

**Ejercicio 197 (Pago de pagaré con retraso - Anualidades vencidas)**

El 13 de mayo del 2002, Juan Pérez, empresario pide UM 8,922 contra un pagaré a 30 días. La tasa de interés vigente en el mercado es de 19.82% anual pagados al vencimiento. Si el empresario debía liquidar el pagaré el 13 de junio del 2002 y recién se acerca el 22 de junio del 2002. ¿Cuánto tendrá que pagar en total? Considere que el interés compensatorio es 28.67% y el interés moratorio es 9.7%. El banco cobra UM 5 por concepto de portes; cuando hay retraso en el pago UM 20 por Gastos Notariales y UM 42.25 por Comisión de Protesto.

**Solución**:

VA = 8,922; n = 30 días; TEA = 0.1982; $TEA_{COMPENSATORIO}$ = 0.2867; TEAMORATORIO = 0.097; GASTOS = 67.25; PAGO TOTAL = ?

1º Determinamos la tasa efectiva del período, del interés moratorio y compensatorio, con la fórmula [24] o la función TASA.NOMINAL:

**Sintaxis**
**TASA.NOMINAL(tasa_efectiva; núm_per)**

| | tasa_efectiva | núm_per | TASA.NOMINAL | Diario |
|---|---|---|---|---|
| Del Período | 0.1982 | 360 | 0.18087 | 0.00050241 |
| Moratorio | 0.097 | 360 | 0.09259 | 0.00025720 |
| Compenst. | 0.2867 | 360 | 0.25217 | 0.00070047 |

TASA DIARIA = TASA.NOMINAL/360

2º Calculamos los intereses: del período por renovación, y compensatorios; con la fórmula [20]:

[20] $I_{\text{DEL PERIODO}} = 8{,}922 \left\langle (1+0.000502405)^{30} \right\rangle -1 =$ UM 135.46

[20] $I_{\text{MORATORIO}} = 8{,}922 \left\langle (1+0.000257197)^{9} \right\rangle -1 =$ UM 20.67

[20] $I_{\text{COMPENSATORIO}} = 8{,}922 \left\langle (1+0.00070047)^{9} \right\rangle -1 =$ UM 56.40

| Días | Prést. | Pago Princip | Int. | Int. Comp | Int. Morat | Gastos | Pago Total | Prést Final | Próximo Pago |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 8,922 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 8,922.00 | 30 |
| 39 | 8,922 | 8,922.00 | 135.46 | 56.40 | 20.67 | 67.25 | 9,201.78 | 0 | 0 |

3º Finalmente determinamos el costo de esta deuda y para ello es necesario identificar la temporalidad (presente o futuro) de las cantidades (el pagaré está a VA, los intereses, gastos y el principal son pagados a los 39 días, luego están a VF):

VA = 8,922; VF = 9,201.78; i = ?

3.1. Con la fórmula [1], calculamos la tasa efectiva de los 39 días:

[11] $\boldsymbol{i}=\frac{9{,}201.78-8{,}922.00}{8{,}922.00}=0.0314$

3.2. Luego, calculamos la tasa diaria:

[43A] $\boldsymbol{i}=\sqrt[39]{1+0.0314}-1=0.000793061$ diaria

3.3. A partir de esta tasa, calculamos la TEA de la operación:

(43B) ***TEA*** = (1 + 0.000793061)360 - 1 = 0.3303

**Respuesta:** En total el empresario, tiene que pagar al final de los 39 días UM 9,201.78. La TEA del pagaré es 33.03%.

**Ejercicio 198 (Leasing - Pago con cuotas uniformes)**

La empresa Constructora ABC S.A.C., solicita un leasing para comprar una máquina perforadora, cuyo valor es de UM 295,000 (incluido el IGV). La empresa desea pagar el préstamo mensualmente durante 3 años. La tasa efectiva anual (TEA) pactada es del 10%. El costo del seguro del bien es 4% simple anual, tomado durante la vigencia del préstamo. Los portes son pagos periódicos y ascienden a UM 0.50. Elaborar una tabla que muestre el cronograma de pagos.

**Solución**:

| | |
|---|---|
| Valor del bien | : 295,000 |
| ***n*** (3 años x 12 meses) | : 36 meses |
| TEA | : 10% |
| Seguro sobre valor del bien | : 4% simple anual |
| Portes (pagados periódicamente) | : 0.50 |
| IGV (periódicamente contra el valor de c/cuota) | : 18% |

1º Calculamos el monto a financiar incluido el valor del seguro del bien, con la fórmula [5] del interés simple:

[5] ***VF*** = 295,000(1 + 0.04*3) = UM 330,400

2º Con la fórmula (43A) calculamos la tasa del período, a partir de la TEA:

[43A] $\boldsymbol{i}=\sqrt[12]{1+0.10}-1=0.00797414$ mensual

3º Con esta tasa calculamos el valor de cada una de las 36 cuotas, aplicando la fórmula [24] o la función PAGO:

**Sintaxis**

**PAGO**(**tasa**;**nper**;**va**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | VA | VF | Tipo | PAGO |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.00797414 | 36 | -330,400 | | | 10,594.34 |

4º Con los datos del caso, los resultados y la cuota calculada, elaboramos la tabla de amortización de la operación financiera:

| *n* | SALDO INICIAL | INTERES | IGV | PRTES | AMORT. | CUOTA | CUOTA LEASING | SALDO FINAL |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | | | 330,400 |
| 1 | 330,400 | 2,634.66 | 2,012.92 | 0.50 | 7,960 | 10,594.34 | 12,607.77 | 322,440 |
| 2 | 322,440 | 2,571.18 | 2,012.92 | 0.50 | 8,023 | 10,594.34 | 12,607.77 | 314,417 |
| 3 | 314,417 | 2,507.21 | 2,012.92 | 0.50 | 8,087 | 10,594.34 | 12,607.77 | 306,330 |
| 4 | 306,330 | 2,442.72 | 2,012.92 | 0.50 | 8,152 | 10,594.34 | 12,607.77 | 298,178 |
| 5 | 298,178 | 2,377.72 | 2,012.92 | 0.50 | 8,217 | 10,594.34 | 12,607.77 | 289,962 |
| 6 | 289,962 | 2,312.20 | 2,012.92 | 0.50 | 8,282 | 10,594.34 | 12,607.77 | 281,680 |
| 7 | 281,680 | 2,246.15 | 2,012.92 | 0.50 | 8,348 | 10,594.34 | 12,607.77 | 273,331 |
| 8 | 273,331 | 2,179.58 | 2,012.92 | 0.50 | 8,415 | 10,594.34 | 12,607.77 | 264,917 |
| 9 | 264,917 | 2,112.48 | 2,012.92 | 0.50 | 8,482 | 10,594.34 | 12,607.77 | 256,435 |
| 36 | 10,511 | 83.81 | 2,012.92 | 0.50 | 10,511 | 10,594.34 | 12,607.77 | 0 |

**IGV=** CUOTA*19%

**Nota**: Las cuotas del leasing han sido calculadas en función al precio de venta del bien (que incluye el IGV) y que, además, sobre este importe pagará nuevamente el IGV tal como lo muestra la tabla de amortización. Este doble pago de IGV, encarece el costo de los créditos leasing para personas naturales, debido a que para éstos, el pago de IGV no es un crédito tributario, en consecuencia no es deducible.

**Ejercicio 199 (Aportes constantes a una Asociación)**

Sí mensualmente descuentan a 250,000 maestros nombrados UM 15 para colocarlo en una institución previsional. ¿Cuánto tendrá cada asociado al cabo de 30 años? Si: La institución reserva el 20% de cada cuota para gastos de operación y capitaliza el saldo de la cuota al 4.8% anual (la banca comercial actualmente paga en promedio el 9% a los ahorristas); comparativamente ¿cuánto tendría cada persona en el mismo plazo y tiempo en un banco?

**Solución**:

C = 12 (15-20%); n = (30*12) = 360; i = (0.048/12) = 0.04; VF = ?

Indistintamente, aplicando la fórmula (27) o la función *VF* tenemos:

$$[27] \quad \boldsymbol{VF} = 12\left\langle\frac{1.004^{360}-1}{0.004}\right\rangle = \text{UM } 9{,}625.77$$

**Sintaxis**

**VF(tasa;nper;pago**;va;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VA | Tipo | VF |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.004 | 360 | -12 | | | 9,625.77 |

El fondo que le corresponde a cada asociado después de 30 años de aportes es UM 9,626, a la tasa anual de 4.8%.

Ahora, si este dinero se ahorrara en un banco en las mismas condiciones compulsivas (S/. 15 mensual) de la asociación a una tasa del 9% anual, después de 30 años de abonar UM 15 mensuales tendríamos un fondo de UM 27,461.15 por efecto de la capitalización de los depósitos, como vemos al aplicar la función *VF* de Excel.

**Sintaxis**

**VF(tasa;nper;pago**;va;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VA | Tipo | VF |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.008 | 360 | -15 | | | 27,461.15 |

En la realidad, pocas son las asociaciones que capitalizan los fondos que aportan los afiliados siguiendo patrones técnicos. Los fondos por lo general parasitan en los bancos a cambio de exiguos intereses pactados adrede o son festinados por sus directivos.

Los asociados recibirían montos superiores a los que pagan los bancos en ahorros (por prestarle nuestro dinero). Los directivos deberían preocuparse en mantener estos fondos en movimiento y paralelo a ello institucionalizar las estrategias financieras, estableciendo mecanismos de participación de los asociados en los niveles de control y fiscalización de los fondos.

**Ejercicio 200 (Crédito de Consumo del Sistema Bancario)**

El Gerente de una Compañía, conviene con una entidad financiera para la colocación de computadores a través del sistema de Crédito de Consumo. El Banco proporciona a la empresa los factores 0.1895216 para 6 meses y 0.1053193 para 12 meses. El costo del dinero en este sistema es de 3.8% mensual.

**Pedimos:**

1) Determinar el grupo de problemas al que pertenece este caso;
2) Calcular los factores para 18, 24, 36 y 48 meses;
3) Si una computadora cuesta al contado UM 1,800, ¿cual será el valor de cada cuota en 6, 12, 18, 24, 36 y 48 meses en el crédito de consumo?.

**Solución**: (1)

Este tipo de casos corresponde al 3º Grupo de Problemas, Valor Actual de un Pago en Cuotas: «... cuando la inversión es de un solo importe y lo recuperamos en varios pagos iguales». Factor de Recuperación del Capital (FRC) de la fórmula [25].

**Solución**: (2)

n = 18, 24, 36 y 48; i = 0.038; FRC = ?

Aplicando sucesivamente, el factor FRC calculamos los factores para 18, 24, 36 y 48 meses.

$$\boldsymbol{FRC}_{18}^{0.038} = \left\langle \frac{0.038(1.038)^{18}}{1.038^{18}-1} \right\rangle = 0.07771$$

| $n$ | $i$ | $FRC_{n}^{i} = \left\langle \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right\rangle$ |
|---|---|---|
| 18 | 0.038 | 0.07771 |
| 24 | 0.038 | 0.06425 |
| 36 | 0.038 | 0.05143 |
| 48 | 0.038 | 0.04561 |

**Solución:** (3)

VA = 1,800, n = 6...48; i = 0.038; C6 ... 48 = ?

Aplicando la fórmula (25) o la función financiera PAGO, obtenemos directamente cada una de las cuotas según los plazos de pago:

**Sintaxis**

**PAGO(tasa;nper;va;**vf;tipo)

| Tasa | Nper | VA | VF | Tipo | PAGO |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.04 | 6 | -1,800 | | | 341.14 |
| 0.04 | 12 | -1,800 | | | 189.57 |
| 0.04 | 18 | -1,800 | | | 139.89 |
| 0.04 | 24 | -1,800 | | | 115.65 |
| 0.04 | 36 | -1,800 | | | 92.58 |
| 0.04 | 48 | -1,800 | | | 82.11 |

**Ejercicio 201 (Préstamo para compra de sistema de cómputo)**

El dueño de un negocio en expansión de venta de ropa y zapatos para damas al crédito, está considerando actualizar sus crecientes cuentas por cobrar con la adquisición de un sistema de informática. Alternativamente puede comprar un sistema básico ahora por UM 7,000 y actualizarlo al final del primer año por UM 1,500, nuevamente al final del año 3 por UM 3,000 o uno de mayor potencia con los mismos servicios que el primero y por el mismo tiempo. Si el propietario está en condiciones de invertir al 23% anual ¿cuánto podría pagar ahora por el sistema de mayor potencia?.

**Solución**:

VA0= 7,000; VF1= 1,500; VF2= 3,000; n= 1 y 3; i= 0.23; VAT = ?

Para calcular el valor actual total ( $VAT$ ) aplicamos sucesivamente la fórmula [21] o la función VA a través de la siguiente ecuación:

**VAT** = VA0 +VA1 + VA2

[21] $\boldsymbol{VA}_T = 7{,}000 + \frac{1{,}500}{1.23} + \frac{3{,}000}{1.23^3} = \text{ UM } 9{,}831.66$

**Sintaxis**

**VA(tasa;nper;pago**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VF | Tipo | VA |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | 7,000.00 |
| 0.23 | 1 | | -1,500 | | 1,219.51 |
| 0.23 | 3 | | -3,000 | | 1,612.15 |
| **Valor Actual Total** | | | | | 9,831.66 |

**Respuesta**: El propietario del negocio podría pagar hoy por el sistema de cómputo de mayor potencia UM 9,831.66. Obviamente si llevamos al futuro (final del año 3) los UM 7,000 y los UM 1,500 tenemos que el costo futuro del equipo básico es:

$\boldsymbol{VF}_T = VF_3 + VF_2 + VF_0$

[19] $\boldsymbol{VF}_T = 7{,}000(1.23)^3 + 1{,}500(1.23)^2 + 3{,}000 = \text{ UM } 18{,}295.42$

**Sintaxis**

**VF(tasa;nper;pago;va;tipo)**

| Tasa | Nper | Pago | VA | Tipo | VF |
|---|---|---|---|---|---|
| 23% | 3 | | -7,000 | | 13,026.07 |
| 23% | 2 | | -1,500 | | 2,269.35 |
| | 1 | | -3,000 | | 3,000.00 |
| | | | | | 18,295.42 |

El equipo básico costaría UM 18,295.42, a una tasa de 23% anual, en 3 años.

**Ejercicio 202 (Préstamo a través de la Banca Fondista)**

Tenemos la siguiente información sobre los préstamos a tasas preferenciales de interés que otorga la Banco Fondista a empresas o individuos con capacidad de proveer una Garantía Bancaria:

**Información básica**:

1) Proveer una Garantía Bancaria a favor del prestatario y endosarla a favor del Banco Fondista válido por 10 años y un día o en su defecto automáticamente renovable anualmente durante el plazo del contrato del préstamo. Para cubrir esta garantía es posible presentar: Certificados de Depósito CD´s, entre otros.
2) Los montos mínimos de los préstamos son de UM 10 millones y el máximo sin límite.
3) Uso de los fondos: No hay restricciones específicas, pero tienen preferencia proyectos de desarrollo y de impacto social o ambiental en países en desarrollo como América Latina.
4) Plazos: 10 años.

**Modalidad de Pago**:

5. Comisiones, gastos legales y otros: 8% de Flat por una sola vez, descontados al desembolso de los fondos.
6. Período de gracia, máximo 2 años, durante el cual son pagados los intereses a fines de cada año sin amortización de capital.
7. Amortización del capital, comienza al final del 3º año.
8. Intereses preferenciales, 4% anual al rebatir.

**Observaciones**: La tasa de interés puede variar en caso que el solicitante demorase en presentar la Garantía Bancaria. Lo cual será comunicado por el Banco Fondista al prestatario.

Para el desembolso de los fondos utilizan un Banco Intermediario donde el prestatario obtendrá una cuenta corriente, la selección del Banco Intermediario es a criterio del Banco Fondista.

**Veamos en la práctica**: Una persona, empresa o institución con capacidad de acceder a una línea de crédito a través del Banco Fondista en las condiciones indicadas, solicita UM 10 millones en préstamo.

Evaluar el costo del préstamo. Elaborar el cronograma de pagos y el flujo de caja, considerando comisiones, gastos legales y otros de 8% flat y el 15% de comisión anual contra el saldo al rebatir, por emisión de la garantía bancaria.

**Solución:**

VA = 10'000,000; i = 0.04; i = 0.08 Flat; n = 10; C = ?

1º Calculamos el monto anual a pagar al final del 3º año. Este cálculo es con el monto total del préstamo con n= 8, por cuanto en los dos primeros años solo cancelamos los intereses del 4% anual, permaneciendo invariable el monto del préstamo:

**Sintaxis**

**PAGO(tasa;nper;va;vf;tipo)**

| Tasa | Nper | VA | VF | Tipo | PAGO |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.04 | 8 | -10,000,000 | | | 1,485,278.32 |

2º Elaboramos el CRONOGRAMA DEL SERVICIO DE LA DEUDA Y EL FLUJO DE CAJA:

Puesto que al momento del desembolso el Banco Fondista cobra por concepto de comisiones, gastos legales y otros el 8% Flat, tenemos:

| AÑOS | SALDO INICIAL | INTERES 4% | AMORT. | PAGO | SALDO FINAL |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | 10,000,000 |
| 1 | 10,000,000 | 400,000.00 | | 400,000.00 | 10,000,000 |
| 2 | 10,000,000 | 400,000.00 | | 400,000.00 | 10,000,000 |
| 3 | 10,000,000 | 400,000.00 | 1,085,278.32 | 1,485,278.32 | 8,914,722 |
| 9 | 2,801,376 | 112,055.02 | 1,373,223.30 | 1,485,278.32 | 1,428,152 |
| 10 | 1,428,152 | 57,126.09 | 1,428,152.23 | 1,485,278.32 | 0 |

| | | |
|---|---|---|
| Préstamo a 10 años | UM | 10'000,000 |
| (-) 8% Comisión Flat | | 800,000 |
| Cantidad recibida en el año 0 | UM | 9'200,000 |
| Comisión por emisión de garantía | | 1.50% anual |

Elaboramos el FLUJO DE CAJA DE LA OPERACION

**FLUJO DE CAJA (b)**

| AÑOS | PRESTAMO | COMISION FLAT | COMS. BCO. INTERM. | PAGOS NETOS | FLUJO NETO |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 10,000,000 | 800,000 | | | -9,200,000 |
| 1 | | | 150,000 | 400,000 | 550,000 |
| 2 | | | 150,000 | 400,000 | 550,000 |
| 3 | | | 150,000 | 1,485,278 | 1,635,278 |
| 4 | | | 133,721 | 1,485,278 | 1,618,999 |
| 5 | | | 116,790 | 1,485,278 | 1,602,069 |
| 6 | | | 99,183 | 1,485,278 | 1,584,461 |
| 7 | | | 80,871 | 1,485,278 | 1,566,149 |
| 8 | | | 61,827 | 1,485,278 | 1,547,105 |
| 9 | | | 42,021 | 1,485,278 | 1,527,299 |
| 10 | | | 21,422 | 1,485,278 | 1,506,701 |
| Tasa Interna de Rendimiento (TIR) | | | | | 7.07% |

**Respuesta:** El costo promedio anual del préstamo incluido los gastos emergentes de la operación financiera es de 7.07%.

**Ejercicio 203 (Problema con saldo de préstamo)**

Tenemos el caso de una persona que recibió un préstamo bancario y que su saldo al 15.01.01 fue de UM 7,361.13, que al parecer ha tenido dificultades para pagar sus cuotas mensualmente; de acuerdo a su disponibilidad, ha amortizado esta deuda de la siguiente forma:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 12-Feb-01 | 284.50 | | |
| 16-Feb-01 | 290.00 | | |
| 19-Feb-01 | 125.00 | Feb-01 | 699.50 |
| 10-May-01 | | May-01 | 1,075.00 |
| 05-Jun-01 | 250.00 | | |
| 11-Jun-01 | 570.00 | | |
| 12-Jun-01 | 200.00 | | |
| 14/06/2001 | 250.00 | Jun-01 | 1,270.00 |
| 16-Jul-01 | 135.00 | | |
| 18-Jul-01 | 60.00 | | |
| 20-Jul-01 | 500.00 | Jul-01 | 695.00 |
| 16-Jul-02 | | Jul-02 | 1,000.00 |

**Requerimiento:**

1) Determinar el saldo por pagar deducido los pagos efectuados al 16/9/02. Considere como tasa nominal anual el 17.5%.

2) Determinar el costo de la deuda al 16/9/02.

Asumimos que todos los pagos efectuados por el prestatario son a fines de mes; transcurriendo del 15/1/01 al 16/9/02, 20 meses.

**Solución**:(1)

$VA = 7{,}361.13$; $n = 20$; $j = 0.175$; $i = (0.175/12) = 0.014583$

Elaboramos el cuadro SERVICIO DE UNA DEUDA NO CANCELADA REGULARMENTE:

| FECHAS | SALDO INICIAL | INTERES 1.4583% | AMORT. | PAGOS | SALDO FINAL |
|---|---|---|---|---|---|
| 16-02-01 | 7,361.13 | 107.35 | 592.15 | 699.50 | 6,768.98 |
| 16-03-01 | 6,768.98 | 98.71 | -98.71 | 0.00 | 6,867.69 |
| 16-04-01 | 6,867.69 | 100.15 | -100.15 | 0.00 | 6,967.85 |
| 16-05-01 | 6,967.85 | 101.61 | 973.39 | 1,075.00 | 5,994.46 |
| 16-06-01 | 5,994.46 | 87.42 | 1,182.58 | 1,270.00 | 4,811.88 |
| 16-07-01 | 4,811.88 | 70.17 | 624.83 | 695.00 | 4,187.05 |
| 16-08-01 | 4,187.05 | 61.06 | -61.06 | 0.00 | 4,248.11 |
| 16-06-02 | 4,839.33 | 70.57 | -70.57 | 0.00 | 4,909.91 |
| 16-07-02 | 4,909.91 | 71.60 | 928.40 | 1,000.00 | 3,981.51 |
| 16-08-02 | 3,981.51 | 58.06 | -58.06 | 0.00 | 4,039.57 |
| 16-09-02 | 4,039.57 | 58.91 | -58.91 | 0.00 | **4,098.48** |

Con una tasa mensual de 1.4583% el saldo transcurrido 20 meses y efectuado 5 pagos es de UM 4,098.48.

**Solución**: **(2)**

Finalmente, el costo de la deuda es:

**Sintaxis**
**INT.EFECTIVO(int_nominal;núm_per_año)**

| Int.nominal | num_per_año | Tasa Efectiva | |
|---|---|---|---|
| 17.50% | 12 | 18.97% | TEA |

El costo efectivo del préstamo es : 18.97%

**Comentario:** Desde el punto de vista del prestamista (Banco) como asumimos a la tasa de interés nominal o efectiva indicada, el saldo al 16/09/02 es diferente, pero invariable. En estas condiciones la única posibilidad de mejorar la posición del prestatario es pedir una reconsideración de la tasa de interés para reprogramar el pago de la deuda en tiempo prudencial. Lógicamente esta negociación se llevará a cabo a partir del saldo insoluto al 16/9/02 según el Banco.

**Ejercicio 204** **(Pago de saldo de préstamo)**

Un empresario adeudaba al 30/6/2001 la suma de UM 280,000, saldo de un préstamo bancario dejado de pagar por problemas económicos. Al objeto de saldar esta obligación el deudor propone al Banco 180 cuotas durante 15 años, con una TEA de 8%. La propuesta indica, que el deudor está en condiciones de pagar 36 cuotas de UM 2,500 y 36 de UM 3,500 cada una en los primeros seis años y en los siguientes 9 años 108 cuotas constantes a la tasa indicada.

a) Elaborar el cronograma de pagos. Determinar el valor de cada cuota después del mes 72.

b) Calcular el valor de cada cuota mensual durante los 15 años.

**Solución** (a)

VA = 280,000; n = 180; TEA = 0.08; i = ? C = ?

1º Calculamos la tasa periódica a partir de la TEA:

[43A] $\boldsymbol{i}=\sqrt[12]{(1+0.08)}-1=0.0064$ mensual

2º Con ésta tasa elaboramos el cuadro de servicio de la deuda. Para determinar el valor de cada cuota aplicamos la fórmula [25] o la función PAGO:

VA = 175,833.96; n = 108; i = 0.00643; C = ?

