MÉTODOS PARA LA EVALUACIÓN DE PROYECTOS

Índice

Resumen

El desarrollo de diversos métodos de análisis de inversión, que no es otra cosa que un planeamiento eficaz para determinar el momento más adecuado para la adquisición de un activo, constituye una herramienta de trabajo cotidiana del personal encargado de la administración de las finanzas.

Tomando en cuenta el impacto sobre los resultados de las organizaciones con fines de lucro, en el presente trabajo se relacionan los Métodos utilizados para este propósito, conjuntamente con una valoración comparativa de éstos.

I. Introducción

Una actividad permanente en el ámbito empresarial, lo constituye el análisis de la situación económica y financiera de la misma, a partir de la cual adoptar decisiones que contribuyan a mejorar su desempeño y con ello maximizar sus beneficios.

Para alcanzar el objetivo antes mencionado se utilizan los pronósticos financieros: a corto plazo destinados fundamentalmente a la elaboración de presupuestos de efectivo y los de largo plazo que se concentran en el crecimiento futuro de las ventas y los activos, así como el financiamiento de dicho crecimiento.

Todo lo expuesto evidencia que un buen análisis financiero debe detectar la fuerza y los puntos débiles de un negocio, en particular en el proceso de evaluación de la rentabilidad de proyectos de inversión que, al margen de su clasificación la cual puede diferir entre diferentes autores, se caracterizan por la ocurrencia de flujos financieros en el transcurso del tiempo, resultan indispensables para la entidad pues incluyen aspectos tales como reemplazo de equipos; sustitución de proyectos; diseño de nuevos productos o servicios y expansión hacia otros mercados, para escoger aquellos que contribuyan a lograr un incremento neto del capital.

Como se aprecia, el universo de destino de los proyectos es muy amplio a lo que debe añadirse el impacto de la escala de la operación de la empresa y la rapidez con que deba adoptarse una decisión (coyuntura) en un ambiente de recursos escasos.

Todo esto ha motivado el desarrollo de diversos métodos de análisis de inversión que no es otra cosa que un planeamiento eficaz para determinar el momento más adecuado para la adquisición de un activo, los cuales se relaciona en el presente trabajo, conjuntamente con una valoración comparativa de éstos.

II. Fundamentos teóricos

II.1. Clasificación de los proyectos

Las empresas clasifican los proyectos en las siguientes categorías:

- *Reemplazo:* mantenimiento del negocio, están destinados a reemplazar los equipos dañados, depreciados en su totalidad u obsoletos moralmente.
- *Reemplazo:* reducción de costos, que tiene como propósito reemplazar los equipos útiles pero obsoletos. El pronóstico de estos gastos es reducir el costo de la mano de obra, de los materiales y de otros conceptos como la electricidad.

- *Expansión de los productos o mercados existentes:* tiene como objetivo expandir las tiendas o las instalaciones de distribución en los mercados actualmente atendidos.
- *Expansión hacia nuevos productos o mercados:* se utiliza para evaluar los gastos y beneficios esperados de un nuevo producto o servicio, con el cual se pretende expandir la empresa dentro de un área geográfica no cubierta actualmente.
- *Proyectos de seguridad o ambientales:* se relacionan con los gastos necesarios para cumplir las regulaciones del gobierno, con los contratos laborales, con los términos de las pólizas de seguros. Se denominan inversiones obligatorias o proyectos que no producen ingresos.

A nivel microeconómico, la clasificación del proceso inversionista es la siguiente:

- Económicas: adquisición de bienes y derechos.
- Financieras: colocación del ahorro en el mercado financiero.
- Jurídicas: adquisición de bienes y derechos que pueden ser objeto de un derecho de propiedad y son susceptibles de formar parte del patrimonio.

A nivel macroeconómico, la clasificación del proceso inversionista sólo tiene sentido la inversión económica, ya que las financieras y jurídicas son meras operaciones entre organizaciones económicas.