**Sintaxis**

**PAGO(tasa;nper;va;vf;tipo)**

| Tasa | Nper | VA | VF | Tipo | PAGO |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.0064 | 108 | -175,833.96 | | | 2,263.33 |

El cuadro (como en muchos de los ejercicios anteriores) es el extracto del cronograma elaborado en Excel considerando los 180 meses. Como vemos: al final del mes 72 el saldo es UM 175,833.96 con el que calculamos cada una de las 108 cuotas pendientes. El valor de cada una de las 108 cuotas mensuales a partir del primer mes del año 9 es UM 2,263.33.

| MESES | SALDO INICIAL | INTERES | AMORTIZACION | PAGOS | SALDO FINAL |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | 280,000.00 |
| 1 | 280,000.00 | 1,800.40 | 699.60 | 2,500.00 | 279,300.40 |
| 2 | 279,300.40 | 1,795.90 | 704.10 | 2,500.00 | 278,596.30 |
| 3 | 278,596.30 | 1,791.37 | 708.63 | 2,500.00 | 277,887.68 |
| 35 | 253,507.93 | 1,630.06 | 869.94 | 2,500.00 | 252,637.98 |
| 36 | 252,637.98 | 1,624.46 | 875.54 | 2,500.00 | 251,762.44 |
| 37 | 251,762.44 | 1,618.83 | 1,881.17 | 3,500.00 | 249,881.28 |
| 38 | 249,881.28 | 1,606.74 | 1,893.26 | 3,500.00 | 247,988.01 |
| 70 | 182,851.68 | 1,175.74 | 2,324.26 | 3,500.00 | 180,527.41 |
| 71 | 180,527.41 | 1,160.79 | 2,339.21 | 3,500.00 | 178,188.21 |
| 72 | 178,188.21 | 1,145.75 | 2,354.25 | 3,500.00 | 175,833.96 |
| 73 | 175,833.96 | 1,130.61 | 1,132.72 | 2,263.33 | 174,701.24 |
| 74 | 174,701.24 | 1,123.33 | 1,140.00 | 2,263.33 | 173,561.24 |
| 179 | 4,483.37 | 28.83 | 2,234.50 | 2,263.33 | 2,248.87 |
| 180 | 2,248.87 | 14.46 | 2,248.87 | 2,263.33 | 0.00 |

**Solución (b)**

VA = 280,000;  n = 180;  i = 0.00643;  C = ?

**Sintaxis**

**PAGO(tasa;nper;va**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | VA | VF | Tipo | PAGO |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.00643 | 180 | -280,000 | | | **2,630.12** |

**Comentario**: La cuota constante de UM 2,630.12 es muy cercana a la capacidad de pago propuesto por el deudor.

**Ejercicio 205 (Préstamo de una MYPE)**

Un pequeño empresario acude a una MYPE y solicita UM 50,000 ó US$ 15,000 en préstamo para ser pagado en 24 meses y pide al funcionario de la institución que le indique los requisitos y la cuota mensual que corresponde a cada unidad monetaria.

El funcionario explica al empresario que los requisitos para acceder al préstamo son:

1) Que el negocio tenga más de 6 meses de funcionamiento,
2) Que el capital sea propio,
3) Constitución de la empresa,
4) RUC del negocio,
5) Libro de Actas,
6) Ficha de Inscripción en los Registros Públicos,
7) Croquis de ubicación del negocio y
8) DNI del representante legal de la empresa.

Asimismo, le indica que la cuota que tiene que pagar mensualmente es UM 3,449.35 y US $ 815.70 respectivamente.

**Requerimos**:

a) Determinar la tasa periódica (mensual) y la TEA que la MYPE cobra por sus préstamos en moneda nacional y extranjera.

b) Determine el FRC para cada uno de los préstamos.

c) Considerando dos períodos de carencia o gracia en la amortización del principal (sólo pagamos los intereses) elabore la tabla de amortización.

**Solución**: (a)

VA1 = 50,000; VA2 = 15,000; n = 24; C1 = 3,449.35; C2 = 815.7

1º Calculamos la tasa mensual del préstamo en moneda nacional y extranjera:

**Sintaxis** En moneda nacional

**TASA**(**nper**;**pago**;**va**;vf;tipo;estimar)

| Nper | Pago | VA | VF | TASA |
|---|---|---|---|---|
| 24 | 3,449.35 | -50,000 | | 4.50% |

**Sintaxis** En moneda extranjera

**TASA**(**nper**;**pago**;**va**;vf;tipo;estimar)

| Nper | Pago | VA | VF | TASA |
|---|---|---|---|---|
| 24 | 815.70 | -15,000 | | 2.25% |

2º A partir de las tasas mensuales encontradas, calculamos la tasa nominal y la TEA:

(44A) $j_{\text{MONEDA NACIONAL}}$ = 0.045*12 = 0.54

(44A) $j_{\text{MONEDA EXTRABJERA}}$ = 0.0225*12 = 0.27

[43B] $\boldsymbol{TEA}_{\text{MONEDA NACIONAL}} = (1.045)^{12} - 1 = 0.6959$

[43B] $\boldsymbol{TEA}_{\text{MONEDA NACIONAL}} = (1.0225)^{12} - 1 = 0.3060$

**Solución**: (b)

VA1 = 1; VA2 = 1; n = 24; $i1$ = 0.045; $i2$ = 0.025; FRC1 = ?; FRC2 = ?

1º Calculamos el FRC:

**Sintaxis**

**PAGO**(**tasa**;**nper**;**va**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | VA | VF | Tipo | FRC |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.045 | 24 | -1 | | | 0.0689870 |

**Sintaxis**

**PAGO**(**tasa**;**nper**;**va**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | VA | VF | Tipo | FRC |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.0225 | 24 | -1 | | | 0.0543802 |

**Así tenemos**:

MN = 50,000*0.0689870 = UM 3,449.35 mensual
MEXT. = 15,000*0.0543802 = UM 815.70 mensual

**Solución**: (c) Préstamo en Moneda Nacional

VA1 = 50,000; n = 22; *i*1 = 0.045; C1 = ?

[25] $\boldsymbol{C} = 50{,}000\left\langle\frac{0.045(1.045)^{22}}{(1.0045)^{22}-1}\right\rangle = \text{UM } 3{,}627.28$

| CRONOGRAMA DE LA DEUDA EN MONEDA NACIONAL | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **MESES** | **SALDO INICIAL** | **INTERES 4.5%** | **AMORT.** | **PAGOS** | **SALDO FINAL** |
| 0 | | | | | 50,000.00 |
| 1 | 50,000.00 | 2,250.00 | | 2,250.00 | 50,000.00 |
| 2 | 50,000.00 | 2,250.00 | | 2,250.00 | 50,000.00 |
| 3 | 50,000.00 | 2,250.00 | 1,377.28 | 3,627.28 | 48,622.72 |
| 6 | 45,679.44 | 2,055.57 | 1,571.71 | 3,627.28 | 44,107.73 |
| 7 | 44,107.73 | 1,984.85 | 1,642.43 | 3,627.28 | 42,465.30 |
| 8 | 42,465.30 | 1,910.94 | 1,716.34 | 3,627.28 | 40,748.96 |
| 23 | 6,792.77 | 305.67 | 3,321.61 | 3,627.28 | 3,471.16 |
| 24 | 3,471.16 | 156.20 | 3,471.08 | 3,627.28 | 0.08 |

**Solución**: (d) Préstamo en Moneda Extranjera

VA2 = 15,000; n = 22; *i*2 = 0.0225; C2 = ?

[25] $\boldsymbol{C} = 50{,}000\left\langle\frac{0.0225(1.0225)^{22}}{(1.00225)^{22}-1}\right\rangle = \text{UM } 871.92$

**Sintaxis**

**PAGO**(**tasa**;**nper**;**va**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | VA | VF | Tipo | PAGO |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.0225 | 22 | -15,000 | | | 871.92 |

| CRONOGRAMA DE LA DEUDA EN MONEDA EXTRANJERA | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **MESES** | **SALDO INICIAL** | **INTERES 2.25%** | **AMORT.** | **PAGOS** | **SALDO FINAL** |
| 0 | | | | | 50,000.00 |
| 1 | 15,000.00 | 337.50 | | 337.50 | 15,000.00 |
| 2 | 15,000.00 | 337.50 | | 337.50 | 15,000.00 |
| 3 | 15,000.00 | 337.50 | 534.42 | 871.92 | 14,465.58 |
| 4 | 14,465.58 | 325.48 | 546.45 | 871.92 | 13,919.13 |
| 5 | 13,919.13 | 313.18 | 558.74 | 871.92 | 13,360.39 |
| 6 | 13,360.39 | 300.61 | 571.31 | 871.92 | 12,789.07 |
| 7 | 12,789.07 | 287.75 | 584.17 | 871.92 | 12,204.90 |
| 23 | 1,686.71 | 37.95 | 833.97 | 871.92 | 852.74 |
| 24 | 852.74 | 19.19 | 852.74 | 871.92 | 0.00 |

Para el cálculo de la cuota mensual hemos aplicado la opción Buscar Objetivo, resultado que coincide con los de la fórmula [25] y el de la función PAGO.

**Ejercicio 206 (Préstamos de una Caja Municipal)**

Una Caja Municipal ofrece créditos rápidos con pagos periódicos diarios. Exige como requisito ser puntual y haber pagado al menos cinco créditos. Los montos, plazos y cuotas diarias expresamos en el siguiente cuadro:

| MONTO | PAGOS DIARIOS | | |
|---|---|---|---|
| | 30 DIAS | 45 DIAS | 60 DIAS |
| 500.00 | 18.00 | 12.00 | 9.00 |
| 1,000.00 | 35.00 | 24.00 | 18.00 |
| 1,500.00 | 52.00 | 35.00 | 27.00 |
| 2,000.00 | 69.00 | 47.00 | 36.00 |
| 2,500.00 | 86.00 | 58.00 | 44.00 |
| 3,000.00 | 103.00 | 70.00 | 53.00 |

**Requerimiento:**

Calcular el costo real nominal y efectivo de éstos préstamos. Comente los resultados.

**Solución:**

1º Para el cálculo de la tasa diaria y nominal de éstos préstamos, debemos aplicar sucesivamente la función TASA; tomaremos como referencial de análisis el monto de UM 500 de préstamo pagaderos diariamente en 30, 45 y 60:

**Sintaxis**
**TASA(nper;pago;va**;vf;tipo;estimar)

| Nper Diario | Pago | VA | VF | TASA Diaria | Nominal por 360 días |
|---|---|---|---|---|---|
| 30 | 18.00 | -500.00 | | 0.0050 | 181.40% |
| 45 | 12.00 | -500.00 | | 0.0034 | 122.18% |
| 60 | 9.00 | -500.00 | | 0.0026 | 92.11% |

2º A partir de la tasa diaria, calculamos la TEA del préstamo de UM 500, para ello aplicamos indistintamente la fórmula (43B) o la función INT.EFECTIVO:

**Sintaxis**
**INT.EFECTIVO(int_nominal;núm_per_año)**

| Días | int_nominal | núm_per_año | INT.EFECTIVO |
|---|---|---|---|
| 30 | 181.40% | 360 | 4.82 |
| 45 | 122.18% | 360 | 2.34 |
| 60 | 92.11% | 360 | 1.49 |

**Respuesta:** Con el sistema de pagos diarios, la Caja Municipal está cobrando a los micro empresarios 510.71% de Tasa Efectiva Anual para préstamos de UM 500, con pagos diarios durante 30 días.

Evalué el préstamo con los otros montos.

**Ejercicio 207 (Implementación de Consultorio Médico con préstamo personal)**

Tenemos el caso de un médico recién egresado, que tiene planificado implementar su consultorio de atención a pacientes, con los siguientes costos:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Activo Fijo (mobiliario y equipos) | | | 4,320.00 |
| Capital de trabajo (Para tres meses): | | | |
| Local dos meses de garantía | | | 1,000.00 |
| Alquiler de local | 500.00 | | 1,500.00 |
| Secretaria | 550.00 | | 1,650.00 |
| Varios | 150.00 | | 450.00 |
| Teléfono con línea económica | 85.00 | 255.00 | 4,855.00 |
| **TOTAL A. FIJO Y CAP. DE TRABAJO** | | | 9,175.00 |

| CANT. | Mobiliario y Equipos | Precio Unitario |
|---|---|---|
| 1 | Camilla para examen | UM 200.00 |
| 1 | Soporte para suero | 80.00 |
| 1 | Lámpara cuello de ganso | 110.00 |
| 1 | Coche de curaciones | 140.00 |
| 1 | Mesa de mayo | 150.00 |
| 1 | Peldaño de un paso | 40.00 |
| 1 | Balanza con tallímetro de barras | 550.00 |
| 1 | Taburete giratorio con espaldar | 130.00 |
| 1 | Silla para toma de muestra de sangre | 240.00 |
| 1 | Biombo de dos cuerpos | 110.00 |
| 1 | Camilla ginecológica | 300.00 |
| 1 | Balanza pedriática | 240.00 |
| 1 | Megatocoscopio de cuerpo | 130.00 |
| 1 | Tacho con pedal | 180.00 |
| 1 | Balde quirúrgico rodante | 190.00 |
| 1 | Porta lavatorio | 180.00 |
| 1 | Vitrina de dos cuerpos | 330.00 |
| 1 | Escritorio metálico | 240.00 |
| 1 | Escritorio junio secretaria | 180.00 |
| 1 | Sillón | 150.00 |
| 1 | Silla secretaria | 120.00 |
| 6 | Sillas plásticas para pacientes | 90.00 |
| 2 | Sillas para visita | 240.00 |
| | **TOTAL** | **UM 4,320.00** |

El médico requiere los UM 9,175.00 para implementar y poner en marcha su consultorio. Para el financiamiento cuenta con varias líneas de crédito para este tipo de proyectos, veremos tres prototipos:

**LINEA PRESTAMOS PERSONALES:**

1. Un Banco otorga préstamos hasta en 24 meses, con una tasa de 3.8% mensual.
2. Un Banco dirigido a las MYPES otorga préstamos en 12 meses con el 4% mensual.
3. Una MYPE otorga préstamos en 12 meses con el 4.5% mensual.

<u>Requisitos</u>:
Por lo general y con algunas variantes, estas entidades solicitan:

1. Acreditar ingreso conyugal bruto mínimo de UM 400.00 o más según el monto.
2. Solicitud de crédito debidamente llenada y firmada
3. Copia del DNI del titular y cónyuge
4. Copia del recibo de teléfono fijo

Sustento de Ingresos**:**

<u>Dependientes</u>
2 últimas boletas de pago

<u>Independientes</u>
Copia del formulario de pago de impuestos por honorarios, ventas o rentas de los últimos 3 meses, declaración jurada y copia del RUC. Si tiene ingresos de cuarta categoría y la empresa retiene los impuestos, adjuntar certificado de retención de 4ta. Categoría del año en curso.

**Determinar:**

1. El valor de cada una de las 12 cuotas a pagar mensualmente en cada institución financiera.
2. La tasa nominal y la TEA de cada uno de los créditos

3. Calcular la cantidad de pacientes que el médico tiene que atender en forma mensual y diaria los primeros 90 días y los nueve meses posteriores.

Considere los precios por consultas de UM 10 y UM 20 y un mes de 25 días. A partir del cuarto mes adicione al pago de la cuota los gastos normales del mes UM 1,285.

**<u>Solución</u>: (1)**

VA = 9,175; n = 12; i = 0.038, 0.04, 0.045; C = ?

1º Para determinar el valor de cada una de las cuotas, aplicamos indistintamente la fórmula (25) o la función PAGO:

$$[25] \quad \boldsymbol{C} = 9{,}175\left\langle\frac{0.038(1.038)^{12}}{(1.038)^{12}-1}\right\rangle = \text{UM } 966.31$$

**Sintaxis**

**PAGO**(**tasa**;**nper**;**va**;vf;tipo)

| Inst. Finan | Tasa | Nper | VA | VF | Tipo | PAGO |
|---|---|---|---|---|---|---|
| BANCO | 0.038 | 12 | -9,175.00 | | | 966.31 |
| B. MYPES | 0.040 | 12 | -9,175.00 | | | 977.62 |
| EDPYME | 0.045 | 12 | -9,175.00 | | | 1,006.19 |

**<u>Solución</u>: (2)**

n = 12; i = 0.038, 0.04, 0.045; j = ?; TEA = ?

2º Calculamos las tasas nominales y TEA de cada institución aplicando sucesivamente la función INT.EFECTIVO:

**Sintaxis**

**INT.EFECTIVO**(**int_nominal**;**núm_per_año**)

| Inst. Financ. | int_nominal | núm_per_año | INT.EFECTIVO |
|---|---|---|---|
| BANCO | 45.60% | 12 | 56.45% |
| B. MYPES | 48.00% | 12 | 60.10% |
| EDPYME | 54.00% | 12 | 69.59% |

Obtenemos la tasa nominal j aplicando la fórmula (44A)

3º Calculamos la cantidad de pacientes por mes y día que tenemos que atender:

| | Cuota | Atención | | Cuota | Atención | | Cuota | Atención | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **n** | **BANCO** | **Mes** | **Día** | **B.MYPES** | **Mes** | **Día** | **EDPYME** | **Mes** | **Día** |
| 1 | 966.31 | 97 | 4 | 977.62 | 98 | 4 | 1,006.19 | 101 | 4 |
| 2 | 966.31 | 97 | 4 | 977.62 | 98 | 4 | 1,006.19 | 101 | 4 |
| 3 | 966.31 | 97 | 4 | 977.62 | 98 | 4 | 1,006.19 | 101 | 4 |
| 4 | 2,251.31 | 225 | 9 | 2,262.62 | 226 | 9 | 2,291.19 | 229 | 9 |
| 12 | 2,251.31 | 225 | 9 | 2,262.62 | 226 | 9 | 2,291.19 | 229 | 9 |

Con un precio por consulta de UM 10.00.

La cantidad de pacientes mensuales y diarios para atención, lo obtenemos dividiendo el valor de la cuota entre el precio (UM 10 ó 20), y este resultado lo dividimos entre 25 y nos dá la cantidad de pacientes por día.

A partir del cuarto mes debemos sumar a la cuota mensual los gastos corrientes del mes = UM 1,285.

**Ejercicio 208 (Compra de Activo Fijo con préstamo para negocios)**

Los propietarios de un policlínico necesitan adquirir equipos valorizado en UM 60,000 para ello disponen de tres propuestas:

**PRESTAMOS PARA NEGOCIOS:** (Capital de trabajo y Activo Fijo)

1. Un banco tradicional otorga préstamos hasta en 36 meses, con el 2.21% mensual. Para créditos mayores a UM 10,000 el banco exige garantía inmobiliaria o efectiva.
2. Un banco para las MYPES otorga préstamos hasta en 36 meses con el 3.14% mensual.
3. Una MYPE otorga préstamos hasta en 36 meses con el 4% mensual.

**Determinar:**

1. El valor de las 12 cuotas a pagar mensualmente en cada institución financiera.
2. La tasa nominal y efectiva de los créditos (costo del dinero).

**Solución: (1)**

VA = 60,000; n = 36; i = 0.0221, 0.0314, 0.04; C = ?

1º Las cuotas mensuales a pagar lo calculamos bien con la fórmula (25) o la función PAGO:

**Sintaxis**

**PAGO(tasa;nper;va**;vf;tipo)

| Inst. Financ. | Tasa | Nper | VA | VF | Tipo | PAGO |
|---|---|---|---|---|---|---|
| BANCO | 0.022 | 36 | -60,000 | | | 2,434.09 |
| B. MYPE | 0.031 | 36 | -60,000 | | | 2,805.94 |
| EDPYME | 0.040 | 36 | -60,000 | | | 3,173.21 |

**Solución: (2)**

n = 36; i = 0.0221, 0.0314, 0.04; C = ?; TEA = ?

2º Calculamos las tasas nominales y TEA de cada institución aplicando sucesivamente la función INT.EFECTIVO:

**Sintaxis**

**INT.EFECTIVO(int_nominal;núm_per_año)**

| Inst. Financ. | int_nominal | núm_per_año | INT.EFECTIVO |
|---|---|---|---|
| BANCO | 26.52% | 12 | 29.99% |
| B. MYPES | 37.68% | 12 | 44.92% |
| EDPYME | 48.00% | 12 | 60.10% |

Obtenemos la tasa nominal j aplicando la fórmula (44A)

**Respuesta:** Por el costo del dinero, no obstante las mayores exigencias conviene el préstamo de la Banca Comercial, tiene un costo de 29.99% efectivo anual.

**Ejercicio 209 (Tarjeta de Crédito Versus Préstamo Personal)**

Un médico desea comprar una computadora Pentium IV - IBM, que al contado cuesta UM 769.00. El supermercado con el que el médico tiene una tarjeta de crédito, le ofrece al crédito en 12 cuotas de UM 89.80 mensual y el Banco le propone el préstamo en 12 meses con una tasa de interés del 2.8% mensual. Determine lo más conveniente en términos de costo de la operación.

**Solución:**

VA = 769; n = 12; C = 89.80; i = ?

1º Calculamos la tasa de interés de la tarjeta de crédito, para ello aplicamos la función TASA, que nos proporciona la tasa mensual:

**Sintaxis**
**TASA(nper;pago;va**;vf;tipo;estimar)

| Nper | Pago | VA | VF | Tipo | Tasa |
|---|---|---|---|---|---|
| 12 | 89.80 | -769 | | | 5.62% |

Con esta tasa calculamos la TEA de la tarjeta de crédito:

2º Calculamos la cuota mensual y la TEA del préstamo bancario:

VA = 769;   n = 12;   i = 0.028;   C = ?

**Sintaxis**
**PAGO(tasa;nper;va;vf;tipo)**

| Tasa | Nper | VA | VF | Tipo | PAGO |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.028 | 12 | -769 | | | 76.34 |

**Respuesta**: Indudablemente, ante los resultados obtenidos, conviene el préstamo bancario, arroja una menor cuota mensual y el 39.29% de costo efectivo anual  frente al costo de la Tarfjeta de Crédito de 92.73%.

**Ejercicio 210: (MYPE Préstamo bancario para capital de trabajo)**

Un pequeño empresario (ubicado en un distrito popular de alta densidad poblacional) recurre al Banco que ofrece créditos para capital de trabajo a las pequeñas empresas y solicita  S/. 20,000 en préstamo. El empresario cumple con los requisitos, pero según INFOCORP mantiene obligaciones pendientes como garante, por lo cual el Banco le rebaja el préstamo a  UM 15,000 para su pago en 9 cuotas de fin de mes. El Banco en la publicidad impresa que distribuye indica que sus tasas en MN son de 2.53% mensual.

Determine el costo real del préstamo.

**Solución:**

VA = 15,000;   n = 9;   i = 0.0253;   TEA = ?;   C = ?

1º Calculamos la cuota mensual a pagar y el costo efectivo del préstamo, con los datos de la publicidad del Banco:

**Sintaxis**
**PAGO(tasa;nper;va;vf;tipo)**

| Tasa | Nper | VA | VF | Tipo | PAGO |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.0253 | 9 | -15,000 | | | 1,884.52 |

Después del abono de los S/. 15,000 en su cuenta corriente, el cliente recibe del banco el siguiente cronograma de pagos:

| PROXIMO VENC. | SALDO CAPITAL | AMORTIZA. | INTERESES | SEGURO | PORTES | CUOTA |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 30/07/03 | 15,000.00 | 1,441.75 | 550.30 | 6.95 | 5.00 | 2,004.00 |
| 30/08/03 | 13,558.25 | 1,478.52 | 513.99 | 6.28 | 5.00 | 2,004.00 |
| 30/09/03 | 12,079.73 | 1,535.27 | 457.94 | 5.59 | 5.00 | 2,004.00 |
| 30/10/03 | 10,544.46 | 1,607.28 | 386.84 | 4.88 | 5.00 | 2,004.00 |
| 30/11/03 | 8,937.19 | 1,655.91 | 338.81 | 4.14 | 5.00 | 2,004.00 |
| 30/12/03 | 7,281.28 | 1,728.49 | 267.13 | 3.37 | 5.00 | 2,004.00 |
| 30/01/04 | 5,552.79 | 1,785.84 | 210.50 | 2.57 | 5.00 | 2,004.00 |
| 29/02/04 | 3,766.95 | 1,859.05 | 138.20 | 1.74 | 5.00 | 2,004.00 |
| 30/03/04 | 1,907.90 | 1,907.90 | 69.99 | 0.88 | 5.00 | 1,983.77 |

DESGRAVAMEN CREDITO PERSONAL (POLIZA ABCD)

Los pagos netos mensuales según el Banco son S/. 2,004.00 en promedio.

Este cronograma lo comparamos con el elaborado por nosotros con los datos publicitados por el banco, incluyendo los portes y el seguro de desgravámen:

| PROX. VENC. | SALDO INICIAL | AMORTIZA. | INTER. | SEG. | PORTES | CUOTA | PAGOS NETOS | SALDO FINAL |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | | | 15,000.00 |
| 1 | 15,000.00 | 1,505.02 | 379.50 | 6.95 | 5.00 | 1,884.52 | 1,896.47 | 13,494.98 |
| 2 | 13,494.98 | 1,543.09 | 341.42 | 6.49 | 5.00 | 1,884.52 | 1,896.01 | 11,951.89 |
| 3 | 11,951.89 | 1,582.13 | 302.38 | 5.79 | 5.00 | 1,884.52 | 1,895.31 | 10,369.75 |
| 4 | 10,369.75 | 1,622.16 | 262.35 | 4.89 | 5.00 | 1,884.52 | 1,894.41 | 8,747.59 |
| 5 | 8,747.59 | 1,663.20 | 221.31 | 4.28 | 5.00 | 1,884.52 | 1,893.80 | 7,084.39 |
| 6 | 7,084.39 | 1,705.28 | 179.23 | 3.38 | 5.00 | 1,884.52 | 1,892.90 | 5,379.10 |
| 7 | 5,379.10 | 1,748.43 | 136.09 | 2.66 | 5.00 | 1,884.52 | 1,892.18 | 3,630.68 |
| 8 | 3,630.68 | 1,792.66 | 91.86 | 1.75 | 5.00 | 1,884.52 | 1,891.27 | 1,838.02 |
| 9 | 1,838.02 | 1,838.02 | 46.50 | 0.88 | 5.00 | 1,884.52 | 1,890.40 | - 0.00 |

La cuota a pagar según nuestros cálculos es S/. 1,884.52 mensual, debiendo sumar a esta cuota seguro y portes.

El Banco calcula la cuota a pagar con una tasa periódica global que incluye seguro y portes. Siendo el costo real del préstamo el siguiente:

VA = 15,000; n = 9; C = 2,004; i = ?

Tasa mensual TIR y TEA:

**Sintaxis**

**TIR**(**valores**;estimar)

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | TIR |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -15,000 | 2,004 | 2,004 | 2,004 | 2,004 | 2,004 | 2,004 | 2,004 | 2,004 | 1,983.77 | 0.0383 |

[43B] $\textbf{TEA}=(1.0383)^{12}-1= 0.5699$

**Respuesta**:

El costo efectivo anual publicitado por el Banco es 39.96%

El costo efectivo anual real del préstamo bancario es 56.99%

## Ejercicio 211 (MYPE propuesta de inversión)

Un pequeño empresario recibe la oferta para colocar su dinero en los siguientes instrumentos bancarios de «Cash Management»:

| | PRODUCTO | RENDIMIENTO ( *i* ) | |
|---|---|---|---|
| a) | Certificado Royal | 0.62% | bimensual vencido |
| b) | Fondo Mutuo | 0.58% | mensual adelantado |
| c) | Telebono | 9.00% | a tres años vencido |
| d) | Multi-inversión | 0.86% | trimestral adelantado |
| e) | Certificado Platinum | 2.50% | semestral vencido |

El empresario dispone para esta operación de UM 225,000 y decide colocarlos en una proporción de UM 15,000, UM 30,000, UM 45,000 y así sucesivamente hasta agotar el total. El empresario desea saber cuál será su utilidad al final del primer año.

**Solución:**

1º Uniformizamos las tasas de interés, para ello aplicamos las fórmulas de equivalencias de tasas, que operan sólo con tasas periódicas:

$ia_{\text{Fondo Mutuo}} = 0.0058$; $ia_{\text{Multi-inversión}} = 0.0086$; $iv = ?$

$$[A] \quad \boldsymbol{iv} = \frac{0.0058}{1-0.0058} = 0.005834$$

$$[A] \quad \boldsymbol{iv} = \frac{0.0086}{1-0.0086} = 0.008675$$

2º Invertimos los UM 225,000 en la proporción indicada, de menor a mayor, para ello ordenamos las tas de menor a mayor. Cada monto de inversión varía en UM 15,000 de un instrumento a otro:

| INVER. | | PRODUCTO | TIPO | TASA PERIODICA | *n* |
|---|---|---|---|---|---|
| 15,000 | b) | Fondo Mutuo | mensual vencido | 0.005834 | 12 |
| 30,000 | a) | Certificado Royal | bimensual vencido | 0.0062 | 4 |
| 45,000 | d) | Multi-inversión | trimestral vencido | 0.008675 | 3 |
| 60,000 | e) | Certificado Platinum | semestral vencido | 0.0250 | 2 |
| 75,000 | c) | Telebono | anual vencido | 0.0300 | 1 |
| 225,000 | | | | | |

3º Para obtener el valor de fin de año aplicamos indistintamente la fórmula [19] o la función financiera VF de Excel. Todas las tasas de interés están expresadas como tasas vencidas:

**Sintaxis**
**VF**(**tasa**;**nper**;**pago**;va;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VA | Tipo | VF |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.005834 | 12 | | -15,000 | | 16,084.48 |
| 0.006200 | 4 | | -30,000 | | 30,750.95 |
| 0.008675 | 3 | | -45,000 | | 46,181.31 |
| 0.025000 | 2 | | -60,000 | | 63,037.50 |
| 0.030000 | 1 | | -75,000 | | 77,250.00 |
| | VALOR FUTURO TOTAL | | | | 233,304.24 |

4º Para el cálculo de la ganancia a fines del primer año, elaboramos el cuadro, en el que sustraemos la inversión del valor futuro y obtenemos la ganancia por producto financiero y la ganancia total al final del primer año. Para ello aplicamos la fórmula del rédito:

$$[1] \quad \boldsymbol{r} = \frac{\text{VF - VA}}{\text{VA}}$$

| VALOR FUTURO | VALOR ACTUAL | GANANCIA POR PRODUCTO | % DE RENDIMIENTO |
|---|---|---|---|
| 16,084.48 | 15,000 | 1,084.48 | 7.23% |
| 30,750.95 | 30,000 | 750.95 | 2.50% |
| 46,181.31 | 45,000 | 1,181.31 | 2.63% |
| 63,037.50 | 60,000 | 3,037.50 | 5.06% |
| 77,250.00 | 75,000 | 2,250.00 | 3.00% |
| GANACIA A FDA TOTAL | | 8,304.24 | 3.69% |

FDA = Fin de Año

**Respuesta**: Finalmente la ganancia global del inversionista al final de año (FNA) es de UM 8,304.24 ó 3.69% sobre su inversión global. Estos resultados consideran el valor del dinero en el tiempo. El rendimiento de 3.69% es la tasa global promedio de la inversión en un año. Los rendimientos por producto están expresados en el cuadro.

**Ejercicio 212 (MYPE buscando la mejor alternativa de financiamiento)**

Un pequeño empresario (conocedor de las matemáticas financieras), desea adquirir con financiamiento una red con 30 terminales para el negocio de cabinas de internet, cuyo costo es de UM 20,000. Para esta operación cuenta con varias propuestas y solicita otra a su banco. El banco le alcanza la siguiente oferta:

1. 30% de inicial. Financiamiento a 48 meses, con 2 meses de gracia (en los dos primeros los abonos son solo intereses y amortiza en las 46 restantes), a una tasa de 2.6% mensual vencido, más 1.4% de comisión de desembolso por única vez y 0.5% adicional mensual por seguros contra todo riesgo. Esta propuesta la compara con otras tres: de dos bancos y un proveedor:
2. **BANCO A:** 35% de inicial, con 48 cuotas iguales de UM 450, coincidiendo el pago de la primera cuota con el día del desembolso.
3. **BANCO B:** 25% de inicial, con un balance de compensación (retención que es devuelto al pago de la última cuota) de 6% sobre lo desembolsado, una tasa de interés de 12% anual adelantada y plazo de 48 meses.
4. **COMPU S.A.:** le ofrece el financiamiento con 20% de inicial, 3 meses de gracia, financiamiento a 48 meses (los 3 primeros son de gracia y 45 para amortizar) pagando 45 letras mensuales vencidas de UM 510.

Deseamos saber, cuál es la TEA de cada operación y cuál resulta la mejor alternativa.

**Solución (1)**: Según su banco

VA = 14,000 (20,000 – 30% CI); n = (48 -2) = 46; i = 0.026; C = ?

1º Calculamos la cuota mensual con la fórmula [25] o la opción BUSCAR OBJETIVO, a partir del tercer período.

$$[25]\quad \mathbf{C} = 14{,}000\left\langle\frac{0.026(1+0.026)^{46}}{(1+0.026)^{46}-1}\right\rangle = \text{ UM } 525.30$$

2º Calculamos el costo efectivo del préstamo.

| MESES | PRESTAMO | 1.4% COM. DESEMB. | PAGOS NETOS | SALDO FINAL |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 14,000.00 | 196.00 | | -13,804.00 |
| 1 | | | 434.00 | 434.00 |
| 2 | | | 434.00 | 434.00 |
| 3 | | | 595.30 | 595.30 |
| 4 | | | 594.49 | 594.49 |
| 5 | | | 593.66 | 593.66 |
| 46 | | | 532.78 | 532.78 |
| 47 | | | 530.35 | 530.35 |
| 48 | | | 527.86 | 527.86 |
| | | | | **3.18%** |

La TIR representa la tasa periódica del préstamo; siendo la tasa efectiva anual de la obligación:

$$[43B]\quad \mathbf{TEA} = (1.0318)^{12} - 1 = 0.4559$$

El costo efectivo anual de su Banco es 45.59%.

**Solución (2)**: Según BANCO A, pagos anticipados

VA = 13,000 (14,000 – 35% CI); n = 48; C = 450; i = ?

1º Calculamos la tasa de interés del préstamo, aplicando la función TASA de Excel:

**Sintaxis**
**TASA(nper;pago;va**;vf;tipo;estimar)

| Nper | Pago | VA | VF | TASA |
|---|---|---|---|---|
| 48 | 450 | - 13,000 | | 2.299% |

2º Elaboramos el cuadro de AMORTIZACIÓN DE LA DEUDA:

| MESES | SALDO INICIAL | INTERÉS | AMORTZ | PAGO | SALDO FINAL |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 13,000.00 | 298.84 | 151.16 | 450.00 | 12,848.84 |
| 1 | 12,848.84 | 295.37 | 154.63 | 450.00 | 12,694.21 |
| 2 | 12,694.21 | 291.81 | 158.19 | 450.00 | 12,536.02 |
| 3 | 12,536.02 | 288.18 | 161.82 | 450.00 | 12,374.20 |
| 4 | 12,374.20 | 284.46 | 165.54 | 450.00 | 12,208.66 |
| 5 | 12,208.66 | 280.65 | 169.35 | 450.00 | 12,039.31 |
| 46 | 869.89 | 20.00 | 430.00 | 450.00 | 439.89 |
| 47 | 439.89 | 10.11 | 439.89 | 450.00 | 0.00 |
| 48 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |

Como la primera cuota es pagada al momento del desembolso del préstamo y en el mes 48 no existe pago alguno. La cuota está compuesta por el interés y la amortización. El costo efectivo del préstamo del Banco A es:

[43B] $\textbf{TEA} = (1.02299)^{12} - 1 = 0.3136$

El costo efectivo anual del Banco A es 3136%.

**Solución (3)**: Según BANCO B, pagos vencidos

VA = 15,000(20,000 – 25% CI); n = 45; i = 0.01(0.12/12); C = ?

1º Calculamos el valor de cada una de las cuotas:

**Sintaxis**
**PAGO(tasa;nper;va**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | VA | VF | Tipo | PAGO |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.01 | 48 | -15,000 | | | 395.01 |

2º Elaboramos la tabla de amortización de la deuda:

| AÑOS | SALDO INICIAL | INTERÉS | AMORTZ | PAGO | SALDO FINAL |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | 150 | | 150 | 15,000 |
| 1 | 15,000 | 148 | 245 | 395.01 | 14,755 |
| 2 | 14,755 | 145 | 247 | 395.01 | 14,508 |
| 3 | 14,508 | 143 | 250 | 395.01 | 14,258 |
| 46 | 1,162 | 8 | 383 | 395.01 | 778 |
| 47 | 778 | 4 | 387 | 395.01 | 391 |
| 48 | 391 | 0 | 391 | 395.01 | 0 |

3º Elaboramos el flujo de caja:

| MESES | PRESTAMO | RETENCION 4% | PAGOS | RETENCION | FLUJO NETO |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 15,000.00 | 600.00 | 150.00 | | -14,250.00 |
| 1 | | | 395.01 | | 395.01 |
| 2 | | | 395.01 | | 395.01 |
| 3 | | | 395.01 | | 395.01 |
| 4 | | | 395.01 | | 395.01 |
| 5 | | | 395.01 | | 395.01 |
| 46 | | | 395.01 | | 395.01 |
| 47 | | | 395.01 | | 395.01 |
| 48 | | | 395.01 | 600.00 | -204.99 |
| **TIR** | | | | | **1.12%** |

El cliente recibe en el momento [0] inicial UM 15,000 menos los intereses del primer mes y menos la retención del 4%, que le es reembolsado al pago de la última cuota. Esta información es pertinente para el cálculo del costo real de la deuda. La cuota periódica de UM 395.01 mensual, es calculada con el valor nominal del préstamo y seguimos pagando al final de cada vencimiento. Esta cuota está formada por la amortización de capital de dicho plazo, más los intereses del período anterior. La última cuota no paga intereses, los intereses de esta cuota fueron pagados en el mes anterior.

4º Calculamos la TEA, del préstamo:

[43B] $\textbf{TEA}=(1.0112)^{12}-1=\ 0.1430$

El costo efectivo del préstamo del Banco B, es de 14.30% anual

**Solución (4)**: Según COMPU S.A.

VA = 16,000(20,000 – 20% CI); n = 45 (-3); C = 510; i = ?

1º Calculamos la tasa periódica del préstamo, aplicando la función TASA:

**Sintaxis**
**TASA**(**nper**;**pago**;**va**;vf;tipo;estimar)

| Nper | Pago | VA | VF | TASA |
|---|---|---|---|---|
| 45 | 510 | - 16,000 | | 0.016842 |

Luego, elaboramos la Tabla de Amortización de la operación, aplicando los procedimientos ya conocidos:

| MESES | SALDO INICIAL | INTERÉS | AMORTZ | PAGO | SALDO FINAL |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | 16,000.00 |
| 1 | 16,000.00 | | | | 16,000.00 |
| 2 | 16,000.00 | | | | 16,000.00 |
| 3 | 16,000.00 | | | | 16,000.00 |
| 4 | 16,000.00 | 98.90 | 309.49 | 408.39 | 15,690.51 |
| 5 | 15,690.51 | 96.99 | 311.40 | 408.39 | 15,379.12 |
| 6 | 15,379.12 | 95.06 | 313.32 | 408.39 | 15,065.79 |
| 47 | 809.26 | 5.00 | 403.38 | 408.39 | 405.88 |
| 48 | 405.88 | 2.51 | 405.88 | 408.39 | 0.00 |

El costo efectivo del préstamo del Banco A es:

[43B] $\textbf{TEA}=(1.016842)^{12}-1=\ 0.2219$

El costo efectivo de COMPU S.A. es de 22.19% anual

**CUADRO COMPARATIVO DE COSTO EFECTIVO**

| ENTIDAD FINANCIERA | TASA PERIODICA | TASA NOMINAL | TASA EFECTIVA (TEA) |
|---|---|---|---|
| Su BANCO | 3.18% | 38.16% | 45.59% |
| Banco A | 2.299% | 27.59% | 31.36% |
| Banco B | 1.12% | 13.44% | 14.30% |
| COMPU S.A. | 1.68% | 20.16% | 22.19% |

**Respuesta:** A simple vista del cuadro comparativo la mejor decisión sería comprar a través del Banco B, es el que tiene el menor costo efectivo anual.

**Ejercicio 213 (Financiamiento para asociación de gráficos)**

Los asociados de una unidad de producción gráfica, requieren financiamiento para la adquisición de una impresora offset de dos cuerpos y una guillotina trilateral. Requerimos elaborar los esquemas de pago para el financiamiento de todos los equipos, por ello consideramos:

1. La aplicación de los sistemas de pago: de cuotas constantes (método francés) y amortizaciones iguales con intereses al rebatir.
2. Aplique la tasa de interés anual vencida y anual adelantada para ambos casos.
3. La tasa de interés anual adelantada es igual a 30%.
4. Considerar el plazo de 5 años (60 meses)
5. El monto a financiar representa el 70% del costo total de los equipos, que totaliza UM 200,000.

**Describa**:

Cuál de los esquemas de pago conviene a los asociados.

**Solución:**

VA = 140,000; ia = 0.025 (0.30/12); n = 60; iv = ?

Con la fórmula de equivalencias de tasas, convertimos la tasa anticipada en tasa vencida:

$$[A] \quad \boldsymbol{iv} = \frac{0.025}{1\text{-}0.025} = 0.0256$$

1A) CRONOGRAMA DE PAGO EN CUOTAS CONSTANTES CON INTERESES VENCIDOS AL REBATIR.

| AÑOS | SALDO INICIAL | INTERÉS | AMORTZ | PAGO | SALDO FINAL |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | 140,000.00 |
| 1 | 140,000.00 | 3,584.00 | 1,007.59 | 4,591.59 | 138,992.41 |
| 2 | 138,992.41 | 3,558.21 | 1,033.38 | 4,591.59 | 137,959.03 |
| 3 | 137,959.03 | 3,531.75 | 1,059.83 | 4,591.59 | 136,899.20 |
| 4 | 136,899.20 | 3,504.62 | 1,086.97 | 4,591.59 | 135,812.23 |
| 5 | 135,812.23 | 3,476.79 | 1,114.79 | 4,591.59 | 134,697.44 |
| 59 | 8,842.20 | 226.36 | 4,365.23 | 4,591.59 | 4,476.98 |
| 60 | 4,476.98 | 114.61 | 4,476.98 | 4,591.59 | 0.00 |

1B) CRONOGRAMA DE PAGOS CON AMORTIZACIONES IGUALES CON INTERESES VENCIDOS AL REBATIR:

| AÑOS | SALDO INICIAL | INTERÉS | AMORTZ | PAGO | SALDO FINAL |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | 140,000.00 |
| 1 | 140,000.00 | 3,584.00 | 2,333.33 | 5,917.33 | 137,666.67 |
| 2 | 137,666.67 | 3,524.27 | 2,333.33 | 5,857.60 | 135,333.33 |
| 3 | 135,333.33 | 3,464.53 | 2,333.33 | 5,797.87 | 133,000.00 |
| 4 | 133,000.00 | 3,404.80 | 2,333.33 | 5,738.13 | 130,666.67 |
| 5 | 130,666.67 | 3,345.07 | 2,333.33 | 5,678.40 | 128,333.33 |
| 59 | 4,666.67 | 119.47 | 2,333.33 | 2,572.27 | 2,333.33 |
| 60 | 2,333.33 | 59.73 | 2,333.33 | 2,572.27 | 0.00 |

2A) CRONOGRAMA DE PAGOS EN CUOTAS CONSTANTES CON INTERESES ADELANTADOS AL REBATIR:

| AÑOS | SALDO INICIAL | INTERÉS | AMORTZ | PAGO | SALDO FINAL |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | 3,500.00 | | | 140,000.00 |
| 1 | 140,000.00 | 3,474.26 | 1,029.48 | 4,529.48 | 138,970.52 |
| 2 | 138,970.52 | 3,447.88 | 1,055.21 | 4,529.48 | 137,915.31 |
| 3 | 137,915.31 | 3,420.84 | 1,081.59 | 4,529.48 | 136,833.72 |
| 4 | 136,833.72 | 3,393.13 | 1,108.63 | 4,529.48 | 135,725.09 |
| 5 | 135,725.09 | 3,364.72 | 1,136.35 | 4,529.48 | 134,588.74 |
| 59 | 8,730.22 | 110.48 | 4,311.22 | 4,529.48 | 4,419.00 |
| 60 | 4,419.00 | 0.00 | 4,419.00 | 4,529.48 | 0.00 |

2B) CRONOGRAMA DE PAGOS CON AMORTIZACIONES IGUALES CON INTERESES ADELANTADOS AL REBATIR:

| AÑOS | SALDO INICIAL | INTERÉS | AMORTZ | PAGO | SALDO FINAL |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | 3,500 | | | 140,000 |
| 1 | 140,000 | 3,442 | 2,333 | 5,833 | 137,667 |
| 2 | 137,667 | 3,383 | 2,333 | 5,775 | 135,333 |
| 3 | 135,333 | 3,325 | 2,333 | 5,717 | 133,000 |
| 4 | 133,000 | 3,267 | 2,333 | 5,658 | 130,667 |
| 5 | 130,667 | 3,208 | 2,333 | 5,600 | 128,333 |
| 59 | 4,667 | 58 | 2,333 | 2,567 | 2,333 |
| 60 | 2,333 | 0 | 2,333 | 2,567 | 0 |

El cliente recibe en el momento inicial: el préstamo menos los intereses del primer mes.

Calculando la TEA de cada forma de pago:

ia = 0.025; iv = 0.0256; n = 60; TEA = ?

[43B] $\mathbf{TEA}_{VENCIDO}=(1.025)^{12}-1=\ 0.3449$

[43B] $\mathbf{TEA}_{ADELANTADO}=(1.0256)^{12}-1=\ 0.3544$

**Respuesta:** Recomendamos asumir el préstamo en el sistema de pago en cuotas constantes con intereses vencidos al rebatir (1A). El costo efectivo del préstamo es menor.

# Capítulo 6

# Empréstitos, Bonos, Sistema de Equilibrio y Casos Comunes en los Negocios...

## 1. Empréstito

Es el préstamo que toma el Estado, corporación, o empresa, con el fin de financiar proyectos de desarrollo. Es una financiación a largo plazo en un volumen de dinero importante, que por su magnitud, no está al alcance de los bancos porque un préstamo de este tipo a un solo cliente supone una concentración de riesgo muy alto para una entidad financiera.

Generalmente está representado por títulos negociables en bolsa, nominativos o al portador colocado en el mercado interno o externo. Es una modalidad de financiación que permite acudir directamente al mercado, en lugar de ir a una entidad financiera.

La entidad divide el préstamo o **empréstito de obligaciones** en un gran número de pequeñas partes alícuotas denominadas **obligaciones**, que coloca entre multitud de inversores. Estas partes del empréstito vienen representadas por «títulos-valores». Todos los «títulos-valores» correspondientes a una misma emisión presentan las mismas características: importe, tipo, vencimiento, etc. La entidad que emite los títulos es el **«emisor»**, mientras que el inversor que los suscribe es el **«obligacionista».** La fórmula general del valor del empréstito es expresada así:

$$\boxed{\textbf{Valor del empréstito} = \text{Número de Obligaciones} \times \text{Valor nominal}}$$

Por último, la sociedad deberá devolver la cantidad recibida y los intereses pactados mediante el sistema de amortización establecido en las condiciones de emisión del empréstito.

### 1.1. Valor de emisión y valor de reembolso

La explicación de una serie de conceptos referente a los empréstitos lo vamos a efectuar a través de un sencillo ejemplo:

Consideremos una institución (pública o privada) que emite un empréstito, representado por 15,000 obligaciones con un valor nominal de UM 10,000 cada una, emitidas al 85% y reembolsables al 115%. La amortización es cada 5 años, a un ritmo de 3,000 títulos anuales.

Generalmente en éste y en cualquier empréstito distinguimos las siguientes expresiones:

a) **Valor nominal (UM 10,000) VN:** Importe del título sobre el que son pagados los intereses.

b) **Valor de emisión:** Importe que el suscriptor / inversor u obligacionista desembolsa por la adquisición del título.

VN x % de emisión = UM 10,000 x 85% = UM 8,500

c) **Valor de reembolso**: Importe que percibirá el inversionista en el momento que su obligación sea amortizada.

VN x % de reembolso = UM 10,000 x 115% = 11,500

d) **Prima de reembolso**: Diferencia entre el valor de reembolso de la obligación y el valor nominal de la misma.

11,500 – 10,000 = UM 1,500

e) **Prima o quebranto de emisión**: Diferencia entre el valor nominal de la obligación y su valor de emisión.

10,000 – 8,500 = UM 1,500

La prima o quebranto de emisión y prima de reembolso incrementan la rentabilidad del empréstito para el inversor / suscriptor de las obligaciones, facilitando así su venta en el mercado.