II.2. Principios financieros

Primer Principio Financiero: «Una unidad monetaria de hoy vale más que una unidad monetaria de mañana». *Como corolario de este principio puede señalarse que el trabajo fundamental de la actividad financiera es:* **«transferir de manera eficiente recursos en el tiempo, lo cual incluye la valoración y selección de fuentes y métodos de financiamiento».**

Segundo Principio Financiero: «Una unidad monetaria segura vale más que una con riesgo», que se fundamenta en el hecho de que la mayoría de los inversionistas evitan el riesgo siempre que pueden hacerlo, sin sacrificar la rentabilidad. Por tanto, al contenido de trabajo del área financiera establecido en el apartado anterior debe modificarse como se recoge a continuación para incorporar este aspecto: «*transferir con el mínimo riesgo posible y de manera eficiente los recursos en el tiempo, lo cual incluye la valoración y selección de fuentes y métodos de financiamiento y protección de los recursos»*.

III. Métodos para evaluar proyectos

Los criterios de valoración y selección de inversiones pueden resumirse de la forma que se muestra en la tabla 1.

Tabla 1. Criterios de valoración y selección de inversiones

Tipo de criterio	Característica Económica	Métodos
No financieros	No tienen en cuenta la cronología de los distintos flujos de caja y el	Flujo de Caja (Cash Flow). Tasa de Rendimiento Contable

(estáticos)	valor del dinero en el tiempo. Son cálculos sencillos y resultan de utilidad para la empresa.	(Accounting Rate of Return). Periodo de recuperación (Pay Back). Relación Costo – Beneficio.
Financieros (dinámicos)	Tienen en cuenta la cronología de los distintos flujos de caja y el valor del dinero en el tiempo mediante la actualización o descuento. Son muy utilizados pues homogenizan las cantidades de dinero recibidas en distintos momentos.	Valor Actual Neto (VAN). Tasa Interna de Retorno (TIR). Indice de rentabilidad (IR).

III.1. Métodos no financieros

III.1.1. Método del flujo de caja (Cash Flow)

Este método ofrece una información de dinámica la empresa y es un instrumento contable que refleja el flujo de los fondos generados internamente, obtenidos de una relación de entradas y salidas de dinero (ingresos y gastos pagables) y proporciona una medida de la autofinanciación.

Flujo de Caja Económico = Utilidad Neta + Gastos no Desembolsables

Nota: Los gastos no desembolsables son: amortización de activos fijos intangibles; depreciación de los activos fijos tangibles; provisión de cuentas malas; amortización de gastos diferidos; etc.

III.1.2. Tasa de Rendimiento Contable (Accounting Rate of Return)

El Método de la Tasa de Rendimiento Contable (TRC) consiste en comparar el beneficio contable con el valor de la inversión, escogiendo aquel proyecto cuya TRC sea mayor.

La TRC se obtiene como el promedio de la utilidad después de impuestos divida entre el importe de la inversión inicial como se indica en la siguiente expresión.

$$TRC = \frac{B_n}{I}$$

$$B_{n.} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} B_t$$

donde:

n: cantidad de períodos de que consta la inversión.

B_t: beneficio que reporta la inversión en el período t.
B_n: beneficio neto anual promedio.
I: inversión.
M_i: monto inicial de la inversión.

Los principales puntos débiles de este método pueden resumirse en:

- Se utilizan las utilidades contables y no los flujos de caja, por lo cual no se tiene en cuenta el rendimiento marginal de la inversión.
- No tiene en cuenta el valor del dinero en el tiempo.
- Según este criterio son preferibles los proyectos con elevados beneficios de corta duración, lo cual no siempre es así.

Este indicador es similar al Rendimiento Sobre Activos (ROA) o al Rendimiento Sobre el Capital (ROE).

III.1.3. Período de recuperación (Pay Back)

Es un método sencillo, sobre todo para empresas pequeñas, que se fundamenta en determinar el plazo de recuperación del costo de la inversión y selecciona entre proyectos mutuamente excluyentes aquel cuya plazo de recuperación inicial es menor y la decisión de invertir o no se toma comparando el período de recuperación del monto de la inversión del proyecto con algún estándar predeterminado.