## 1.2. Emisión

La emisión de obligaciones y bonos significa incurrir –en la mayoría de casos-, en costos financieros explícitos (intereses sobre el valor nominal, los cupones) y de costos implícitos (prima de reembolso, el quebranto de emisión, etc.).

Usualmente, las primas de emisión y reembolso constituyen la **rentabilidad implícita**, en relación al suscriptor/inversor de la obligación, que es quien percibirá a la amortización de las obligaciones un importe superior al que ha prestado. Desde el punto de vista del emisor de los títulos, las primas representan un costo de naturaleza financiera (al ser costo de dinero) por el incremento en función al tiempo.

Es decir, que a la fecha de emisión del empréstito la deuda devengada es de UM 8,500/título, que viene a ser la cantidad recibida, deuda que crece al transcurrir el tiempo, por ende, produciéndose intereses implícitos.

## 1.3. Gastos de emisión

La emisión de un empréstito de obligaciones, conlleva incurrir en gastos como: escritura pública, autorizaciones de la Comisión Nacional del Mercado de Valores, publicidad, convocatoria de los obligacionistas, etc.

## 1.4. Intereses

### 1.5.1. Intereses explícitos

Como vimos anteriormente, la emisión de un empréstito constituye el pago de intereses (denominados cupones) en tanto la obligación no está amortizada (viva o en circulación). Interés producido por el simple hecho de que transcurre el tiempo.

### 1.4.2. Intereses implícitos

Están constituidos por las primas de emisión y reembolso y aparecen en el momento de la emisión de la deuda.

**Los «títulos-valores» ofrecen al inversor / suscriptor los siguientes derechos:**

a) Recibir periódicamente intereses por los fondos prestados

b) Recuperar los fondos prestados al vencimiento del empréstito.

**Clasificamos los empréstitos según diversos criterios:**

a) <u>Según el emisor</u>**:** deuda pública (emitida por entidades públicas) y deuda privada (emitida por empresas).

b) <u>Según el vencimiento</u>**:** deuda amortizable (si tiene vencimiento) y deuda perpetua (no tiene vencimiento. No obstante, el emisor suele reservarse el derecho de amortizarla cuando lo considere oportuno).

c) Según la modalidad de amortización**:** con vencimientos periódicos parciales (en cada período es amortizado, un número determinado de títulos o una parte de todos los títulos) y con una única amortización al vencimiento.

d) Según el valor de emisión de los títulos**:** títulos emitidos a la par (emitidos por su valor nominal), títulos bajo la par (emitidos a un precio inferior a su valor nominal) y títulos sobre la par (emitidos a un precio superior a su valor nominal).

e) Según su valor de amortización**:** reembolsables por el nominal (su precio de amortización coincide con su valor nominal) y reembolsables con prima de amortización (su precio de amortización es superior a su valor nominal).

f) Según el pago de intereses**:** pago de intereses periódicos (periódicamente el inversor recibe sus intereses) y «cupón cero» (un único pago de intereses en la fecha de vencimiento final del empréstito).

g) En función de la duración del empréstito**:** Pagarés (vencimiento inferior a 18 meses), Bonos (vencimiento entre 2 y 5 años) y obligaciones (vencimiento normalmente a más de 5 años).

## 1.5. Deuda del Estado

**Deuda Pública,** forma de obtener recursos financieros por el Estado, otros poderes públicos o sus organismos autónomos mediante emisiones de títulos valores, generalmente negociables en Bolsa.

Una empresa cualquiera o un gobierno que desee obtener recursos para satisfacer sus necesidades de capital de trabajo y/o efectuar inversiones para su desarrollo, pueden optar por dos fuentes básicas de financiación:

1. Obtener crédito en una entidad financiera interna o externa.
2. Efectuar la emisión de títulos en el mercado de capitales.

Ambas fuentes significan endeudamiento: este endeudamiento es interno, cuando la empresa o gobierno recurre a fuentes financieras internas o emite bonos («Bonos Soberanos») y es externa cuando el endeudamiento es con entidades financieras externas.

La ventaja de un endeudamiento externo es que ingresan al país beneficiario capitales frescos; las condiciones, plazos y el mismo préstamo están sujetas a la calidad ética de los funcionarios responsables de la negociación.

El servicio de la deuda pública, que incluye el reembolso del principal y el pago de los intereses, es una partida obligada de los presupuestos generales del Estado. La deuda a corto plazo generalmente adquiere la forma de letras y pagarés del Estado. A más largo plazo, están los Bonos y las Obligaciones del Estado.

**Deuda pública según su plazo**:

- ✓ De corto plazo: aquella concertada a plazos menores o igual a un año.
- ✓ De largo plazo: aquella concertada a plazos mayores a un año.

El Estado debe utilizar como fuente de financiación para proyectos de desarrollo (no para gasto ni pago de deuda), la emisión de títulos-valores a corto y largo plazo.

**Bonos del Estado**

Por lo general, son títulos al portador, normalmente negociables en bolsa, con ámbito nacional o internacional e interés fijo o flotante, con base en el LIBOR (London Interbanking Offered Rate), tipo medio de interés, día a día, en el mercado interbancario de Londres, que paga por los créditos que conceden unos bancos a otros), o en otra referencia. Su precio varía inversamente a las variaciones de los tipos de interés. En la mayor parte de los mercados, los precios cotizan limpios, sin incluir intereses, es decir, ex-cupón. Al interés devengado lo llaman cupón corrido.

**Obligaciones del Estado** (vencimiento a 10-30 años)

Estos títulos presentan entre otras las siguientes características**:**

a) Su valor nominal suele ser constante

b) Son suscritos mediante subasta, adjudicándoselo a aquel inversionista que ofrece un precio más elevado

c) Pago de intereses anuales pospagables

d) Amortización a la par

Estos valores son colocados con anterioridad a su emisión:

**Por ejemplo:**

Unas obligaciones a 10 años, que al emitirse el 10 de enero del año 2005, comienzan a colocarse entre los inversores a partir de junio/2004.

En el momento de la colocación el inversor desembolsa el importe de la adquisición, pero el título no comienza a generar intereses hasta que no es emitido.

Este plazo transcurrido entre colocación y emisión debe tenerse en cuenta a la hora de calcular la rentabilidad efectiva del título.

## 1.6. Bono

El Bono es un documento a largo plazo emitido por una empresa privada o el gobierno. Particularmente, el prestatario recibe hoy dinero a cambio de una promesa de pago después, con interés pagado entre el período de efectuado el préstamo y el instante del reembolso. Por lo general, la tasa de interés de los bonos recibe el nombre de cupón.

Existe una amplia gama y formas de bonos. Para nuestro caso, consideramos cuatro clasificaciones generales:

1º. Títulos–valores. Emitidos y respaldados por el gobierno. Son considerados títulos-valores de menor riesgo en el mercado. Los intereses generados casi siempre están exonerados del impuesto a la renta estatal y local. Existen tres tipos de títulos-valores: Certificados mayores o igual a un año; Pagarés de 2 a 10 años y Bonos de 10 a 30 años.

2º. Bono hipotecario. Respaldados por hipotecas o por activos determinados de la empresa que emite los bonos. Existen hasta tres tipos de bonos hipotecarios: de Primera hipoteca, de Segunda Hipoteca y Fideicomiso de equipo. Los bonos de primera hipoteca tienen primera prioridad en el caso de liquidación. Son de más riesgo y consecuentemente, la tasa que pagan es menor. Son referenciados como bonos colaterales los respaldados por una garantía colateral. Un bono de fideicomiso de equipo es aquel en el que el bien comprado a través del bono es usado como una garantía colateral.

3º. Bonos amortizables. No están respaldados por ningún tipo de garantía colateral. Por lo general estos bonos pagan las tasas más altas de interés debido a su mayor riesgo.

**Existen hasta tres tipos de bonos amortizables:**

a) Bono convertible. Es un bono cuyas cláusulas permiten que éste sea convertido en acción de la empresa que lo emitió a un precio prefijado. A cambio, tienen un cupón inferior al que tendría sin la opción de convertibilidad, lo cual el inversor acepta previendo una posible subida del precio de la acción.

b) Bono subordinado. Representa la deuda ubicada una detrás de otra deuda en el caso de reorganización o liquidación de la empresa.

c) Bono especulativo, bono basura o junk bonds**.** En la jerga financiera de EE.UU., título de renta fija y alto rendimiento emitido por compañías cuya solvencia no es de primera clase; sin que a pesar de ello existan expectativas de posible insolvencia.

4º. Bonos municipales. Emitidos por los gobiernos locales. Generalmente estos bonos están exentos del impuesto a la renta. La tasa de interés pagada por estos bonos por lo general es muy baja. Estos bonos pueden ser:

a. Bonos de obligación general. Son emitidos contra los impuestos recibidos por el gobierno local. Es decir estos bonos están respaldados por todo el poder impositivo del emisor.

b. Bonos de ingresos. Son emitidos contra el ingreso generado por el proyecto financiado (planta de tratamiento de agua, energía eléctrica, puente etc.). Lo que no puede hacerse es crear impuestos para el reembolso de los bonos de ingresos.

c. Bonos de cupón cero. Emitido sin cupón de renta (no hay pagos de intereses periódicos). Son negociables con descuento sobre su valor nominal, el cual es redimido a su vencimiento. La TIR surge del diferencial entre el valor nominal y el precio.

d. Bonos de tasa variable. Son aquellos cuyas tasas de los cupones son ajustados a puntos determinados en el tiempo (semanalmente, mensualmente, anualmente, etc.).

e. Bonos de venta. Los bonos de venta brindan al tenedor la oportunidad de hacer efectivo el bono en fechas determinadas (una o más) con anterioridad a su vencimiento.

Las empresas o sociedades agentes de bolsa con el fin de ayudar a los inversionistas califican los bonos de acuerdo con la cuantía de su riesgo asociado con su compra (Calidad AAA de la más alta calidad) hasta DDD (bonos de la peor calidad).

### 1.6.1. Procesos de Bonos e Intereses

Como vimos, un bono no es más que un préstamo. Es un préstamo otorgado a una empresa o gobierno con el dinero de uno o varios prestamistas. El «emisor» del bono (la empresa o gobierno que recibe el préstamo) adquiere el compromiso de pagar a sus «inversores» una tasa de interés por prestarle el dinero (compensación por posponer la posibilidad de un consumo presente) y a rembolsar el valor nominal del bono a su vencimiento. En términos generales, cada préstamo o «emisión» de un bono tiene ciertas y particulares condiciones detalladas en el momento de la emisión. Estas condiciones son: el valor nominal del bono, su tasa de interés o cupón, el período de pago de intereses del bono y su fecha de vencimiento.

El valor nominal. El principal o capital que hace referencia a su denominación; los valores más utilizados son los bonos de: UM 100, 500, 1,000, 10,000 y 50,000. El valor nominal es importante por dos razones:

1. El valor nominal representa la suma global que será pagada al tenedor del bono a la fecha de su vencimiento.
2. El importe del interés **I** pagado por período con anterioridad a la fecha de vencimiento del bono, es calculado multiplicando el valor nominal del bono (***VN***) por su tasa de interés (***ib***) divido entre el período (***nb***), con la siguiente fórmula:

$$[55] \quad I = \frac{VN * ib}{nb}$$

Generalmente un bono es comprado con descuento (menor que el valor nominal) o con una prima (mayor que el valor nominal). Para el cálculo del interés **I** del bono solamente utilizamos el valor nominal y no el precio de compra.

**EJEMPLO 214 (Recibiendo intereses por la compra de bonos)**

Calcular el monto de interés que Jorge recibirá por período si compra un bono de UM 10,000 al 4%, el cual vence dentro de 10 años con intereses pagaderos bimestralmente.

**Solución:**

VN = 10,000; ib = 0.04; nb = (12/2) = 6; I =?

[55] $\boldsymbol{I} = \dfrac{10{,}000*0.04}{6} = $ UM 80 cada 2 meses

**Respuesta**: Jorge recibirá por concepto de intereses UM 80 cada 2 meses adicionales a los UM 10,000 que recibirá al vencimiento del bono.

**EJEMPLO 215 (Recibiendo pagos por invertir en un bono)**

Una empresa fabricante de cocinas y hornos industriales tiene proyectado expandirse y para financiarse recurre a la emisión de bonos de UM 1,000 al 6% para financiar el proyecto. Los bonos vencerán dentro de 10 años con pagos semestrales de interés. El Gerente de la empresa compró uno de los bonos a través de su Agente de Bolsa por UM 900. ¿Cuánto recibirá por concepto de pagos?

**Solución:**

VN = 1,000; ib = 0.06; nb = (12/6) = 2; I =?

[55] $\boldsymbol{I} = \dfrac{1{,}000*0.06}{2} = $ UM 30 cada 6 meses

**Respuesta**: El empresario recibirá UM 1,000 en la fecha de vencimiento del bono, dentro de 10 años; además recibirá cada seis meses el importe de UM 30 por concepto de intereses, conforme el compromiso de la empresa a pagar al momento de la emisión.

### 1.6.2. Factores de riesgo de los bonos

Cada uno de los determinantes del flujo final de fondos de la inversión en un bono son los distintos factores de riesgo de los instrumentos de renta fija, donde los principales son:

1. «Riesgo de default», el riesgo de incumplimiento del emisor;
2. «Riesgo moneda» o riesgo de recibir los pagos de amortización y renta en la moneda pactada o el tipo de cambio que afecte la rentabilidad de la inversión;
3. «Riesgo de liquidez», o riesgo de que las posibilidades de vender el bono (o transferir a un tercero los derechos sobre la amortización y renta del bono antes de su vencimiento) sean limitadas;
4. «Riesgo de inflación» o riesgo de que la inflación erosione el rendimiento final de la inversión;
5. «Riesgo de reinversión» o el riesgo de variación de la tasa de interés a la cual podremos reinvertir el dinero que cobremos por renta o por amortización durante la vigencia del bono;
6. «Riesgo tasa de interés», o riesgo de que cambios en las condiciones generales de la economía impacten en el precio del bono en el mercado.

### 1.6.3. Bono Cupón Cero

Es aquel que no paga intereses durante la vida de la emisión, sino que, los perciben íntegros con la amortización del principal, es vendido con un fuerte descuento sobre el nominal, siendo su precio muy sensible a las variaciones de los tipos de interés. Con frecuencia estos bonos son vendidos con descuentos mayores al 75% de su valor nominal, para hacerlos más atractivos ante los inversionistas. El **bono cortado** es un bono convencional cuyo cupón de intereses es vendido en forma separada de su valor nominal. El comportamiento de éste bono es el de un bono cupón cero.

### 1.6.4. Precio / Tasa. Tasa / Precio

Entender por qué y cómo interrelacionamos estas variables es función de la tasa de Interés. La tasa de interés es la que genera la dinámica de un bono, lo que le da vida.

**EJEMPLO 216 (Préstamo o inversión en un bono)**

a) César propone a Jorge que le preste UM 1,000 por un año, con la promesa de devolverle UM 1,120 al final de este período. Este caso es lo mismo que invertir en un **bono** que vale UM 1,000 (valor nominal) con un rendimiento anual del 12%.

b) Jorge tiene otra propuesta similar en monto y plazo que el anterior, pero la oferta de devolución al final del año no es UM 1,120 sino UM 1,300.

Este segundo caso (bono) vale también UM 1,000, pero con un rendimiento anual del 30%.

Frente a esta segunda oferta, César necesitado de dinero y la seguridad de rembolsar UM 1,120 al final del año, decide mejorar la segunda oferta y propone que además de devolverle al final del año la suma indicada, –le dice- «en lugar de prestarme hoy los UM 1,000, me arreglo con sólo UM 862 que es lo que realmente requiero para el apuro que tengo».

Para calcular el valor del bono que debe ofertar César a Jorge aplicamos la fórmula [21]:

VF = 1,120; ib= 0.30; n = 1; VA =?

$$[21] \quad \boldsymbol{VA} = \frac{1,120}{(1+0.30)^1} = \text{UM } 861.5385$$

Lo que César hizo es bajar el precio del bono a UM 862 y automáticamente le subió la tasa de interés a 30%. Calculamos la tasa (***ib***), aplicando la fórmula [11]:

VF = 1,120; VA = 861.5385; n = 1; ib=?

$$[11] \quad \boldsymbol{ib} = \frac{\frac{1,120}{861.5385}}{1} - 1 = 0.30$$

## 1.6.5. Relación del precio con la tasa de interés

La relación del precio con la tasa de interés es muy importante, como pasamos a demostrarlo:

1) El comportamiento del precio de un bono es contrario a la tasa de interés: si el precio baja la tasa sube y si el precio sube la tasa baja.

   Si el plazo del bono aumenta, para una misma tasa de rendimiento anual le corresponde un precio del bono menor, o bien, para que el precio sea invariable cuando el bono estira su plazo, la tasa debe bajar. Para una misma tasa de interés, el precio baja si el plazo sube.

2) El movimiento del precio de un bono es al revés que el plazo para una misma tasa. El movimiento del precio de un bono se comporta de manera inversa a la tasa y al plazo. Esto último es así porque el «impacto» de la misma tasa anual se «potencia» por la simple acumulación de años: duplica en dos años, triplica en tres años, etc.

3) La sensibilidad del precio del bono frente a cambios en la tasa es creciente a medida que aumenta el plazo del bono. Sensibilidad y plazo guardan una relación directa.

## 1.6.6. Valor actual de los bonos

Cada vez que nos referimos al precio del bono hacemos mención al «valor actual» del monto del vencimiento, o dicho de otra manera, al monto del vencimiento actualizado a la fecha de hoy.

El precio del bono es siempre el monto que, aplicándole la tasa de interés, iguala el importe del vencimiento. Si al valor del vencimiento le descontamos el interés, obtenemos su precio.

El precio es equivalente al «valor actual» del importe del vencimiento «descontado» a la tasa de interés del bono.

Luego, el precio de un bono «es» el «valor actual» de su «flujo de fondos esperado» «descontado» a su tasa de rendimiento.

**EJEMPLO 217 (Cuánto pagaría hoy por un bono...)**

Una persona requiere tener un 10% anual nominal compuesto semestralmente sobre una inversión en bonos, ¿cuánto pagaría hoy por un bono de UM 5,000 al 7% que vencerá dentro de 10 años y paga intereses semestrales?

**Solución:**

VN = 5,000; ib = 0.07; nb = (12/6) = 2; I =?

1º Calculamos el valor del pago de los intereses (cupón) del bono:

$$[55] \quad \boldsymbol{I} = \frac{5{,}000*0.07}{2} = \text{UM} \quad 175 \text{ cada 6 meses}$$

2º Utilizando la tasa de interés por período que la persona prevé recibir: 10% anual compuesto semestralmente, es decir 10%/2 = 5% semestral. La tasa de interés del bono (***ib***) sólo es utilizada para el cálculo del importe del pago de los intereses del bono. **I** es simplemente un valor **C**.

***VA*** = [FORMULA 24] + [FORMULA 21]

I(C) = 175; i = 0.05; n = 20; VF = 5,000; VA =?

$$\boldsymbol{VA} = 175 \left\langle \frac{1.05^{20} - 1}{0.05*1.05^{20}} \right\rangle + \left\langle \frac{5{,}000}{1.05^{20}} \right\rangle = \quad \text{UM} \ \ 4{,}065.33$$

**Sintaxis**

**VA(tasa;nper;pago**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VF | Tipo | VA |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.05 | 20 | -175 | | | 2,180.89 |
| 0.05 | 20 | | -5,000 | | 1,884.45 |
| | | | | VA TOTAL | 4,065.33 |

**Respuesta:**

La persona debe pagar por el bono UM 4,065.33 el día de hoy para asegurarse un 10% anual nominal compuesto semestralmente sobre su inversión. Pagar una cantidad mayor que la indicada significaría una tasa de retorno menor al 10% esperado.

Cuando el período de capitalización del inversionista es menor que el período de intereses del bono, deberá hacerse uso de la fórmula [55], como veremos en el siguiente ejemplo.

**EJEMPLO 218 (Calculando el VA de un bono)**

Determinar el valor actual de un bono de UM 10,000 al 5.8% con intereses pagados semestralmente. Si el inversionista aspira a obtener una rentabilidad del 12% anual compuesto trimestralmente sobre su inversión y el bono vence dentro de 5 años.

**Solución:**

VN = 10,000; ib = 0.058; nb = (12/6)= 2; I =?

$$[55]\quad \boldsymbol{I} = \frac{10{,}000*0.058}{2} = \text{ UM 290 cada 6 meses}$$

Para obtener el VA del bono, trasladamos el pago de intereses de UM 290 hasta el año 0 adicionándolo el VA de UM 10,000 del semestre 10.

1º A partir de la tasa nominal compuesta trimestralmente obtenemos, primero la tasa del trimestre, aplicando la fórmula (44B):

j = 0.12; n = (12/3) = 4; i =?

$$[44B]\quad \boldsymbol{i} = \frac{0.12}{4} = 0.03 \text{ trimestral}$$

2º Recordando que todas las fórmulas del interés compuesto solo operan con tasas efectivas (del período), debemos determinar la tasa efectiva del semestre aplicando la fórmula (43B), que viene a ser asimismo la tasa del periodo:

i = 0.03; n = (0.12/2) = 2; TEA =?

(43B) TEA = $(1.03)^2$ -1 = 0.0609 semestral

3º Aplicando en forma combinada las fórmulas (24) y (21) o la función VA, calculamos el VA del bono:

C(I) = 290; n = (5*2) = 10; i = 0.0609; VN(VF) = 10,000; VA = ?

$$\boldsymbol{VA} = [\text{FORMULA } 24] + [\text{FORMULA } 21]$$

$$\boldsymbol{VA} = 290\left\langle\frac{1.0609^{10}-1}{0.0609*1.0609^{10}}\right\rangle + \frac{10{,}000}{1.0609^{10}} = \text{ UM } 7{,}622$$

**Sintaxis**

**VA**(**tasa**;**nper**;**pago**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | Pago | VF | Tipo | VA |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.0609 | 10 | -290 | | | 2,125.35 |
| 0.0609 | 10 | | -10,000 | | 5,536.76 |
| | | | | VA TOTAL | 7,662.11 |

**Respuesta**: El VA del bono es menor al VN del bono a 10 años, no obstante haberle sumado el VA de los intereses semestrales, por que el precio de un bono es contrario a la tasa de interés. Para que el precio sea invariable cuando el bono estira su plazo, la tasa debe bajar. Para una misma tasa de interés, el precio baja si el plazo sube.

### 1.6.7. La TIR de un bono

*La TIR y la tasa efectiva son dos herramientas que deben utilizarse para tomar decisiones principalmente cuando tratamos de comprar y vender papeles en bolsa.*

La tasa interna de retorno de un bono (TIR). Es la tasa de interés que hace que la suma de los valores actuales de los cupones descontados a esa misma tasa iguale el precio del bono.

**EJEMPLO 219 (Tasa nominal y efectiva de un bono)**

Una persona pagó UM 750 por un bono de UM 1,000 al 6% que vence dentro de 10 años con intereses semestrales. Determinar la tasa nominal y efectiva que recibiría esta persona por su inversión con capitalización semestral.

**Solución:**

VN = 1,000; ib = 0.06; nb = (12/6) = 2; n = 20 (10*2) I = ?

1º. Calculamos el ingreso por la compra de bonos, que viene a ser el interés de los bonos cada 6 meses más el monto nominal dentro de 10 años (20 semestres):

$$[55]\quad \boldsymbol{I} = \frac{1{,}000*0.06}{2} = \text{ UM 30 cada 6 meses}$$

VN = 1,000; I(C) = 30; n = 20; ib(TIR) = ?

$$0 = -750 + 30\left\langle \frac{(1+i)^{20}-1}{i(1+i)^{20}} \right\rangle + \frac{1{,}000}{(1+i)^{20}}$$

2º. Aplicando la función TIR (de 0 al período 20), calculamos la tasa periódica ***i:***

**FLUJO DE CAJA DEL BONO**

| SEMESTRES | VN | PRECIO COMPRA | PAGOS NETOS | FLUJOS NETOS |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1,000 | 750 | 750 | -750 |
| 1 | | | 30 | 30 |
| 2 | | | 30 | 30 |
| 3 | | | 30 | 30 |
| 4 | | | 30 | 30 |
| 18 | | | 30 | 30 |
| 19 | | | 30 | 30 |
| 20 | | | 1,030 | 1,030 |
| TASA INTERNA DE RETORNO (TIR) | | | | 0.0501 |

3º. A partir de esta tasa, aplicando las fórmulas (44A) y (43B) calculamos la tasa nominal y la TEA respectivamente:

(44A) $\boldsymbol{j} = 0.0501*2 = 0.1002$

(43B) $\text{TEA} = (1 + 0.0501)^2 - 1 = 0.1027$

Igual resultado obtenemos con la función INT.EFECTIVO:

**Sintaxis**

**INT.EFECTIVO(int_nominal;núm_per_año)**

| **Int.nominal** | **num_per_año** | **Tasa Efectiva** |
|---|---|---|
| 0.1002 | 2 | 0.1027 |

**Respuesta**: La tasa nominal y efectiva anual con capitalización semestral es:

Tasa Nominal : 10.02%

Tasa Efectiva Anual : 10.27%

## 1.7. Empréstito con amortizaciones parciales de capital

Esta categoría de empréstitos es amortizada con disminuciones parciales de capital. El caso más frecuente de este tipo de empréstitos, es aquél en el que las amortizaciones de capital son uniformes a lo largo de la vida de la operación. Las amortizaciones parciales de capital son calculadas de la siguiente manera:

$$\text{AMORTIZACION}=\frac{\boldsymbol{VA}}{\boldsymbol{n}}$$

**AMORTIZACION** = Amortización
***VA*** = Valor inicial del empréstito
***n*** = Número de períodos

**EJEMPLO 220 (Empréstito con amortizaciones parciales de interés)**

Hacemos una emisión de UM 5,000 millones, representados por 500,000 títulos de UM 10,000 valor nominal cada uno. El plazo es de 5 años y la amortización del principal es en montos uniformes. La tasa de interés es de 7%. Elabore el cuadro de amortización.

**Solución:**

VA = 5,000’000,000; ib = 0.07; n = 5; **AMORTI. =** ?

1º Calculamos la amortización anual:

$$\text{AMORTI.} = \frac{5{,}000}{5} = \text{UM } 1{,}000 \text{ millones}$$

2º Con este resultado elaboramos el cuadro de amortización del empréstito:

| AÑOS | VN CADA TITULO | SALDO VIVO MILLONS | INTERES 7% MILLONS | AMORT. MILLONS | CAPITAL AMORT. MILLONS | CUOTA MILLONS | SALDO FINAL MILLONS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 10,000 | 5,000 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5,000 |
| 1 | | 5,000 | 350 | 1,000 | 1,000 | 1,350 | 4,000 |
| 2 | | 4,000 | 350 | 1,000 | 2,000 | 1,350 | 3,000 |
| 3 | | 3,000 | 280 | 1,000 | 3,000 | 1,280 | 2,000 |
| 4 | | 2,000 | 210 | 1,000 | 4,000 | 1,210 | 1,000 |
| 5 | | 1,000 | 140 | 1,000 | 5,000 | 1,140 | 0 |

SALDO VIVO = SALDO FINAL
INTERES = SALDO VIVO*ib
CUOTA = AMORTI. + INTERES
SALDO FINAL = SALDO VIVO - AMORTI.

## 1.8. Empréstitos sin vencimiento

Esta categoría carece de vencimiento, son perpetuos. Sólo son emitidos por entidades públicas, los pueden amortizar en cualquier momento futuro.

Al no haber amortización del principal, la cuota periódica está formada exclusivamente por los intereses:

$$C = I_{DEL\ PERIODO}$$

La imposición de los intereses será siempre la misma, el saldo vivo permanece invariable (asumiendo también, un tipo de interés fijo durante toda la vida de la operación).

**EJEMPLO 221 (Empréstito sin vencimiento)**

Realizamos una emisión de obligaciones de UM 3,000 millones., sin vencimiento, con un tipo de interés anual del 8%. Determinar el importe de la cuota periódica:

**Solución:**

VA = 3,000; n = 1; i = 0.08; I = C =?

[8] I = 3,000*0.08*1 = UM 240 millones

Luego $C_{PERIODICA}$ = 240 millones

El valor de mercado de este tipo de empréstito (en cualquier momento de su vida), es calculado con la siguiente fórmula:

[56] $V_m = \dfrac{I_s}{i_m}$

$V_m$ = el valor del empréstito
$I_s$ = Interés del período
$i_m$ = el tipo de mercado para emisiones de características similares en el momento de la valoración.

Transcurrido 4 años de la anterior emisión, el tipo de interés para emisiones similares ha subido al 9%. Determinar el valor actual de este empréstito:

**Solución:**

$I_S = 240$; $n = 1$; $i_m = 0.09$; $V_m = ?$

[56] $$\boldsymbol{V_m} = \frac{240}{0.09} = \text{ UM } 2{,}667 \text{ millones}$$

Luego, el valor del empréstito es de UM 2,667 millones., menor que su valor nominal (UM 3,000 millones).

## 1.9. Empréstitos, amortización por sorteo

Son muy utilizados. Son periódicos. Las amortizaciones de un número determinado de títulos son elegidos por sorteo. Las cuotas periódicas incluyen, dos conceptos: El pago de los intereses del período y la amortización de aquellos títulos seleccionados.

### a) Pago periódico de intereses y cuotas periódicas constantes

En este tipo de empréstitos, destaca un modelo particular caracterizado porque sus cuotas periódicas son constantes durante toda la vida del empréstito. Para facilitar la solución, vamos a considerar que el tipo de interés también es constante durante toda la operación.

Para determinar el valor de la cuota periódica aplicamos la fórmula de equivalencia financiera:

[57] $$\boldsymbol{VA_0} = \boldsymbol{C_P} * \boldsymbol{A_0}$$

**$VA_0$** = importe inicial del empréstito
**$C_P$** = importe de la cuota periódica
**$A_0$** = valor actual de una renta constante, pospagable

De aquí podemos despejar el valor de **$C_P$**. Para calcular que parte de esta cuota periódica corresponde a amortización de capital calculamos la correspondiente al primer período:

[58] $$\boldsymbol{C_1} = (\boldsymbol{VA*i*n}) + (\boldsymbol{A_1}*\boldsymbol{VN})$$

El primer paréntesis (***VA*i*n***) corresponde a los intereses del período, mientras que el segundo paréntesis (***A***$_1$****VN***) corresponde a la amortización de capital (siendo $A_1$ el número de títulos que amortizados y VN el valor nominal de cada título).

El importe de los intereses es calculado directamente y seguidamente deducimos el valor de la amortización de capital (y con ella, el número de títulos amortizados).

A partir del número de títulos amortizados en el primer período, es posible calcular el calendario de amortizaciones.

La parte de cada cuota periódica que corresponde a intereses es calculada por diferencia:

| **INTERESES** = CUOTA - AMORTIZACION |
|---|

**EJEMPLO 222 (Cuadro de amortización de empréstito)**

Realizamos una emisión de obligaciones de UM 3,000 millones, distribuida en 3'000,000 de títulos de UM 1,000 valor nominal cada uno, a un plazo de 5 años y tipo de interés del 7.5%. Las cuotas son anuales y constantes. Calcular el cuadro de amortizaciones:

**Solución:** (El VN = 0.001 en millones de UUMM)

VA = 3,000; VN = 0.001; n = 5; t = 1; i = 0.075; $C_P$ =?

1º Calculamos la cuota periódica constante con la fórmula [25] o con la función PAGO:

$$[25]\ \boldsymbol{C_P} = 3{,}000\left\langle\frac{0.075*1.075^5}{1.075^5-1}\right\rangle = \text{UM } 741.49$$

**Sintaxis**

**PAGO**(**tasa**;**nper**;**va**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | VA | VF | Tipo | PAGO |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.075 | 5 | -3,000 | | | 741.49 |

2º Calculamos la cantidad de títulos amortizada en el primer período:

$C_1$ = 741.49

[58] $\boldsymbol{C_1} = (\boldsymbol{VA*i*n}) + (\boldsymbol{A_1}*\boldsymbol{VN})$

[58] $741.49 = (3{,}000*0.075*1) + (A_1*0.001)$

$741.49 - 225 = A_1*0.001$

$$\boldsymbol{A_1} = \frac{516.4942}{0.001} = \text{UM } 516{,}494 \quad \text{TITULOS}$$

3º Con este resultado estamos en condiciones de calcular el número de títulos amortizados en cada uno de los períodos, aplicando para ello sucesivamente la fórmula [19] o la función VF de Excel, ($A_1$ = VA = 516,494):

[19] $\boldsymbol{VF} = VA\ (1+\boldsymbol{i})^n$

**Sintaxis**

**VF**(**tasa**;**nper**;**pago**;va;tipo)

| | Tasa | Nper | Pago | VA | Tipo | $VF = VA\ (1+i)^n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_2$ | 0.075 | 1 | | -516,494 | | 555,231 |
| $A_3$ | 0.075 | 2 | | -516,494 | | 596,874 |
| $A_4$ | 0.075 | 3 | | -516,494 | | 641,639 |
| $A_5$ | 0.075 | 4 | | -516,494 | | 689,762 |

4º Con esta información podemos elaborar el cuadro de amortizaciones:

| AÑOS | CANTIDAD TITULOS | | | CUOTA PERIODICA | | | SALDO VIVO MILLONS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | VIVOS | AMORT.x PERIODO | AMORT. ACUMUL. | AMORT. CAPITAL MILLONS | INTER. MILLONS | CUOTA PERIODI MILLONS | |
| 0 | 3,000,000 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3,000 |
| 1 | 2,483,506 | 516,494 | 516,494 | 516 | 225 | 741 | 2,484 |
| 2 | 1,928,275 | 555,231 | 1,071,725 | 555 | 186 | 741 | 1,928 |
| 3 | 1,331,401 | 596,874 | 1,668,599 | 597 | 145 | 741 | 1,331 |
| 4 | 689,762 | 641,639 | 2,310,238 | 642 | 100 | 741 | 690 |
| 5 | 0 | 689,762 | 3,000,000 | 690 | 52 | 741 | 0 |

VIVOS = CANT. TITULOS - CANT. AMORT. x PERIODO
AMORT.CAPITAL = CANT. AMORT.xPERIODO*0.001
INTERESES = CUOTA - AMORT.
SALDO VIVO = SALDO - AMORT.

Trabaje la tabla con todos los decimales, para obtener los dos saldos cero.

### b) Pago periódico de intereses y amortización de capital constante

Otra modalidad de empréstitos de mucho uso. Para el cálculo del número de títulos amortizados en cada período empleamos la siguiente fórmula:

[59] $$\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{p}}$$

**Nomenclatura:**

**A** = número de títulos amortizados en cada periodo
**T** = número total de títulos emitidos
**p** = número de períodos

Para saber como evoluciona la cantidad de títulos en circulación y con ello el saldo vivo del empréstito, es necesario conocer la cantidad de títulos amortizados en cada período.

### EJEMPLO 223 (Cuadro de amortización de empréstito)

Emiten obligaciones por UM 30,000 millones, a 5 años y con un tipo de interés del 7%. Contiene la emisión 10,000,000 de títulos, con un valor nominal de UM 30,000 cada uno. Amortizamos el mismo número de títulos en cada período. Calcular el cuadro de amortizaciones:

**Solución:**

T = 10’000,000;  p = 5;   VN = 0.001;    A =?

1º Calculamos la cantidad de títulos amortizados en cada período:

[59] $$\boldsymbol{A} = \frac{10'000,000}{5} = \text{ UM } 2'000,000$$

2º Elaboramos la tabla de amortización de la obligación:

| AÑOS | CANTIDAD TITULOS | | | CUOTA PERIODICA | | | SALDO VIVO MILLONS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | VIVOS | AMORT.x PERIODO | AMORT. ACUMUL. | AMORT. CAPITAL MILLONS | INTER. MILLONS | CUOTA PERIODI MILLONS | |
| 0 | 10,000,000 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 10,000 |
| 1 | 8,000,000 | 2,000,000 | 2,000,000 | 2,000 | 700 | 2,700 | 8,000 |
| 2 | 6,000,000 | 2,000,000 | 4,000,000 | 2,000 | 560 | 2,560 | 6,000 |
| 3 | 4,000,000 | 2,000,000 | 6,000,000 | 2,000 | 420 | 2,420 | 4,000 |
| 4 | 2,000,000 | 2,000,000 | 8,000,000 | 2,000 | 280 | 2,280 | 2,000 |
| 5 | 0 | 2,000,000 | 10,000,000 | 2,000 | 140 | 2,140 | 0 |

VIVOS = CANT. TITULOS - CANT. AMORT. x PERIODO
AMORT.CAPITAL = CANT. AMORT.xPERIODO*0.001
INTERESES = SALDO VIVO*7%
SALDO VIVO = SALDO - AMORT.

### 1.10. Empréstitos Cupón cero

Los empréstitos con un único pago de intereses en el momento de amortización de los títulos, son de cupón cero. Dentro de este tipo de empréstitos destacan dos variantes:

a) Cuotas periódicas constantes

b) Amortización del mismo número de títulos en cada período

#### a) Cuotas periódicas constantes

Es diferente de los empréstitos con pago de intereses periódicos y cuota constante, en que la cuota periódica considera intereses sobre el saldo vivo, mientras que los de cupón cero sólo incluyen los intereses acumulados de los títulos amortizados en ese período. Por simplificación consideraremos que el tipo de interés es constante durante toda la vida del empréstito.

Para determinar el número de títulos amortizados en cada período, empezamos conociendo los del primero:

[60] $C_1 = (VA*i*n) + (1 + i)$

$A_1$ = número de títulos amortizados en el primer período
$VN$ = valor nominal de cada título

**EJEMPLO 224 (Cuadro de amortización de empréstito)**

Emiten obligaciones por UM 6,000 millones, 1'000,000 de títulos, con un valor nominal de UM 6,000 cada uno. La duración es de 5 años y tipo de interés constante del 8%. Las cuotas anuales son constantes y los intereses son pagados en el momento de amortización de cada título. Elaborar el cuadro de amortizaciones:

**Solución:** (el VN del título está expresado en millones de UM)

$i = 0.08$; $n = 5$; $VA = 6,000$; $VN = 0.006$; $C_P = ?$

1º Calculamos la cuota periódica, aplicando la fórmula [25] o la función PAGO:

**Sintaxis**

**PAGO**(**tasa**;**nper**;**va**;vf;tipo)

| Tasa | Nper | VA | VF | Tipo | PAGO |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.08 | 5 | -6,000 | | | **1,503** |

2º A continuación calculamos el número de títulos amortizados en el primer período:

[60] $\boldsymbol{C_1 = (VA*i*n) + (1 + i)}$

[60] $1,502.74 = (A_1*0.006) + (1 + 0.08)$

$$\boldsymbol{A}_1 = \frac{1,502.74}{0.00648} = 231,904 \text{ TITULOS}$$

3º Calculamos el número de títulos amortizados del período dos al cinco, aplicando sucesivamente la fórmula [21] o la función VA de Excel:

**Sintaxis**

**VA**(**tasa**;**nper**;**pago**;vf;tipo)

| | Tasa | Nper | Pago | VF | Tipo | VA = VF/(1 + i)$^n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_2$ | 0.08 | 1 | | -231,904.32 | | 214,726 |
| $A_3$ | 0.08 | 2 | | -231,904.32 | | 198,821 |
| $A_4$ | 0.08 | 3 | | -231,904.32 | | 184,093 |
| $A_5$ | 0.08 | 4 | | -231,904.32 | | 170,457 |

4º Finalmente, con las cifras obtenidas elaboramos el cuadro de amortizaciones:

| AÑOS | CANTIDAD TITULOS | | | CUOTA PERIODICA | | | SALDO VIVO MILLONS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | VIVOS | AMORT.x PERIODO | AMORT. ACUMUL. | AMORT. CAPITAL MILLONS | INTER. MILLONS | CUOTA PERIODI MILLONS | |
| 0 | 1,000,000 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6,000 |
| 1 | 768,096 | 231,904 | 231,904 | 1,391 | 111 | 1,503 | 4,609 |
| 2 | 553,369 | 214,726 | 446,631 | 1,288 | 214 | 1,503 | 3,320 |
| 3 | 354,549 | 198,821 | 645,451 | 1,193 | 310 | 1,503 | 2,127 |
| 4 | 170,456 | 184,093 | 829,544 | 1,105 | 398 | 1,503 | 1,023 |
| 5 | 0 | 170,456 | 1,000,000 | 1,023 | 480 | 1,503 | 0 |

VIVOS = CANT. TITULOS - CANT. AMORT. x PERIODO
AMORT.CAPITAL = CANT. AMORT.xPERIODO*0.001
INTERESES = CUOTA PERIODICA - AMORT. DE CAPITAL
SALDO VIVO = SALDO - AMORT.

**b) Amortización del mismo número de títulos en cada período**

En este tipo de empréstitos en cada período es amortizado el mismo número de títulos, aplicando la fórmula [59]:

[59] $\boldsymbol{A = \frac{T}{p}}$

Con este dato elaboramos el calendario de amortización y graficamos la evolución del saldo vivo del empréstito.

Para el cálculo del valor de la cuota periódica aplicamos la siguiente fórmula:

[61] $\mathbf{C_1 = (A*VN) * (1 + i)^{s}}$

Restando a la cuota del período la parte de amortización de capital (A *Vn) obtenemos los intereses pagados en ese momento.

### 1.11. Obligaciones convertibles

Permiten al obligacionista o inversor resolver en un momento futuro entre mantener dichas obligaciones o convertirlas en acciones de la sociedad. En el momento de su emisión fijamos el método a utilizar para establecer la relación de conversión; es decir, número de acciones a recibir por cada obligación, así como en qué momento(s) futuro(s) el obligacionista podrá optar por acudir a la conversión. La relación de conversión es definida en la siguiente expresión:

$$\frac{\textbf{VALOR DE CONVERSION DE LA OBLIGACION}}{\textbf{VALOR DE LA ACCION}}$$

**a) Valor de conversión de la obligación.** Representado por su valor nominal.

**b) Valor de la acción.** Generalmente establecemos el precio medio de la acción durante un número determinado de días antes de la fecha de conversión. Con el objeto de que la conversión sea más atractiva para el inversor, aplicamos un descuento entre 10% y 20% al precio medio de la acción.

Para determinar si interesa o no acudir a la conversión hay que comparar los dos valores siguientes:

**a) Valor de mercado** de la obligación en la fecha de la conversión

**b) Valor de transformación**. Es el valor de mercado en la fecha conversión del número de acciones que recibimos por cada obligación.

Si el valor de mercado de la obligación es mayor, no interesa acudir a la conversión. Si es menor, es lo contrario.

La diferencia entre el valor de mercado de la obligación y el valor de transformación la denominamos <u>prima de conversión</u>.

### 1.12. Rentabilidad de un empréstito

Para el inversionista, la rentabilidad efectiva de una obligación lo representa el tipo de interés que iguala en el momento inicial el valor de la prestación (precio pagado por dicho título) y el valor de la contraprestación (intereses recibidos y amortización final).

En las obligaciones amortizadas por sorteo y que presentan distintos tipos de beneficios (primas de emisión, de amortización, etc.), la rentabilidad efectiva depende del momento de amortización de cada título.

Normalmente, la rentabilidad será superior en aquellos títulos amortizados son anterioridad, el efecto positivo de las distintas primas de emisión y/o de amortización será más significativo.

El inversor no puede conocer apriori cuál será la rentabilidad efectiva de sus títulos, pero si puede conocer como evolucionará ésta en función del momento en que sean amortizados.

La rentabilidad de un título calculada aplicando la función financiera o la función TASA de Excel:

**EJEMPLO 225 (Rendimiento efectivo de un empréstito)**

Emiten obligaciones de UM 3,000 cada título, con el 9% de interés y vencimiento en 5 años. Tiene un descuento en la suscripción del 6% (compran los títulos por UM 2,820) y una prima de amortización del 2.5% (cobra en el vencimiento UM 3,075 por cada título). Los títulos son amortizados mediante sorteos anuales. Determinar el rendimiento efectivo de esta obligación.

**Solución**:

n = 1...5; VA = 2,820; VF = 3,075; i= 0.09; PAGO= ?; $i_e$ = ?

1º Para calcular la tasa efectiva aplicamos sucesivamente la función TASA:

**PAGO =** 3,000*0.09 = 270

**Sintaxis**

**TASA**(nper;pago;va;vf;tipo;estimar)

| Nper | Pago | VA | VF | Tipo | TASA |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -270 | 2,820 | -3,075 | | 18.6170% |
| 2 | -270 | 2,820 | -3,075 | | 13.8038% |
| 3 | -270 | 2,820 | -3,075 | | 12.2479% |
| 4 | -270 | 2,820 | -3,075 | | 11.4809% |
| 5 | -270 | 2,820 | -3,075 | | 11.0257% |

**PAGO = VN*$i$**

En el cuadro, observamos, la evolución de la rentabilidad efectiva según el momento de amortización de los títulos.

La rentabilidad calculada no considera el costo impositivo (es rentabilidad bruta). Cuando consideramos esto, simplemente debemos sustituir los ingresos brutos por los ingresos netos (deducidos impuestos).

## 2. Sistema de equilibrio

El análisis de equilibrio es un importante elemento de planeación a corto plazo; permite calcular la cuota inferior o mínima de unidades a producir y vender para que un negocio no incurra en pérdidas. Es una medida muy mal utilizada por el desconocimiento de sus limitaciones.

Es una de las herramientas administrativas de mayor importancia, fácil de aplicar y que nos provee de información importante. «Esta herramienta es empleada en la mayor parte de las empresas y es sumamente útil para cuantificar el volumen mínimo a lograr (ventas y producción), para alcanzar un nivel de rentabilidad (utilidad) deseado.

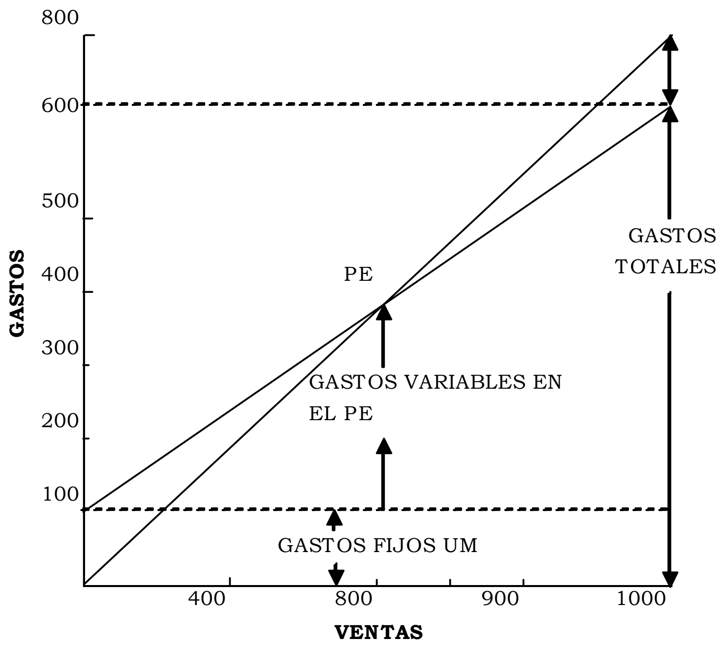
Es uno de los aspectos que deberá figurar dentro del Plan de una Empresa, permite determinar el volumen de ventas a partir del cual dicha empresa obtendrá beneficios.

El punto de equilibrio es el punto o nivel de ventas en el que cesan las pérdidas y empiezan las utilidades o viceversa.

La clasificación del punto de equilibrio es: Punto de equilibrio económico, punto de equilibrio productivo y punto de equilibrio gráfico.

El punto de equilibrio económico y productivo, representan el punto de partida para indicar cuántas unidades deben de venderse si una compañía opera sin pérdidas.

El punto de equilibrio gráfico, esquematiza los ingresos y costos totales, a diferentes volúmenes de ventas. El gráfico de equilibrio tiene dos líneas; una de ellas es la línea de ventas o de ingresos y la otra línea de costos. Ambas líneas cortan en el punto de equilibrio. Ejemplo:




Para determinar el punto de equilibrio es necesario hacer una correcta clasificación de los costos fijos y costos variables.

Costos fijos: Son aquellos costos que no varían con el volumen. Son independientes de la producción o ventas, ejemplo de costos fijos son: los alquileres o la depreciación de equipos entre otros.

Costos variables: Aquellos que ocurren en proporción directa a la producción, como son: materiales, mano de obra, suministros, comisiones, etc.

**Condiciones básicas:**

1. Costos perfectamente definibles como variables o fijos.
2. Variación de costos e ingresos según una función lineal de tipo:

   y = mx + b.
3. Precio de venta constante (W = Constante).
4. La producción es vendida de contado.
5. Producción de bienes de un solo tipo.