En la práctica, el Período de Recuperación (P_r) se determina acumulando los sucesivos flujos anuales hasta que la suma alcance el coste inicial de la inversión es tiempo (t) que satisface la condición mostrada en la siguiente expresión:

$$\sum_{j=1}^{t} C_j = \sum_{j=1}^{t} I_j$$

donde:

C_j: flujo de caja en el período j
I_j: inversión en el período j

En el caso de que los flujos sean constantes el valor de P_r se determina a través de la siguiente expresión:

$$P_r = \frac{C_0}{C}$$

Tabla 2. Ventajas y desventajas de este método

Ventajas	Desventajas

– Es fácil de calcular y aplicar. – Es barato, por eso se emplea en la actualidad para evaluar decisiones de pequeños gastos de capital cuando el costo de los otros métodos es superior a los beneficios de escoger mejores elecciones entre las alternativas. – Proporciona una medición de la liquidez del proyecto o de la velocidad con que el efectivo invertido es reembolsado. – Es útil para las empresas con escasa disponibilidad de efectivo.	– Ignora los flujos de efectivo que se extienden más allá del período de recuperación, lo cual es un sesgo para los proyectos a largo plazo. – No considera el valor del dinero en el tiempo. – No considera todos los flujos de efectivo del proyecto de inversión, y por ende no los incluye en el análisis. Igualmente no considera el orden en que se obtienen los beneficios, lo cual reviste interés financiero. – Si la empresa fija una fecha como límite sólo se aceptarán proyectos de corta duración.

No obstante, este método puede ser atractivo en inversiones categorizadas como muy riesgosas, en las cuales los fondos lejanos en el tiempo son menos probables en su realización.

III.2. Métodos financieros

III.2.1. Determinación de la tasa de descuento (Capital Asset Pricing Model, CAPM)

Uno de los problemas más importantes de las finanzas consiste en poder determinar el precio que tiene el riesgo y así poder utilizar una medida apropiada del riesgo, ya sea de un proyecto de inversión, del riesgo de una empresa o de cualquier activo financiero.

Premisa: el rendimiento de cualquier activo financiero riesgoso en equilibrio es una función de su covarianza con el riesgo del rendimiento del portafolio de mercado.

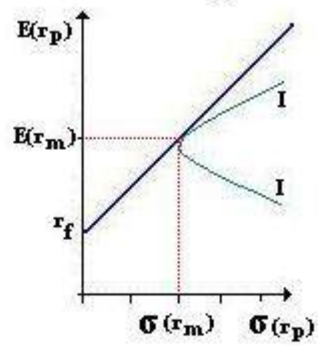
El CAPM es un modelo matemático que considera los siguientes supuestos acerca de los inversionistas y del conjunto de oportunidades de inversión que existen:

- Los inversionistas son individuos aversos al riesgo, que siempre maximizan la utilidad que esperan obtener al final de un periodo de tiempo.
- Los inversionistas son precio aceptantes (no pueden influir en el proceso de formación del precio) y tienen expectativas homogéneas acerca de los rendimientos de los activos financieros, que tiene una distribución normal.
- Existe un activo libre de riesgo (instrumento del gobierno), tal que los inversionistas pueden prestar o pedir prestado en cantidades limitadas a la tasa de riesgo r_f.
- Los activos financieros existen en cantidad limitada, son bursátiles (siempre hay compradores y vendedores) y son perfectamente divisibles.

– No hay fricciones en el mercadeo de activos financieros (la tasa de interés para prestar y pedir prestado es la misma), la información no tiene costo y está disponible para todos los inversionistas de manera simultánea.
– No hay imperfecciones del mercado como son los impuestos, regulaciones o restricciones a las ventas.