7. Corto plazo para asumir que unos costos son fijos.

**Comentario:**

1. Por lo general resulta muy complicado clasificar los costos en fijos y variables. Aún en el corto plazo, los costos tienden a variar en función del tiempo, principalmente en una economía inflacionaria en razón del cambio tecnológico, el mejoramiento de sistemas, etc.
2. Es muy difícil encontrar costos absolutamente variables. La cantidad requerida de un determinado bien por unidad depende, en muchos casos de una cantidad de variables como el tamaño del lote a producir, la mezcla de producción, la calidad de los insumos, su homogeneidad, etc.

**Símbolos utilizados en los cálculos del Punto de Equilibrio**:

***PE*** = Punto de equilibrio

***A*** = Aportación
***BV*** = Relación de beneficios, volumen o relación de aportación.
***PV*** = Precio de venta en UM
***B*** = Beneficios o utilidades
***CF*** = Costo fijo
***CV*** = Costo variable
***MS*** = Margen de seguridad
***W*** = Ventas o precio de venta

## 2.1. Fórmulas básicas del Sistema de Equilibrio

### 2.1.1. Relación de aportación:

La relación de aportación o ***BV*** puede expresarse de diferentes formas:

[62] **A = W - CV**

[63] $\boldsymbol{BV} = \frac{\text{Aportación}}{\text{Precio de Venta}}$ $\qquad \boldsymbol{BV} = \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{PV}}$

[64] $\boldsymbol{BV} = \boldsymbol{PV} - \frac{\boldsymbol{CV}}{\boldsymbol{PV}}$ $\qquad$ [65] $\boldsymbol{BV} = \boldsymbol{1} - \frac{\boldsymbol{CV}}{\boldsymbol{W}}$

La aportación (A) es la diferencia en unidades monetarias entre el precio de venta y los costos variables o efectivos. La relación de aportación es el porcentaje que representa la aportación con respecto al precio de venta.

**Ejemplo:**

Si vendemos un producto en UM 60 que tiene un costo variable de UM 40 nos da una aportación de UM 20 y una relación de aportación de 20/60, es decir 0.33. Es necesario conocer la ***BV*** antes de calcular el punto de equilibrio.

**EJEMPLO 226 (Calculando la aportación y la relación de aportación)**

Tenemos los siguientes datos simples de una compañía:

| | | |
|---|---|---|
| Ventas | UM | 2,500 |
| Costos variables | | 1,500 |
| Costos fijos | | 750 |
| Utilidades | UM | 250 |

Calculando la aportación tenemos:

[62] $\boldsymbol{A} = 2{,}500 - 1{,}500 = \text{UM } 1{,}000$

Calculamos la relación de aportación:

[63] $\boldsymbol{BV} = \frac{1{,}000}{2{,}500} = 40\%$

Esto quiere decir, que 40 centavos de cada UM vendida van destinados al pago de gastos fijos y a proporcionar utilidades. Después de pagar los costos fijos de UM 750, quedan disponibles UM 250 como utilidades.

### 1.1.2. Punto de Equilibrio

[66] $\boldsymbol{PE} = \frac{\boldsymbol{CF}}{\boldsymbol{BV}}$ ó $\boldsymbol{PE} = \frac{\boldsymbol{CF}}{1 - \frac{\boldsymbol{CV}}{\boldsymbol{W}}}$

El punto de equilibrio expresa cuál es la aportación de los ingresos que va a ser igual (desde, luego que paga) a los gastos fijos. Por encima de este nivel de ventas las utilidades crecen a ese ritmo o tasa de aportación.

**EJEMPLO 227 (Calculando el punto de equilibrio)**

Un negocio de venta de camisas al detalle, opera de la siguiente forma: el dueño compra las camisas a UM 15 y las vende a UM 20 cada una. El alquiler de local es de UM 1,800 por año y no tiene otros gastos. ¿Cuál es el punto de equilibrio?

**SOLUCION:**

CF = 1,800; CV = 15; A = 5(20-15); BV = 0.25(5/20); PE = ?

[66] $\boldsymbol{PE} = \frac{1{,}800}{0.25} = \text{UM } 7{,}200$

**Respuesta:**

Las ventas necesarias en PE son: 360 camisas a UM 20 cada una (7,200/20), es decir, UM 7,200 al año.

### 2.1.3. Beneficios o utilidades

A un determinado nivel de ventas, tiene de tres formas distintas:

[67] $\boldsymbol{B = W - CF - CV}$, [68] $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{(W * BV) - CF}$

Operando con las cifras de equilibrio, las utilidades también lo expresamos de esta forma:

[69] $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{(W - PE) * BV}$

**EJEMPLO 228 (Beneficios actuales de una empresa)**

Calcular las utilidades actuales de una empresa que tiene como gastos fijos anuales UM 800,000, una BV de 0.40 y unas ventas anuales de UM 3'000,000.

**Solución**:

W = 3'000,000; CF = 800,000; BV = 0.40; B = ?

Con la fórmula [68] obviamos el cálculo del PE:

[68] $\boldsymbol{B}$ = (3'000,000*0.40) - 800,000 = UM 400,000

[66] $\boldsymbol{PE} = \frac{800{,}000}{0.40} = \text{UM } 2'000{,}000$

[78] $\boldsymbol{B}$ = (3'000,000 - 2'000,000)*0.40 = UM 400,000

### 2.1.4. Margen de seguridad

Entendemos como margen de seguridad, la disminución porcentual de las ventas que pueden producirse antes de iniciarse las pérdidas. Los resultados de esta fórmula indican a la dirección de la compañía la proximidad de sus volúmenes de venta con respecto a su punto de equilibrio. Expresada de dos formas:

[70] $\boldsymbol{MS} = \frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{A}}$ [71] $\boldsymbol{MS} = \frac{\boldsymbol{(W- PE)}}{\boldsymbol{W}}$

Esta medida representa la disminución porcentual de las ventas antes de que comiencen las pérdidas. En ambas fórmulas los resultados son porcentajes.

Aplicando la fórmula del MS al ejemplo 228, tenemos:

[62] $\boldsymbol{A}$ = 3’000,000*0.40 = 1’200,000

[70] $\boldsymbol{MS} = \frac{400,000}{1'200,000} = 0.33$

El nivel al que pueden bajar las ventas antes de empezar a producirse las pérdidas es 33%. Dicho de otra manera, el PE de la empresa está en el 67% de sus ventas actuales. Una empresa que venda aplicando su PE, tendrá un margen de seguridad de cero.

### 2.1.5. Ventas

Para saber cual es el nivel de ventas necesario para satisfacer determinadas condiciones de costos, aportaciones, etc. Expresada como:

[72] $\boldsymbol{W = CF + CV + B}$ ó [73] $\boldsymbol{W} = \frac{(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{CF})}{\boldsymbol{BV}}$

La fórmula [72] constituye el mejor modo de expresar las ventas afectos de costo-volumen-utilidades.

Nuevamente utilizando los datos del ejemplo 103, en el que queremos calcular cual sería el volumen de ventas para obtener utilidades de UM 350,000:

**Solución:**

B = 350,000; CF = 800,000; BV = 0.40; W = ?

[73] $\boldsymbol{W} = \frac{(350,000 + 800,000)}{0.40} = \text{UM } 2'875,000$

### 2.1.6. Costos fijos

Para saber qué proporción de los gastos fijos quedan afectados por determinadas acciones o medidas propuestas, quizá para justificar un incremento de los gastos variables, etc.

[74] $\boldsymbol{CF = W - CV - B}$ ó [75] $\boldsymbol{CF = (W*BV) - B}$

Con el ejemplo 228, queremos saber a cuánto deben subir los gastos fijos para obtener utilidades de UM 400,000:

**Solución:**

W = 3’000,000;   BV = 0.40;   B = 400,000;   CF = ?

[75] $\boldsymbol{CF} = (3'000{,}000 * 0.40) - 400{,}000 = \text{UM } 800{,}000$

### 2.1.7. Costos variables

Nos permite conocer qué proporción de los costos variables cambian cuando ante variaciones en los precios, el volumen, etc.

[76] $\boldsymbol{CV = W - CF - B}$

Aplicando la fórmula en el ejemplo 228, tenemos:

$\boldsymbol{CV} = 3'000{,}000 - 800{,}000 - 400{,}000 = \text{UM } 1'800{,}000$

### 2.1.8. Fórmulas complementarias

[77] $\boldsymbol{BV} = \dfrac{\boldsymbol{(B + CF)}}{\boldsymbol{W}}$,   [78] $\boldsymbol{W} = \dfrac{\boldsymbol{CV}}{(1 - \boldsymbol{BV})}$

[79] $\boldsymbol{CV = W(1 - BV)}$

### 3. Flujo de caja de los beneficios

Como vimos en el Capítulo 1, el flujo de caja de los beneficios, elaborados con cifras contables, es el instrumento financiero que permite medir la liquidez de la organización o del proyecto, determina cantidad de dinero en un momento dado.

Este flujo de caja es una herramienta esencial para la gerencia, por cuanto le indica los fondos de que dispondrá en determinados períodos para cubrir necesidades de liquidez. Muestra también el momento en que será necesario gestionar líneas de crédito señalando los plazos de endeudamiento (corto y largo plazo).

**EJEMPLO 229 (Flujo de caja)**

Tenemos la siguiente información de los estimados de efectivo de la Compañía ABC, para los siguientes 6 meses:

| | |
|---|---:|
| Saldo caja bancos al 31.12.04 | 16,000 |
| **Gastos mensuales**: | |
| - Personal | 42,600 |
| - Caja chica | 400 |
| - Intereses | 530 |
| Junio 2000 devolución de préstamo | 40,000 |
| Marzo 2000 pago de impuesto a la renta | 6,800 |
| Mayo 2000 Compra de activos | 15,000 |

**Compra Venta:**

| Meses | Ventas al Contado UM | Ventas al Crédito UM | Compra al Crédito UM |
|---|---|---|---|
| Enero | 20,000 | 80,000 | 40,000 |
| Febrero | 18,600 | 66,600 | 48,000 |
| Marzo | 21,300 | 80,000 | 44,000 |
| Abril | 18,600 | 93,000 | 48,000 |
| Mayo | 16,000 | 106,600 | 36,000 |
| Junio | 22,600 | 106,600 | 40,000 |

**Condiciones de venta al crédito**:

- 45% en el mes de venta con 4% de descuento
- 35% en el mes siguiente de la venta
- 18% en el segundo mes siguiente de la venta
- 2% pasa a incobrables

**Condiciones de compra al crédito**:

- 30% en el mes de la compra
- 70% en el mes siguiente

**Compra y Venta Nov. - Dic. 99:**

| Meses | Ventas al Crédito UM | Compra al Crédito UM |
|---|---|---|
| Noviembre | 66,600 | |
| Diciembre | 53,300 | 48,000 |

El nivel mínimo de caja de la empresa es de UM 13,400. Asimismo, la compañía tiene una línea de crédito con una entidad financiera de UM 54,000, que los puede utilizar mes a mes para cubrir sus necesidades de liquidez. El pago del préstamo es posible hacerlo en cualquier mes sin afectar el nivel mínimo de caja de UM 13,400. Los intereses del crédito son de 3% mensual pagado mensualmente.

Elaborar el Flujo de Caja para los próximos seis meses del año 2005.

**HOJA DE TRABAJO 01**
**Otros rubros de egresos**

| Concepto | Enero | Febrero | Marzo | Abril | Mayo | Junio |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Personal | 42,600 | 42,600 | 42,600 | 42,600 | 42,600 | 42,600 |
| Caja chica | 400 | 400 | 400 | 400 | 400 | 400 |
| Intereses | 530 | 530 | 530 | 530 | 530 | 530 |
| Compra de Activos | | | | | 15,000 | |
| Imp. A la Renta | | | 6800 | | | |
| Dev. de préstamo | | | | | | 40,000 |
| TOTAL | 43,530 | 43,530 | 50,330 | 43,530 | 58,530 | 83,530 |

## HOJA DE TRABAJO 02

**FLUJO DE COBRANZAS DE VENTAS AL CREDITO**

| Concepto | Ventas | Enero | Febrero | Marzo | Abril | Mayo | Junio |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ventas al crédito 45% (-4%) Nov. 99 | 63,936 | | | | | | |
| 35% | | | | | | | |
| 18% | | 11,508 | | | | | |
| Ventas al crédito 45% (-4%) Dic. 99 | 51,168 | | | | | | |
| 35% | | 17,909 | | | | | |
| 18% | | | 9,210 | | | | |
| Ventas al crédito 45% (-4%) Enero | 76,800 | 34,560 | | | | | |
| 35% | | | 26,880 | | | | |
| 18% | | | | 13,824 | | | |
| Ventas al crédito 45% (-4%) Febrero | 63,936 | | 28,771 | | | | |
| 35% | | | | 22,378 | | | |
| 18% | | | | | 11,508 | | |
| Ventas al crédito 45% (-4%) Marzo | 76,800 | | | 34,560 | | | |
| 35% | | | | | 26,880 | | |
| 18% | | | | | | 13,824 | |
| Ventas al crédito 45% (-4%) Abril | 89,280 | | | | 40,176 | | |
| 35% | | | | | | 31,248 | |
| 18% | | | | | | | 16,070 |
| Ventas al crédito 45% (-4%) Mayo | 102,336 | | | | | 46,051 | |
| 35% | | | | | | | 35,818 |
| 18% | | | | | | | |
| Ventas al crédito 45% (-4%) Junio | 102,336 | | | | | | 46,051 |
| 35% | | | | | | | |
| 18% | | | | | | | |
| **Total por cobrar** | | 63,977 | 64,861 | 70,762 | 78,564 | 91,123 | 97,939 |

## HOJA DE TRABAJO 03

**Pago de compras al crédito**

| Concepto | Enero | Febrero | Marzo | Abril | Mayo | Junio |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 30% | 12,000 | 14,400 | 13,200 | 14,400 | 10,800 | 12,000 |
| 70% | 33,600 | 28,000 | 33,600 | 30,800 | 33,600 | 25,200 |
| TOTAL | 45,600 | 42,400 | 46,800 | 45,200 | 44,400 | 37,200 |

**FLUJO DE CAJA EN UM**

| REF. | CONCEPTO | ENE | FEB | MAR | ABR | MAY | JUN |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **SPDM** | 16,000 | 13,400 | 13,400 | 13,400 | 16,425 | 15,241 |
| | **Ingresos:** | | | | | | |
| | Vtas. al contado | 20,000 | 18,600 | 21,300 | 18,600 | 16,000 | 22,600 |
| HT 02 | Cobranzas de ventas al crédito | 63,977 | 64,861 | 70,762 | 78,564 | 91,123 | 97,939 |
| | Total ing. de efectivo | 99,977 | 96,861 | 105,462 | 110,564 | 123,548 | 135,780 |
| | **Egresos:** | | | | | | |
| HT 03 | Pago de compras | 45,600 | 42,400 | 46,800 | 45,200 | 44,400 | 37,200 |
| HT 01 | Otros rubros | 43,530 | 43,530 | 50,330 | 43,530 | 58,530 | 83,530 |
| | Total egresos | 89,130 | 85,930 | 97,130 | 88,730 | 102,930 | 120,730 |
| | Saldo ant. de préstamo | 10,847 | 10,931 | 8,332 | 21,834 | 20,618 | 15,050 |
| | Préstamo Bancario | 2,553 | 2,546 | 5,221 | | | |
| | Pago del préstamo | | | | -5,099 | -5,221 | |
| | Pago de interés | | -77 | -153 | -310 | -157 | |
| | **SFDM** | 13,400 | 13,400 | 13,400 | 16,425 | 15,241 | 15,050 |

**SPDM** = Saldo principio de mes, **SFDM** = Saldo fin de mes y **HT** = Hoja de trabajo

## 4. Casos comunes en los negocios

### 4.1. Reparto de utilidades o pérdidas

Son casos cotidianos en la explotación de negocios, en los que existen varios socios, participacionistas o accionistas de acuerdo a la forma asociativa que de acuerdo a Ley adopte la empresa. Dependen de los montos y tiempo de los aportes para el capital social. Los más comunes son:

#### 1º Caso: Cuando los capitales son iguales y los tiempos de los aportes diferentes

En este caso, la distribución de los beneficios o pérdidas es en forma proporcional al tiempo de los aportes de capital social. Para la solución de casos de este tipo, utilizamos la fórmula:

$$\text{Utilidad individual} = \frac{\text{Utilidad Total del Negocio}}{\boldsymbol{T}} \times \boldsymbol{n}$$

$\boldsymbol{T}$ = Tiempo (sumatoria de $n^1 + n^2 + n^3 \ldots + n^n$)

**EJEMPLO 230 (Reparto de utilidades cuando los capitales son iguales y los tiempos de los aportes diferentes)**

Tres personas asociadas para la explotación de un negocio, aportan cada uno UM 50,000. Después de 10 años de operaciones la empresa arroja utilidades netas por UM 500,000. Los aportes de capital lo hicieron de la forma siguiente: el primero de los socios inicia el negocio; el segundo, 2 años después y el tercero a los 5 años. ¿Cuánto de utilidades le tocó a cada socio?

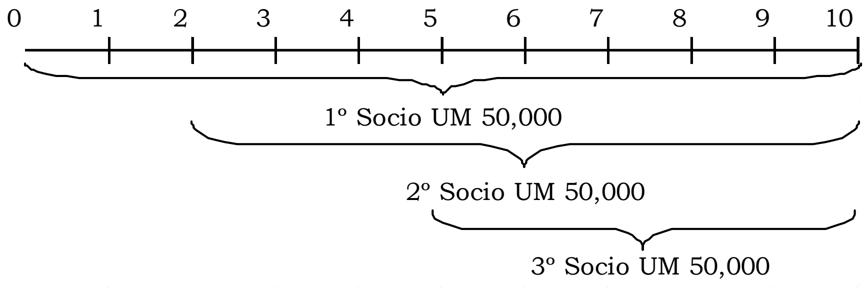
**Solución:**

UT. DEL NEG. = 500,000; T = 23; $n_{1,2,3}$ = 10, 8, 5; i = ?

Calculando las utilidades de cada socio en forma proporcional a los tiempos de inversión, tenemos:

| | | |
|---|---|---|
| 1º SOCIO | UM 50,000 | 10 AÑOS |
| 2º SOCIO | UM 50,000 | 08 AÑOS |

| | | |
|---|---|---|
| 3º SOCIO | UM 50,000 | 05 AÑOS |
| | | 23 AÑOS |




$$1^{\circ}\ \text{SOCIO} = \frac{500{,}000}{23} \times 10 = \text{UM } 217{,}391$$

$$2^{\circ}\ \text{SOCIO} = \frac{500{,}000}{23} \times 8 = \text{UM } 173{,}913$$

$$3^{\circ}\ \text{SOCIO} = \frac{500{,}000}{23} \times 5 = \text{UM } 108{,}696$$

Las utilidades distribuidas deben sumar exactamente UM 500,000.

**2º Caso: Cuando los tiempos son iguales**

En este caso, la distribución de los beneficios o pérdidas es en forma proporcional a los aportes de capital social. Para la solución de casos de este tipo, utilizamos la fórmula:

$$\text{Utilidad individual} = \frac{\text{Utilidad Total del Negocio}}{\text{APORTES TOTALES}} \times \text{APORTE INDIVIDUAL}$$

**EJEMPLO 231 (Reparto de utilidades cuando los tiempos son iguales)**

Cinco personas fundan una empresa aportando un total de UM 112,000, al momento de suscribir la Minuta de Constitución, en la forma siguiente: Persona A, UM 30,000, Persona B, UM 26,000; Persona C, UM 23,000; Persona D, UM 18,000 y Persona E, UM 15,000. Después de 8 años ininterrumpidos de explotación del negocio, éste arroja utilidades netas por UM 2'000,000. ¿Cuánto le corresponde a cada uno en el reparto de utilidades?

**Solución:**

UT. DEL NEG. = 2'000,000; APORTES TOTALES = 112,000;

UTILIDAD INDIVIDUAL =?

1º Ahora determinaremos la utilidad de cada socio en forma proporcional a los aportes de capital:

| | |
|---|---|
| Persona A | UM 30,000 |
| Persona B | UM 26,000 |
| Persona C | UM 23,000 |

| | | |
|---|---|---|
| Persona D | UM 18,000 | |
| Persona E | UM 15,000 | UM 112,000 |

$$\text{PERSONA A} = \frac{2'000{,}000}{112{,}000} \times 30{,}000 = \text{UM } 537{,}714$$

$$\text{PERSONA B} = \frac{2'000{,}000}{112{,}000} \times 26{,}000 = \text{UM } 464{,}286$$

$$\text{PERSONA C} = \frac{2'000{,}000}{112{,}000} \times 23{,}000 = \text{UM } 410{,}714$$

$$\text{PERSONA D} = \frac{2'000{,}000}{112{,}000} \times 18{,}000 = \text{UM } 321{,}429$$

$$\text{PERSONA E} = \frac{2'000{,}000}{112'000} \times 15{,}000 = \underline{\text{UM } 267{,}857}$$

Las utilidades distribuidas deben sumar exactamente UM 2’000,000.

**3º Caso: Cuando los tiempos y los aportes de capital son diferentes**

En este caso, la distribución de los beneficios o pérdidas es proporcional a los aportes de capital social y sus tiempos de permanencia como tal en la empresa. Estos casos, operan de la siguiente forma:

Primero: Multiplicamos los aportes de capital por el tiempo de trabajo en la empresa, restando en cada caso los retiros efectuados por cada uno;

Segundo: Sumamos los productos de los aportes de capital y

Finalmente: Procedemos al reparto de utilidades en forma proporcional a los resultados de las sumas de cada socio.

**EJEMPLO 232 (Reparto de utilidades cuando los tiempos y los aportes de capital son diferentes)**

Una empresa de tres accionistas cuyos aportes lo hicieron al inicio, comenzaron sus actividades hace 6 años, con beneficios actuales netos de UM 350,000. La estructura del capital accionario es la siguiente:

Primer accionista:

A la suscripción de las acciones aporta UM 2,500; el tercer año UM 8,000 y el cuarto año UM 13,000.

Segundo accionista: A la suscripción de las acciones aporta UM 5,000; en el segundo año UM 7,000 y en el cuarto retira UM 3,000 de su capital accionario.

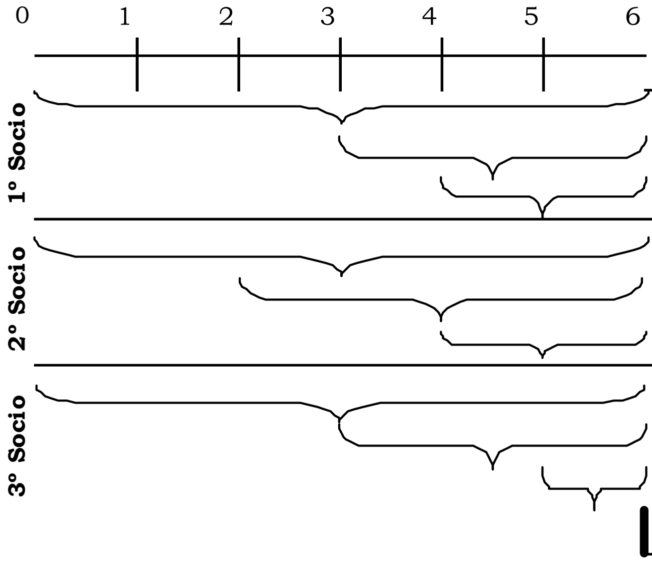
Tercer accionista:

A la suscripción de las acciones aporta UM 15,000; en el tercer año retira UM 5,000, en el quinto y sexto año aporta UM 6,000 y UM 4,500 respectivamente.

Efectuar el reparto de utilidades en forma proporcional a los aportes y tiempos del capital accionario.

**APORTES DE CAPITAL**

**POR TIEMPO DE PERMANENCIA EN LA EMPRESA**




| | Aporte | n | Total | |
|---|---|---|---|---|
| 1° Socio | 2,500 | 6 | 15,000 | |
| | 8,000 | 3 | 24,000 | |
| | 13,000 | 2 | 26,000 | 65,000 |
| 2° Socio | 5,000 | 6 | 30,000 | |
| | 7,000 | 4 | 28,000 | |
| | -3,000 | | -3,000 | 55,000 |
| 3° Socio | 15,000 | 6 | 90,000 | |
| | -5,000 | | -5,000 | |
| | 6,000 | 1 | 6000 | |
| | 4,500 | | 4,500 | 95,500 |
| | | **TOTAL** | | 215,500 |

$$1^{\circ}\text{ Socio} = (2{,}500 * 6) + (8{,}000 * 3) + (13{,}000 * 2) = \text{UM } 65{,}000$$

$$2^{\circ}\text{ Socio} = (5{,}000 * 6) + (7{,}000 * 4) + (\text{-}3{,}000) = \text{UM } 55{,}000$$

$$3^{\circ}\text{ Socio} = (15{,}000 * 6) + (\text{-}5{,}000) + (6{,}000 * 1) + 4{,}500 = \text{UM } 95{,}500$$

$$\text{TOTAL} \quad \text{UM } 215{,}500$$

**Distribución de utilidades:**

$$1^{\circ}\ \text{SOCIO} = \frac{350{,}000}{215{,}500} \times 65{,}000 = \text{UM } 105{,}568$$

$$2^{\circ}\ \text{SOCIO} = \frac{350{,}000}{215{,}500} \times 55{,}000 = \text{UM } 89{,}227$$

$$3^{\circ}\ \text{SOCIO} = \frac{350{,}000}{215{,}500} \times 95{,}500 = \text{UM } 155{,}104$$

**UTILIDADES PARA CADA SOCIO**

| 1° SOCIO | 2° SOCIO | 3° SOCIO | Total |
|---|---|---|---|
| 105,568 | 89,327 | 155,104 | 350,000 |

Las utilidades distribuidas deben sumar exactamente UM 350,000

# EJERCICIOS DESARROLLADOS

**Ejercicio 233 (TIR de un BONO)**

Un bono que paga un cupón del 14% nominal anual por semestre vencido y al que le quedan 20 años hasta su vencimiento, es vendido a UM 85. Determine su TIR hasta el vencimiento.

**Solución:**

VN = 100; ib = 0.14; nb= (12/6) = 2; VA = 85; i = ?; TIR= ?

1º Calculamos la tasa del período semestral:

[44B] $\boldsymbol{i}=\frac{0.14}{2}=0.07$

2º Elaboramos el FLUJO DE CAJA para calcular la TIR de la operación financiera:

| AÑOS | VALOR NOMINAL | P.COMPRA | CUPON 7% | AMORT. | FLUJOS NETOS |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 100.00 | 85.00 | | | -85.00 |
| 1 | | | 7.00 | | 7.00 |
| 2 | | | 7.00 | | 7.00 |
| 3 | | | 7.00 | | 7.00 |
| 38 | | | 7.00 | | 7.00 |
| 39 | | | 7.00 | | 7.00 |
| 40 | | | 7.00 | 100 | 107.00 |
| | | | | **TIR** | **8.30%** |

Con la tasa periódica que nos ha proporcionado la TIR calculamos la tasa efectiva anual:

[43B] $\boldsymbol{TEA}=(1+0.083)^{2}-1=0.1729$

(44A) $\boldsymbol{J}=0.083*2=0.1660$

**Sintaxis**

**INT.EFECTIVO**(**int_nominal**;**núm_per_año**)

| Int.nominal | num_per_año | Tasa Efectiva |
|---|---|---|
| 0.1660 | 2 | 0.1729 |

**Respuesta:**

La TIR hasta el vencimiento es 17.29%. La tasa de interés (ib) del Bono sólo es utilizada para calcular los intereses (I).

**Ejercicio 234 (Precio de un BONO)**

¿Cuál es el precio actual de un bono con un valor nominal de UM 100, que paga por semestre vencido el 15% de interés nominal anual, si la TEA hasta el vencimiento dentro de 10 años es 23%?

**Solución**:

VN=100; ib = 0.15; TEA = 0.23; nb = (12/6) = 2; I =?

1º Calculamos el valor semestral de los intereses y el valor futuro al final de los 10 años:

$$[44B] \quad \boldsymbol{i} = \frac{0.15}{2} = 0.075$$

2º Calculamos el interés (I=C) producido y el VF de cada bono:

$$[55] \quad \boldsymbol{I} = \frac{100*0.15}{2} = \text{ UM } 7.50$$

$$[19] \quad \boldsymbol{VF}_{20} = 100*1.075 = \text{UM } 107.50$$

3º A partir de la TIR calculamos la tasa del período:

$$[43A] \quad \boldsymbol{i} = \sqrt[2]{(1+0.23)}-1 = 0.1091$$

4º Como I es un valor de C, tenemos:

C = 7.50; i = 0.1091; n = 20 (10*2); VF = 107.50; VA = ?

***VA*** = [24] + [21] ó Función VA:

$$\boldsymbol{VA} = 7.5\left\langle\frac{1.1091^{20}-1}{0.1091*1.1091^{20}}\right\rangle + \frac{107.50}{1.1091^{20}} = \text{ UM } 73.63$$

**Respuesta**:

Luego, el precio pagado hoy por el BONO es UM 73.57.

**Ejercicio 235 (TIR de un BONO)**

¿Cuál es la verdadera TIR hasta el vencimiento de un bono de cinco años de vida, 15% de interés anual, adquirido a la par, si el inversor no reinvirtiese los cupones recibidos? (VN: UM 100).

**Solución:**

VN = 100; ib = 0.15; nb = 1; I = ?

1º Calculamos los intereses:

$$[55] \quad \boldsymbol{I} = \frac{100*0.15}{1} = \text{ UM } 15.00$$

2º Como no hay reinversión de los cupones y el valor de los intereses (I) representa la cuota periódica asumimos el pago total de los intereses y del Bono al final del año cinco:

**FLUJO DE CAJA**

| AÑOS | VALOR NOMINAL | P.COMPRA | INTERES 15% | AMORT. | FLUJOS NETOS |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 100.00 | 100.00 | | | -100.00 |
| 1 | | | 15.00 | | 0.00 |
| 2 | | | 15.00 | | 0.00 |
| 3 | | | 15.00 | | 0.00 |
| 4 | | | 15.00 | | 0.00 |
| 5 | | | 15.00 | 100 | 175.00 |
| | | | | **TIR** | 0.1184 |

**Respuesta**:

Luego la TIR verdadera del Bono hasta su vencimiento es 11.48%. Al no haber reinversión de los cupones, no hay capitalización.

**Ejercicio 236 (Alternativas de inversión)**

¿Cuál de los dos títulos siguientes tiene una TIR efectiva anual superior?

a) Una Letra del Tesoro a 3 meses vendida a UM 4,882 cuando tiene un valor nominal de UM 5,000 o

b) Un bono vendido a la par, que paga un tipo de interés nominal anual del 10% por semestre vencido.

**Solución: (a)**

VN = 5,000; VA = 4,882; n = 3; TIR = ?; j = ?; TEA = ?

1º Elaboramos el flujo de caja, para calcular la TIR:

**FLUJO DE CAJA**

| AÑOS | VALOR NOMINAL | P.COMPRA | AMORT. | FLUJOS NETOS |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 5,000.00 | -4,882.00 | | -4,882.00 |
| 1 | | | | 0.00 |
| 2 | | | | 0.00 |
| 3 | | | 5,000.00 | 5,000.00 |
| | | | **TIR** | 0.007993 |

2º Con la TIR del período calculamos la TEA:

[43B] $\boldsymbol{TEA} = (1+0.007993)^{12} - 1 = 0.1002$

(44A) $\boldsymbol{j} = 0.007993*12 = 0.0959$

**Sintaxis**

**INT.EFECTIVO(int_nominal;núm_per_año)**

| Int.nominal | num_per_año | Tasa Efectiva |
|---|---|---|
| 0.0959 | 12 | 0.1002 |

**Solución: (b)**

$j$ = 0.10;  i = (0.10/2) = 0.05;  TEA = ?

$$[43B] \quad \boldsymbol{TEA} = (1+0.05)^2 - 1 = 0.1025$$

**Sintaxis**

**INT.EFECTIVO(int_nominal;núm_per_año)**

| Int.nominal | num_per_año | Tasa Efectiva |
|---|---|---|
| 0.10 | 2 | 0.1025 |

**Respuesta**:

**a)** La TIR anual (TEA) de la letra del tesoro es 10.02%

**b)** La TIR anual de un Bono vendido a la par es 10.25%

Luego el Bono (b) tiene la TIR anual mayor, es la mejor inversión.

**Ejercicio 237 (TIR de un bono)**

Un bono del Estado a un año, recién emitido, proporciona un cupón de 9.48% nominal anual pagadero por semestres vencidos, su precio actual de mercado es de UM 1,050, y su precio esperado a fin del semestre es de UM 1,080. Asumimos como valor nominal UM 1,000.

**Determinar**:

a. La TIR del semestre

b. ¿Cuál sería la TIR hasta su vencimiento si comprásemos el bono ahora y lo mantuviésemos durante el resto de su vida?

**Solución (a)**

VN = 1,000;  ib = 0.0948;  nb = (12/6) 2;  VA = 1,050;  VF = 1,080;  I = ?

1° Calculamos el valor de los intereses:

$$[55] \quad \boldsymbol{I} = \frac{1{,}000*0.0948}{2} = \text{UM } 47.40$$

2° Determinamos la TIR del semestre:

**FLUJO DE CAJA**

| SEMESTRE | VALOR NOMINAL | VALOR ACTUAL | INTERES | VALOR FUTURO | FLUJOS NETOS |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1,000.00 | -1,050.00 | | | -1,050.00 |
| 1 | | | 47.40 | 1,080.00 | 1,127.40 |
| | | | | **TIR** | 7.37% |

**Solución (b)**

FLUJO DE CAJA

| SEMESTRE | VALOR NOMINAL | VALOR ACTUAL | INTERES | VALOR FUTURO | FLUJOS NETOS |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1,000.00 | -1,050.00 | | | -1,050.00 |
| 1 | | | 47.40 | | 47.40 |
| 2 | | | 47.40 | 1,080.00 | 1,127.40 |
| | | | | **TIR** | 5.90% |

**Respuesta:**

**a)** La TIR del semestre es 7.37%

**b)** La TIR hasta su vencimiento es 5.90%

**Ejercicio 238 (Deuda del Estado)**

El Estado emite bonos a 5 años, con fecha de emisión 1/01/02. El nominal de cada título es de UM 1,000 y ofrece un tipo de interés de 9,5%. El inversor los suscribe el 31/09/01 al 102% de su valor (es decir, paga UM 1,020 por cada título). Calcular su rendimiento efectivo:

**Solución**:

VN = 1,000; ib = 0.095; nb = 5; I = ?

$\mathbf{I}_1$ = 1000*0.095 = UM 95

$\mathbf{I}_2$ = 1000*0.095 = UM 95, así sucesivamente

| FECHA | SUSCRIPCIO | INTERESE | AMORTIZACIO |
|---|---|---|---|
| 31/09/01 | -1,020 | | |
| 01/00/02 | (Emisión) | | |
| 31/12/02 | | +95 | |
| 31/12/03 | | +95 | |
| 31/12/04 | | +95 | |
| 31/12/05 | | +95 | |
| 31/12/06 | | +95 | +1,000 |
| Con signo negativo los pagos que realiza el inversor y con signo positivo los ingresos que recibe | | | |

Para aplicar la función **TIR**, construimos el flujo de efectivo:

| AÑOS | SUSCRIPCION | PAGOS NETOS | FLUJO NETO |
|---|---|---|---|
| 0 | -1,020.00 | | -1,020.00 |
| 1 | | +95 | 95.00 |
| 2 | | +95 | 95.00 |
| 3 | | +95 | 95.00 |
| 4 | | +95 | 95.00 |
| 5 | | +95 | 1,095.00 |
| | | **TIR** | 0.0899 |

Por lo tanto, la rentabilidad efectiva que proporciona este título (en las condiciones adquiridas) es del 8.99%, inferior al 9.5% nominal que ofrece.

**¿Por qué esta menor rentabilidad?** Básicamente por dos motivos:

1° Porque hemos pagado por el título más que su valor nominal (UM 1,020 vs. UM 1,000) y

2° Porque hemos desembolsado el importe del bono 3 meses antes de la fecha de emisión.

**Ejercicio 239 (Deuda del Estado)**

El Tesoro Público emite obligaciones a 10 años, con fecha de emisión 01/07/2004. El valor nominal de los títulos es de UM 5,000, con el 9% de interés y amortización a la par. Estas obligaciones fueron suscritas el 01/01/2004.

Determinar el rendimiento efectivo de estos títulos:

a) Precio de suscripción: 104.6%

b) Precio de suscripción: 96.7%

**Solución:**

VN = 5,000; nb = 0.09

a) Precio de suscripción: 5,000*1.046 = UM 5,230

**I (C)**= 5,000*0.09*1 = UM 450, representa los intereses de cada período.

| FECHA | SUSCRIPCION | PAGOS NETOS | FLUJO NETO |
|---|---|---|---|
| 01/01/01 | -5,230 | | -5,230 |
| 01/07/01 | Emisión | | |
| 01/07/01 | | +450 | 450 |
| 01/07/02 | | +450 | 450 |
| 01/07/03 | | +450 | 450 |
| 01/07/04 | | +450 | 450 |
| 01/07/05 | | +450 | 450 |
| 01/07/06 | | +450 | 450 |
| 01/07/07 | | +450 | 450 |
| 01/07/08 | | +450 | 450 |
| 01/07/09 | | +450 | 450 |
| 01/07/10 | | +450 | 5,450 |
| | | **TIR** | 8.31% |

Para el cálculo del rendimiento efectivo hemos aplicado la función financiera **TIR** de Excel.

**Respuesta(a):**

La rentabilidad efectiva de cada título del ejercicio (en condiciones de a) es de 8.31%, menor al 9% nominal que paga.

**Solución:**

b) Precio de suscripción: 5,000*0.967% = UM 4,835

**I (C)** = 5,000*0.09*1 = UM 450, representa los intereses de cada período.

Para el cálculo del rendimiento efectivo aplicamos la función financiera **TIR**:

| FECHA | SUSCRIPCION | PAGOS NETOS | FLUJO NETO |
|---|---|---|---|
| 01/01/01 | -4,835 | | -4,835 |
| 01/07/01 | Emisión | | |
| 01/07/01 | | +450 | 450 |
| 01/07/02 | | +450 | 450 |
| 01/07/03 | | +450 | 450 |
| 01/07/04 | | +450 | 450 |
| 01/07/05 | | +450 | 450 |
| 01/07/06 | | +450 | 450 |
| 01/07/07 | | +450 | 450 |
| 01/07/08 | | +450 | 450 |
| 01/07/09 | | +450 | 450 |
| 01/07/10 | | +450 | 5,450 |
| | | **TIR** | 9.53% |

Luego, la rentabilidad efectiva de cada título del ejercicio (en condiciones de b) es de 9.53%, superior al 9% nominal que paga.

## Sistema de Equilibrio

### Ejercicio 240 (PE)

Tenemos un pequeño negocio de venta de discos compactos (CDS). El dueño del negocio compra cada caja de CDS de 10 unidades a UM 7.50 y los vende al detalle a UM 10.00. Paga anualmente por alquiler del establecimiento la suma UM 1,800 y no tiene otros egresos. Calcular cuántas cajas de CDS debe comprar y vender anualmente para no perder ni ganar.

**Solución:**

CF = 1,800; CV = 7.50; W = 10; BV = ?; PE = ?

$$[65] \quad \boldsymbol{BV} = 1 - \frac{7.50}{10} = 0.25$$

$$[66] \quad \boldsymbol{PE} = \frac{1{,}800}{0.25} = \text{UM } 7{,}200 \Rightarrow \frac{7{,}200}{10} = 720 \text{ cajas}$$

**Respuesta**:

Para no ganar ni perder debe comprar y vender 720 cajas.

### Ejercicio 245 (Caso Integral del sistema de equilibrio)

Los directivos de una empresa aplicarán diversos métodos para mantener y mejorar sus niveles de rentabilidad. Previamente quieren conocer las posibles repercusiones de las decisiones asumidas hoy. Tomaremos los datos de los libros de contabilidad y del presupuesto operativo de la empresa. Con éstos, más los que representen las condiciones futuras, aplicaremos las fórmulas del sistema del equilibrio.

**CUADRO DE OPERACIÓN**

| Gastos | Fijos | Variables | TOTAL |
|---|---|---|---|
| Materiales directos | | 600,000 | 600,000 |
| Mano de obra productiva | | 600,000 | 600,000 |
| Gastos generales de fábrica | 100,000 | 160,000 | 260,000 |
| Gastos generales administrativos | 60,000 | 140,000 | 200,000 |
| Gastos generales de ventas | 40,000 | 100,000 | 140,000 |
| TOTALES | 200,000 | 1,600,000 | 1,800,000 |
| | | Ventas | 2,000,000 |
| **Utilidades Netas** (antes de impuestos) | | | 200,000 |

1º Calcularemos la BV y, seguidamente el punto de equilibrio:

$$[65]\quad \boldsymbol{BV} = \left\langle 1\text{-}\left\langle \frac{1'600,000}{2'000,000} \right\rangle \right\rangle = \quad 0.20$$

$$[66]\quad \boldsymbol{PE} = \frac{200,000}{0.20} = \quad \text{UM } 1'000,000$$

2º Calculamos el margen de seguridad:

$$[71]\quad \boldsymbol{MS} = \frac{2'000,000\text{-}1'000,000}{2'000,000} = \quad 0.50$$

**Supuestos y consecuencias:**

Supuesto 1:

Aumentemos los costos fijos en UM 100,000; todo lo demás permanece igual. Determinar el nuevo PE, las nuevas utilidades y el nuevo margen de seguridad:

Explicación y resultados de 1**:**

Como los costos variables y el precio de venta no han cambiado la BV permanece invariable:

$$[66]\quad \boldsymbol{PE} = \frac{300,000}{0.20} = \quad \text{UM } 1'500,000$$

Comprobando las fórmulas para verificar si las utilidades coinciden o no con los datos del cuadro de operación, tenemos:

$$[68]\quad \boldsymbol{B} = (2'000,000*0.20)\text{-}200,000 \;=\; \text{UM } 200,000$$ o también:

$$[69]\quad \boldsymbol{B} = (2'000,000\text{-}1'000,000)*0.20 \;=\; \text{UM } 200,000$$

Ahora procedemos a calcular los beneficios y el margen de seguridad:

$$[68]\quad \boldsymbol{B} = (2'000,000 * 0.20) - 300,000 = \quad \text{UM } 100,000$$

$$[71]\quad \boldsymbol{MS} = \frac{2'000,000\text{-}1'500,000}{2'000,000} = \quad 0.25$$

Demostración del supuesto 1:

El incremento en los costos fijos hace que disminuyan las utilidades en la mitad (50%), el área rentable de ventas decrece en la en la misma proporción.

Supuesto de 2**:**

Ahora disminuiremos los costos variables en UM 100,000; todo lo demás permanece igual. Calcular el nuevo punto de equilibrio, las nuevas utilidades y el nuevo margen de seguridad.

Explicación y resultados de 2:

Al cambiar la relación de costos variables a ventas cambia también BV:

[65] $\boldsymbol{BV} = 1 - \frac{1'500,000}{2'000,000} = \quad 0.25$

[66] $\boldsymbol{PE} = \frac{200,000}{0.25} = \quad \text{UM} \;\; 800,000$

[68] $\boldsymbol{B} = (2'000,000 * 0.25) - 200,000 = \quad \text{UM} \;\; 300,000$

[71] $\boldsymbol{MS} = \frac{2'000,000\text{-}800,000}{2'000,000} = \quad 0.60$

Demostración del supuesto 2:

En el supuesto 1, apreciamos que con un incremento de UM 100,000 el cambio en las utilidades debe darse en la misma proporción. En este segundo supuesto un cambio de UM 100,000 en los costos variables produce cambios en las utilidades. El PE puede lograrse con un poco más de la mitad de las ventas (por la mayor aportación) es decir, que cada UM de venta por encima del punto de equilibrio produce UM 0.25 en lugar de sólo UM 0.20 anteriores.

Supuesto 3:

Queremos modernizar la planta con nuevos equipos. Esta decisión significa un costo anual adicional de UM 200,000 incrementando los gastos fijos totales a UM 400,000 con la seguridad de ahorrar el doble de esos costos adicionales en mano de obra directa y materiales directos. En consecuencia los costos variables disminuyen hasta UM 1’200,000.

**CUADRO DE OPERACIÓN**

| | |
|---|---|
| Ventas | 2,000,000 |
| Costos variables | 1,200,000 |
| Costos fijos | 400,000 |
| Costos totales | 1,600,000 |
| Utilidades | 400,000 |

Repercusiones del nuevo plan:

Explicación y resultados 3:

Determinaremos en primer lugar, la nueva estructura de utilidades:

[65] $\boldsymbol{BV} = 1 - \frac{1'200,000}{2'000,000} = \quad 0.40$

[66] $\boldsymbol{PE} = \frac{400,000}{0.40} = \quad \text{UM} \;\; 1'000,000$ (Igual a condición original)

[71] $\boldsymbol{MS} = \frac{2'000,000\text{-}1'000,000}{2'000,000} = \quad 0.50$

Demostración del supuesto 3: Como podemos apreciar, el punto de equilibrio de UM 1’000,000 y el volumen de ventas de UM 2’000,000 es exactamente igual al obtenido al inicio. No obstante, este supuesto puede cambiar radicalmente la estructura de utilidades con la que fue en un primer momento. Como la BV es el doble en este supuesto, las utilidades serían también el doble, por encima de las ventas en punto de equilibrio. Comprobemos su veracidad aplicando al caso de UM 1’600,000 de ventas:

Condiciones iniciales:

[68] $\boldsymbol{B} = (1'600{,}000*0.20)-200{,}000 =$ UM 120,000

Supuesto 3:

[68] $\boldsymbol{B} = (1'600{,}000*0.40)-400{,}000 =$ UM 240,000

Esto nos demuestra que si, el supuesto 3, duplica las utilidades en forma rápida para cada UM de venta, por encima del PE, también obliga a duplicar las ventas por debajo de este punto. Sí el PE aumenta incluso con una BV mejorada, la empresa será vulnerable a pérdidas en estaciones de venta reducida, cuando las utilidades por efecto de aportaciones más altas juegan un papel de menor importancia en relación con la previsión de las pérdidas.

Con el supuesto 3, la empresa podrá conseguir utilidades en forma rápida por encima de su condición inicial, sin tener obligatoriamente que alterar su vulnerabilidad, a condición de que el PE (el mismo en ambos casos) represente el modelo de planificación que planteamos anteriormente.

Supuesto 4:

Sobre la base de la situación inicial, la dirección de la compañía plantea un volumen futuro de ventas de UM 3’600,000 para incrementar las utilidades.

**CUADRO COMPARATIVO DE OPERACIÓN**

| Concepto | Supuesto 4 | Supuesto 1 |
|---|---:|---:|
| Ventas | 3,600,000 | 2,000,000 |
| Gastos fijo | 800,000 | 200,000 |
| Gastos variables | 2,400,000 | 1,600,000 |
| Total Gastos | 3,200,000 | 1,800,000 |
| Utilidades | 400,000 | 200,000 |
| BV | 0.333 | 0.20 |
| PE | 2,400,000 | 1,000,000 |
| MS | 33.3% | 50% |

**Repercusiones del supuesto 4:**

1. Por problemas de mercado, obtenemos únicamente un volumen de ventas de UM 2’600,000.

[68] $\boldsymbol{B} = (2'600{,}000*0.33)-800{,}000 =$ UM 66,580

Tercera parte de las utilidades obtenidas en el supuesto 1, con dos millones de UM de ventas.

2. Las ventas no superan los dos millones:

[68] $\boldsymbol{B} = (2'000{,}000*0.33)-800{,}000 =$ - UM 140,000 Pérdidas

3. La cantidad de unidades vendidas son iguales al nivel superior previsto pero los precios del mercado desminuyen en un 15%.

Nuevos indicadores:

CV = 2’400;   PE = 3’060 (3’600 - 15%);   CF = 800,000

[65] $\boldsymbol{BV} = \left\langle 1 - \left\langle \frac{2'400,000}{3'060,000} \right\rangle \right\rangle = \quad 0.2157$

[66] $\boldsymbol{PE} = \frac{800,000}{0.2157} = \quad \text{UM} \;\; 3'708,859$

[68] $\boldsymbol{B} = (3'060,000{*}0.2157) - 800,000 \;=\; -\ \text{UM} \;\; 139,958$ pérdida

Demostración del supuesto 4**:**

Como apreciamos la BV superior, al estimado inicialmente, no proporciona el peso suficiente para superar los gastos fijos más altos poniendo a la empresa en una situación de vulnerabilidad ante el más ligero cambio en las condiciones económicas generales. Este tipo de planificación es aplicable para casos en que la empresa esté pensando en cambiar radicalmente la configuración de la compañía y cuando esperamos un volumen de ventas considerablemente alto. Si el volumen de ventas de UM 3’600,000 representa el máximo potencial de mercado real disponible, entonces, a la empresa le conviene agregar un segundo turno y pagar los gastos extras que supone la diferencia de turnos en salarios y otros costos de menor importancia. Pero en el caso de que hubiera la posibilidad de que la Dirección de Comercialización de la empresa vaya a conseguir UM 12’000,000 de ventas anuales, esta medida resultará muy prudente y juiciosa.