La Caracterización del portafolio de mercado en términos de rendimiento esperado de la inversión se corresponde con el mostrado en la figura 1, donde:

Figura 1. Rendimiento esperado de la inversión



$E(r_p)$: rendimiento esperado de un portafolio.
$E(r_m)$: rendimiento del portafolio de mercado.
$\sigma(r_p)$: desviación estándar de un portafolio
$\sigma(r_m)$: desviación estándar del portafolio del mercado
II': activo riesgoso

Bajo estas condiciones, la Línea del Mercado de Capitales $E(r_p)$ viene dada por la siguiente expresión: $E(r_p) = r_f + \frac{E(r_m) - r_f}{\sigma(r_m)}$ (1)

Sea un portafolio de mercado estructurado en:

– activo riesgoso I: a% invertido, con tasa de rendimiento r_i
– portafolio de mercado M: (1-a%) invertido, con tasa de rendimiento r_m.

Bajo esta condiciones, la tasa de rendimiento del portafolio combinado, compuesto por el activo con riesgo y portafolio de mercado, r_p, viene dada por: $r_p = ar_i + (1-a)r_m$ y la esperanza matemática de r_p viene dada por:

$$E(r_p) = E[ar_i + (1-a)r_m] = aE(r_i) + (1-a)E(r_m) \quad (2)$$

La varianza de r_p viene dada por:

$$V(r_p) = E\left[(r_p)^2\right] - \left[E(r_p)\right]^2 \quad (3)$$

$$E\left[(r_p)^2\right] = E\left[a^2 r_i + 2a(1-a) r_i r_m + (1-a)^2 (r_m)^2\right]$$

$$E\left[(r_p)^2\right] = a^2 E(r_i) + 2a(1-a) E(r_i; r_m) + (1-a)^2 E(r_m) \quad (4)$$

$$\left[E(r_p)\right]^2 = \left[aE(r_i) + (1-a)E(r_m)\right]^2 = a^2\left[E(r_i)\right]^2 + 2a(1-a)E(r_i)E(r_m) + (1-a)^2\left[E(r_m)\right]^2 \quad (5)$$

Sustituyendo las expresiones 4 y 5 en 3 y agrupando convenientemente se obtiene:

$$V(r_p) = a^2\left\{E\left[(r_i)^2\right] - \left[E(r_i)\right]^2\right\} + 2a(1-a)\left[E(r_i; r_m) - E(r_i)E(r_m)\right] + (1-a)^2\left\{E\left[(r_m)^2\right] - \left[E(r_m)\right]^2\right\}$$

Nótese lo siguiente:

- $\left\{E\left[(r_i)^2\right] - \left[E(r_i)\right]^2\right\}$, representa la varianza de los rendimientos del activo con riesgo, en lo sucesivo, σ_i .
- $\left\{E\left[(r_m)^2\right] - \left[E(r_m)\right]^2\right\}$,representa la varianza del portafolio de mercado libre de riesgo, en lo sucesivo, σ_m
- $\left[E(r_i; r_m) - E(r_i)E(r_m)\right]$, representa la covarianza de los rendimientos entre el activo con riesgo y el portafolio de mercado, en lo sucesivo, $\sigma_{i;m}$

Por tanto la varianza y desviación típica de la rentabilidad del portafolio combinado, r_p, viene dada por las siguientes expresiones:

$$V(r_p) = a^2\sigma_i^2 + (1-a)^2\sigma_m^2 + 2a(1-a)\sigma_{i;m} \quad (6)$$

$$\sigma(r_p) = \left[a^2\sigma_i^2 + (1-a)^2\sigma_m^2 + 2a(1-a)\sigma_{i;m}\right]^{1/2} \quad (7)$$