**CUADRO DE OPERACIÓN PARA AMBOS CASOS**

| **Concepto** | **Supuesto 4** | **Supuesto 1** |
|---|---|---|
| Ventas | 12,000,000 | 12,000,000 |
| Gastos fijo | 800,000 | 200,000 |
| Gastos variables | 8,000,000 | 9,600,000 |
| Total Gastos | 8,800,000 | 9,800,000 |
| Utilidades | 3,200,000 | 2,200,000 |
| BV | 0.33 | 0.20 |
| PE | 2,400,000 | 1,000,000 |
| MS | 80% | 92% |

En este nivel de ventas los gastos fijos adicionales de UM 600,000 producen un aumento en las utilidades de UM 1’000,000. Como quiera que las utilidades deban superar primero el nivel de los gastos fijos, las aportaciones sufrirán una diferencia mucho más impresionante.

Aportaciones 4’000,000 2’400,000

Supuesto 5: Ahora tratamos de saber cuáles van a ser las ventas adicionales necesarias para equilibrar una reducción del precio de venta. Volviendo a la situación inicial, ¿qué ventas adicionales necesita generar con el objeto de equilibrar una reducción de precios del orden del 10% sin que disminuyan las utilidades?

**Nuevos indicadores**:

CV = 1’600;   W = 1’800 (2’000-10%);  CF = 200,000

[65] $\boldsymbol{BV} = \left\langle 1 - \left\langle \frac{1'600,000}{1'800,000} \right\rangle \right\rangle = \quad 0.1111$

[66] $\boldsymbol{PE} = \frac{200,000}{0.1111} = \quad \text{UM} \;\; 1'800,000$

[67] **B** = 2’000,000 - 200,000 - 1’600,000 = UM 200,000

Ventas Necesarias**:**

[73] $\boldsymbol{W} = \frac{200,000 + 200,000}{0.1111} = \quad \text{UM} \;\; 3'600,000$

Ventas adicionales**:**

3’600,000 - 1’800,000 = UM 1’800,000

Demostración del supuesto 5**:**

A menos que tengamos oportunamente los datos de costos-volumen-utilidades, lo cual significa separar y dividir los gastos fijos de los variables, será difícil pronosticar qué incremento de las ventas son necesarios para superar una disminución del 10% en los precios, sin que disminuyan las utilidades por debajo de la meta de UM 200,000. Es decir, afrontar una disminución del precio de 10%, equivale a duplicar holgadamente el nivel de ventas.

**Ejercicio 246 (Punto de equilibrio)**

Una pequeña empresa de confecciones que produce camisas tiene un costo diario de UM 1,160, compuesto por los salarios, piezas de repuestos, depreciación, alquileres, supervisión. Cada camisa tiene un costo de producción de UM 4 y son vendidos al por mayor a UM 8.

1) ¿Cuántas camisas debería vender diariamente para no ganar ni perder?
2) Con un aumento en el precio de los insumos y con nuevos costos fijos y variables:

CV = 4.2; CF = 1,218

**Determinar:**

a) Las ventas necesarias en punto de equilibrio, si cada camisa es vendida a UM 8 cada una.

b) Cuál será el PE si aumentan el precio de venta a UM 8.5 cada camisa.

c) Si conocemos que es posible vender 315 camisas diariamente, ¿cuál es el precio a cobrar por cada camisa para garantizar que no haya pérdida?

**Solución: (1)**

CV = 4; CF = 1,160; W = 8; PE =?

Efectuada una adecuada clasificación de las variables, procedemos a calcular el PE:

[66] $\boldsymbol{PE} = \frac{1,160}{1 - \frac{4}{8}} = \quad \text{UM} \;\; 2,320$

Como deseamos saber cuántas camisas debemos vender diariamente, dividimos el monto encontrado entre el precio de venta de cada camisa:

$$\frac{2{,}320}{8} = 290 \text{ camisas}$$

Comprobando los resultados obtenidos, tenemos:

**ESTADO DE OPERACIÓN**

| Concepto | UM | Cantidad | TOTALES |
|---|---|---|---|
| Ventas | 8 | 290 | 2,320 |
| Costos variables | 4 | 290 | 1,160 |
| Costos fijos | | | 1,160 |
| **Utilidad o pérdida** | | | 0.00 |

**Solución: (2 - a)**

CV = 4.2;  CF = 1,218;  W = 8;  PE = ?

$$[66]\quad \boldsymbol{PE} = \frac{1{,}218}{1-\frac{4.2}{8}} = \text{UM } 2{,}564 \Rightarrow \frac{2{,}564}{8} = 320 \text{ camisas}$$

**Solución: (2 - b)**

CV = 4.2;  CF = 1,218;  W = 8.5;  PE = ?

$$[66]\quad \boldsymbol{PE} = \frac{1{,}218}{1-\frac{4.2}{8.5}} = \text{UM } 2{,}408 \Rightarrow \frac{2{,}408}{8.5} = 283 \text{ camisas}$$

**Solución: (2 - c)**

CV = 4.2;  CF = 1,218;  PE = 315;  PV = ?

1º Para la solución de este ítem del ejercicio, es necesario establecer la siguiente igualdad: $\boldsymbol{PE * PV = (CV * PE) + CF}$

El producto del PE por el PV es igual al **ingreso** total, razón por la cual igualamos a éste con el **egreso total**: producto del CV por el PE más los costos fijos. *En PE los ingresos totales son igual a los egresos totales.*

$315\boldsymbol{PV} = (4.2)(315) + 1{,}218$  $\boldsymbol{PV} = \text{UM } 8.06$

**Respuesta:**

1) Diariamente debemos vender 290 camisas para no ganar ni perder.

2 - a) Las ventas diarias en PE son 320 camisas, al precio de UM 8 cada una.

2 - b) Las ventas diarias en PE son 283 camisas, si aumentamos el precio a UM 8.5 cada una.

2 - c) El precio a cobrarse por cada camisa es UM 8.06, para llegar a la venta en punto de equilibrio, si vendemos al menos 315 camisas diariamente.

**Ejercicio 247 (Sistema de equilibrio)**

Calcular los beneficios actuales, el PE y el MS de una empresa que tiene como gastos fijos anuales UM 950, BV de 0.35 y ventas anuales por UM 7,500.

**Solución**:

W = 7,500; BV = 0.35; CF = 950; B = ?; PE = ?; MS = ?

1º Calculamos los beneficios o utilidades:

[68] $\boldsymbol{B} = (7{,}500 \times 0.35) - 950 = \text{UM } 1{,}675$

2º Calculamos el PE:

[66] $$\boldsymbol{PE} = \frac{950}{0.35} = \text{UM } 2{,}714$$

3º Margen de seguridad:

[71] $$\boldsymbol{MS} = \frac{7{,}500 - 2{,}714}{7{,}500} = 0.6381$$

Este porcentaje de MS 63.81% nos indica que las ventas pueden bajar en un 63.81% antes que comiencen las pérdidas. Dicho de otra manera: el PE de la empresa está en el 38.17% de las ventas actuales.

**Ejercicio 248 (Análisis económico con Pe)**

Vamos a analizar desde el punto de vista económico, una explotación apícola denominada «La abeja orquídea» ubicada en la ciudad de Tarapoto, Región San martín, Perú.

La explotación cuenta actualmente con 100 colmenas «tipo Jumbo». En el manejo de sus colmenas, el propietario emplea el sistema Nómada o en movimiento, movilizando sus apiarios hasta cuatro veces en un ciclo anual.

La producción de miel, estimada por colmena es de 40 litros. La miel en el mercado (envasada y etiquetada), tiene un precio promedio de UM 40.00 /litro.

Los costos anuales, calculados para esta explotación apícola, son los siguientes:

1. Combustible: Considera unas 30 visitas a los apiarios con un desembolso de UM 150.00 / visita.
2. Alimentación artificial, dos veces al año a las 100 colmenas y consideran UM 40.00 de cada una (las dos veces).
3. Cambio de abejas reina en el total de colmenas UM 65.00 de cada una.
4. El control y tratamiento contra Varroasis es una vez al año, con un costo de UM 45.00 por colmena.
5. Renta del extractor. El pago y uso de extractor es 4 veces al año, con un costo de UM 1,500.00 cada ocasión.
6. Adquirimos anualmente 4,000 contenedores por un valor UM 3.00 c/u, para el envasado de la miel,

7. El etiquetado para toda la producción tiene un costo de UM 3,000.
8. La mano de obra permanente, representa UM 25,000.00 al año.
9. El pago mensual de agua es de UM 160.00
10. El pago bimestral de luz es UM 250.00

Calcular el punto de equilibrio en ingresos y producción para la explotación apícola.

1° Clasificamos los costos:

| **Costos Variables** | | **Costos Fijos** | |
|---|---|---|---|
| Combustible | 4,500.00 | Renta de Extractor | 6,000.00 |
| Alimentación | 8,000.00 | M. de obra permanente | 25,000.00 |
| Abejas reinas | 6,500.00 | Pago de agua | 1,920.00 |
| Medicamentos | 4,500.00 | Pago de luz | 1,500.00 |
| Envases | 12,000.00 | | |
| Etiquetas | 3,000.00 | | |
| TOTAL CV UM | 38,500.00 | TOTAL CF UM | 34,420.00 |

2° Cálculo de las variables:

CFt UM 34,420.00

CVu UM 9.625 (38,500/4,000 litros)

PVu UM 40.00

3° Aplicando las fórmulas, tenemos:

**Solución:**

Wu = 40; CF = 34,420; CVu = 9.625; Pe = ?

[66] $\boldsymbol{Pe}\ (\text{económico}) = \dfrac{34{,}420}{1-\dfrac{9.625}{40}} = \text{UM } 45{,}289$

[66] $\boldsymbol{Pe}\ (\text{productivo}) = \dfrac{45{,}289}{40} = 1{,}132\ \text{LITROS}$

**Respuesta:**

Por encima de los ingresos y volumen de producción representados por el punto de equilibrio, la empresa obtiene obtiene utilidades. Contrariamente, por debajo del punto de equilibrio obtiene perdidas. De acuerdo con los resultados obtenidos la empresa en análisis opera con rendimientos excelentes.

## FLUJO DE CAJA DE UNA EMPRESA EN OPERACIONES

**Ejercicio 249 (Flujo de caja)**

Una compañía inicia sus operaciones el 1° de enero del año 2000:

**a.** Situación inicial:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **ACTIVO** | | | | |
| Caja y Banco | UM | 6,400 | | |
| Fijo | | 6,000 | | |
| Intangible | | 400 | UM | 12,800 |
| **PASIVO** | | | | |
| Circulante | UM | 600 | | |
| Fijo | | 4,400 | | |
| Capital | | 7,800 | UM | 12,800 |

b. Estimamos los gastos mensuales de efectivo en:
Remuneraciones y leyes sociales UM 160, alquileres UM 24, varios UM 40.

c. Estimado de compras: (En UM)
Enero 2,000; marzo 3,200; julio 2,400; octubre 2,200; noviembre 2,200.

d. Gastos de publicidad: (En UM)
Febrero 400; abril 600; junio 800; diciembre 800.

e. Estimado de ventas: (En UM)

Enero 1,200; febrero 1,000; marzo 1,400; abril 1,400; mayo 1,400; junio 1,400; julio 1,400; agosto 1600; septiembre 1,600; octubre 1,600; noviembre 2,400; diciembre 2,600.

f. Otros supuestos:

Todas las compras son al contado

Las ventas consideran un plazo de 60 días para su pago

El costo de la mercadería vendida es de UM 10,000.

En octubre el pago de UM 40 es en efectivo, por intereses del pasivo circulante.

La depreciación del activo fijo es en 6 años.

El activo intangible es amortizado en dos años

Al finalizar el período los UM 1,400 del pasivo fijo se convertirán en circulante.

Genera reserva para indemnización a razón de UM 16 mensual.

**Elaborar**:

1) El estado de ganancias y pérdidas

2) El balance general

3) El flujo de caja mensual

## 1. ESTADO DE GANANCIAS Y PÉRDIDAS GLOBAL

| | | |
|---|---|---|
| 1. Ingresos | | |
| - Ventas | | 19,000 |
| 2. Egresos | | |
| - Costo de mercadería vendida | 10,000 | |

| | | |
|---|---|---|
| - Publicidad | 2,600 | |
| - Remuneración | 1,920 | |
| - Alquileres | 288 | |
| - Indemnizaciones | 192 | |
| - Depreciación Activo Fijo | 1,000 | |
| - Amortización Activo Intangible | 200 | |
| - Varios | 960 | |
| - Intereses | 40 | 17,200 |
| - Utilidad | | 1,800 |

## 2. BALANCE

**PASIVO**

| | | | |
|---|---|---|---|
| - Circulante | 2,000 | | |
| - Fijo | 3,000 | | |
| - Provisión indemnizaciones | 192 | 5,192 | |
| - Capital | 7,800 | | |
| - Utilidad | 1,800 | 9,600 | 14,792 |

**ACTIVO**

| | | | |
|---|---|---|---|
| - Intangible | | | |
| Total | 400 | | |
| Menos Amortización Ac.Intang. | 200 | 200 | |
| - Fijo | | | |
| Total | 6,000 | | |
| Menos Amortización Act. Fijo | 1,000 | 5,000 | 5,200 |
| Activo Circulante: | | | |
| Pasivo + Capital | | 14,792 | |
| Menos: Fijo + Act. Intang. | | 5,200 | |
| Activo Circulante | | 9,592 | |

**COMPOSICION DEL ACTIVO CIRCULANTE**

| | | | |
|---|---|---|---|
| Disponible | | | |
| Caja Banco | 6,400 | | |
| Situación inicial | | | |
| (+) Ing. En efectivo | | | |
| (Ventas Ene - Oct.) | 14,000 | 20,400 | |
| Menos Gastos en Efectivo: | | | |
| Compras | 12,000 | | |
| Publicidad | 2,600 | | |
| Gastos mensuales (132 x 12) | 3,168 | | |
| Intereses Pagados | 40 | 17,808 | |
| Situación final | | | 2,592 |
| Exigible | | | |
| - Cuentas por cobrar (Vtas. Nov. Y Dic.) | | 5,000 | |
| Por consiguiente: | | | |
| Inventario | | | 1,000 |
| Total Activo Circulante | | | 8,592 |

**ESTADO DE GANANCIAS Y PÉRDIDAS**
**(Correspondiente al Ejercicio 2004)**

| | | | |
|---|---|---|---|
| Ventas | | UM | 19,000 |
| Costo mercadería vendida | | | 10,000 |
| UTILIDAD BRUTA | | | 9,000 |
| Gastos de Venta | | | |
| - Publicad | | | 2,600 |
| Gastos Administrativos | | | |
| - Remuneraciones | 1,920 | | |
| - Alquileres | 288 | | |
| - Indemnización | 192 | | |
| - Depreciación Activo Fijo | 1,000 | | |
| - Amortización Act. Intang. | 200 | | |
| - Varios | 960 | | 4,560 |
| Gastos Financieros | | | |
| - Intereses pagados | | | 40 |
| Gastos de Operación | | | 7,200 |
| UTILIDAD DE OPERACIÓN | | | 1,800 |

**BALANCE**
(Al 31 de Diciembre del 2004)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **ACTIVO** | | | **PASIVO** | | | |
| Circulante | | | Circulante | | | |
| Disponible | | | Circulante | | 2,000 | |
| - Caja y Banco | 2,592 | | Fijo | | | |
| Exigible | | | - Total | 3,000 | | |
| - Ctas x Cobra | 5,000 | | - Prov. Inden | 192 | 3,192 | 5,192 |
| Realizable | | | | | | |
| - Almacen | 2,000 | 9,592 | | | | |
| Fijo | | | CAPITAL | | | |
| - Total Reserv | 6,000 | | - Capital | | 7,800 | |
| (-) Dep. A.F. | 1,000 | 5,000 | - Utilidad | | 1,800 | 9,600 |
| Intangible | | | | | | |
| - Total | 400 | | | | | |
| (-) Amort. A. I | 200 | 200 | | | | |
| | | 14,792 | | | | 14,792 |

### C. FLUJO DE CAJA

| Concepto | ENE. | FEB | MAR | ABR | MAY | JUN | JUL | AGO | SEP | OCT | NOV | DIC | TOTA. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| SPDM | 6,400 | 4,136 | 1,472 | 2,408 | 2,544 | 3,680 | 4,016 | 2,752 | 3,888 | 5,024 | 4,120 | 3,256 | 3,792 |
| **Ingresos**: | | | | | | | | | | | | | |
| Ventas | | | 1,200 | 1,000 | 1,400 | 1,400 | 1,400 | 1,400 | 1,400 | 1,600 | 1,600 | 1,600 | 14,000 |
| TOTAL ING. | 6,400 | 4,136 | 2,672 | 3,408 | 3,944 | 5,080 | 5,416 | 4,152 | 5,288 | 6,624 | 5,720 | 4,856 | 17,792 |
| **Egresos**: | | | | | | | | | | | | | |
| Compras | 2,000 | 2,000 | | | | | 2,400 | | | 2,200 | 2,200 | | 10,800 |
| Publicidad | | 400 | | 600 | | 800 | | | | | | 800 | 2,600 |
| Gasto mes | 264 | 264 | 264 | 264 | 264 | 264 | 264 | 264 | 264 | 264 | 264 | 264 | 3,168 |
| Intereses | | | | | | | | | | 40 | | | 40 |
| TOTAL EGR. | 2,264 | 2,664 | 264 | 864 | 264 | 1,064 | 2,664 | 264 | 264 | 2,504 | 2,464 | 1,064 | 16,608 |
| SFDM | 4,136 | 1,472 | 2,408 | 2,544 | 3,680 | 4,016 | 2,752 | 3,888 | 5,024 | 4,120 | 3,256 | 3,792 | 1,184 |

**SPDM** = Saldo Principio de mes y **SFDM** = Saldo fin de mes
**Gasto mensual** = Remuneraciónes mensuales + Alquileres + Varios

# Bibliografía


1. Administración Financiera, Van Horne James C., Prentice Hall, México
2. Administración Financiera de Empresas, Weston y Brigham, Interamericana, México
3. Administración Financiera Internacional, 6ta. Edición, Edit. Thomson Edit. Jeff Madura
4. Cálculo Con Aplicaciones a la Administración, Economía y Biología, Sullivan Mizrahi, UTEHA, México
5. Casos en Administración de negocios, ESAN, Mc Graw Hill, México
6. Criterios de Evaluación de Proyectos, Sapag Chain Nassir, Mc Graw Hill, España
7. Compendio de Matemáticas Financieras en la Evaluación de Proyectos, Ratios Financieros y Aritmética de la Mercadotecnia., César Aching G., 1º Edición CjA Ediciones, Lima - Perú
8. Curso de Matemáticas Financieras, Aula Fácil.com
9. Diccionario de Economía y Finanzas, Carlos Sabino Editorial Panapo, Caracas 1991.
10. Enciclopedia Encarta 2004, Microsoft Corporation
11. Evaluación de Proyectos, Baca Urbina Gabriel, Mc Graw Hill, Colombia
12. Evaluación estratégica de proyectos de inversión, Kafka Kiener Folke, Universidad del Pacífico, Lima - Perú
13. Facilidades Financieras de Excel, Gutiérrez Carmona Jairo, Universidad Externado, Colombia
14. Fundamentos Matemáticos y Cálculo Financiero, Márquez Yévenes Jorge W., Universidad de Concepción, Bolivia
15. Guía Completa de Microsoft Excel 2000, Dodge M. Y Craig Stinson, Mc Graw Hill, México
16. Guía informativa sobre Negocios en el Perú, Pricewaterhouse Coopers en Perú, 2002
17. Ingeniería Económica, Blank y Tarquin, Mc Graw Hill, Colombia
18. Ingeniería Económica, Taylor A. George, Limusa, México
19. Introducción al riesgo país, Santiago J. Alvarez, webmaster_alvarez@yahoo.com
20. La tasa de interés y sus principales determinantes, Richard Roca, Universidad Nacional Mayor de San Marcos
21. Las Matemáticas Financieras en el Campo de los Negocios, César Aching G., Prociencia y Cultura S.A., Lima - Perú
22. Lecturas: Gerencia Financiera I y II, ESAN - PADE Administración
23. Lecturas: Métodos Cuantitativos, ESAN- PADE Mercadotecnia
24. Macroeconomía, Parkin Michael, Addison-Wesley Iberoamericana, USA.
25. Manual de Matemáticas Financieras, Moore J.H. UTEHA, México
26. Matemáticas Financieras, Ayres, Jr. Frank. Mc Graw Hill, México
27. Matemáticas para Directivos de Empresa y Economistas, Lyman C. Peck, Pirámide, Madrid
28. Serie de Matemáticas para la Dirección de Negocios (Tomo II) Springer, Herlihy, Beggs, UTEHA, México
29. Texto modelo sobre problemas sociales, económicos y ambientales. Programa de Educación para el Desarrollo del Instituto del Banco Mundial

## URLs Consultados:


http://www.gestiopolis.com/recursos/documentos/fulldocs/fin/finbasaplij.htm

TALLER DE FINANZAS BÁSICAS APLICADAS

http://www.gestiopolis.com/recursos/experto/catsexp/pagans/fin/no4/matfras.htm

PIPE

http://www.gestiopolis.com/canales/financiera/articulos/22/cauetio.htm

EVALUACIÓN DE ALTERNATIVAS DE INVERSIÓN: ANÁLISIS MATEMÁTICO Y FINANCIERO DE PROYECTOS (I, II, III, IV y V)

http://www.gestiopolis.com/canales/financiera/articulos/no%205/interesalinteres.htm

HAY QUE PONERLE MUCHO INTERÉS AL INTERÉS

http://www.monografias.com/

VARIOS

http://www.google.com/custom?sitesearch=gestiopolis.com&q=MATEMATICAS+FINANCIERAS&domains=gestiopolis.com&hl=es&cof=GALT%3A%230066CC%3BGL%3A1%3BDIV%3A%23FF9900%3BVLC%3A336633%3BAH%3Acenter%3BBGC%3AFFFFFF%3BLBGC%3A999999%3BALC%3A000000%3BLC%3A000000%3BT%3A0066CC%3BGFNT%3A666666%3BGIMP%3A666666%3BFORID%3A1%3B&oe=ISO-8859-1&ie=ISO-8859-1&forid=1&client=pub-2753881743271989

VARIOS


## Referencias URL


[URL 1] "DECISIONES DE INVERSIÓN", Ignacio Velez Pareja (2005)

http://cashflow88.com/decisiones/libro_on_line/contenido.html

[URL 2] http://www.antroposmoderno.com/antro-articulo.php?id_articulo=441

TRANSFORMACIÓN DE LA MERCANCIA EN DINERO (Teoría del Valor de MARX)

[URL 3] http://www.gestiopolis.com/Canales4/eco/dinemo.htm

DINERO, MONEDA Y FINANZAS (La ley del valor de Marx)

[URL 4] http://aulaempresarial.com.ar/auladigital/003/eldinero.html

EL DINERO Y LA POLÍTICA MONETARIA

[URL 5] http://www.sbs.gob.pe/PortalSBS/infpublico/faq.htm

PREGUNTAS FRECUENTES

[URL 6] http://www.matematicas-financieras.com/

MANUAL DE MATEMATICAS FINANCIERAS

[URL 7] http://www.bcrp.gob.pe/Espanol/WPublicaciones/Revista/RevAgo98/JorMor.pdf

CALIFICACION DE RIESGO PAIS

[URL 8] http://www.monografias.com/trabajos13/ripa/ripa.shtml

RIESGO PAÍS, Santiago J. Álvarez

[URL 9] http://www.gestiopolis.com/canales5/fin/espefina.htm

http://www.monografias.com/trabajos25/especulacion-financiera/especulacion-financiera.shtml
ESPECULACION FINANCIERA Y DESARROLLO ECONOMICO