Ahora la variación en la esperanza (media) y en la desviación estándar con respecto al porcentaje del portafolio a, invertido en activos con riesgo se obtiene a partir del cálculo de la derivada parcial de la expresiones (1) y (6) con respecto al parámetro a, como se indica a continuación:

$$\frac{\partial E(r_p)}{\partial a} = \frac{\partial\left[aE(r_i) + (1-a)E(r_m)\right]}{\partial a} = E(r_i) - E(r_m) \quad (8)$$

$$\frac{\partial\left[\sigma(r_p)\right]}{\partial a} = \frac{1}{2}\left[a^2\sigma_i^2 + (1-a)^2\sigma_m^2 + 2a(1-a)\sigma_{i;m}\right]^{-\frac{1}{2}}\left[2a\sigma_i^2 - 2(1-a)\sigma_m^2 + 2(1-a)\sigma_{i;m} - 2a\sigma_{i;m}\right]$$

$$\frac{\partial\left[\sigma(r_p)\right]}{\partial a}=\frac{1}{2}\left[a^2\sigma_i^2+(1-a)^2\sigma_m^2+2a(1-a)\sigma_{i;m}\right]^{-\frac{1}{2}}\left[2a\sigma_i^2-2(1-a)\sigma_m^2-4a\sigma_{i;m}+2\sigma_{i;m}\right] \quad (9)$$

El descubrimiento de Sharpe y Treynor de que en el equilibrio el portafolio de mercado ya tiene el valor I ponderado por su valor w_i , por lo cual el porcentaje a de la expresiones 7 y 8 representa el exceso de demanda por un activo con riesgo.

$$w_i=\frac{valor\ de\ mercado\ de\ un\ activo\ individual}{valor\ de\ mercado\ de\ todos\ los\ activos}$$

En el equilibrio, el exceso de demanda por el activo con riesgo es igual a cero y os precios se ajustaran hasta que todos los activos pertenezcan a los inversionistas. Por tanto si se evalúan las expresiones 7 y 8 para a igual a cero, es posible determinar la relación de precios en el equilibrio como se indica a continuación:

$$\left.\frac{\partial E(r_p)}{\partial a}\right|_{a=0}=E(r_i)-E(r_m) \quad (10)$$

$$\left.\frac{\partial\left[\sigma(r_p)\right]}{\partial a}\right|_{a=0}=\frac{1}{2}\left[\sigma_m^2\right]^{-\frac{1}{2}}\left[2\sigma_{i;m}-2\sigma_m^2\right]=\frac{2(\sigma_{i;m}-\sigma_m^2)}{2\sigma_m}=\frac{\sigma_{i;m}-\sigma_m^2}{\sigma_m} \quad (11)$$

De las ecuaciones anteriores puede determinarse que la pendiente de la curva descrita por la relación existente entre el rendimiento esperado del activo con riesgo y la varianza de esta M_r viene dada por:

$$M_r=\frac{E(r_i)-E(r_m)}{\dfrac{\sigma_{i;m}-\sigma_m^2}{\sigma_m}} \quad (11)$$

Ahora en el punto del equilibrio del mercado (M_r) debe ser igual a la pendiente de la Línea de Mercado de Capitales (M_c), de donde, igualando las expresiones (1) y (11), se tiene:

$$\frac{E(r_i)-E(r_m)}{\dfrac{\sigma_{i;m}-\sigma_m^2}{\sigma_m}}=\frac{E(r_m)-r_f}{\sigma_m}$$

$$E(r_i)-E(r_m)=\left[\frac{\sigma_{i;m}-\sigma_m^2}{\sigma_m}\right]\left[\frac{E(r_m)-r_f}{\sigma_m}\right]=\frac{\sigma_{i;m}}{\sigma_m}\left[E(r_m)-r_f\right]-E(r_m)+r_f$$

Simplificando el término $E(r_m)$ en la expresión anterior se obtiene la ecuación del CAPM:

$$E(r_i) = r_f + \frac{\sigma_{i;m}}{\sigma_m}\left[E(r_m) - r_f\right]$$

La ecuación anterior indica que la tasa de rendimiento requerida por cualquier activo, tiene dos componentes:

- Tasa libre de riesgo, r_f.
- Tasa de riesgo: recoge el rendimiento esperado por el riesgo, obtenida como el producto de la prima por riesgo obtenida de la diferencia $E(r_m) - r_f$ por la cantidad de riesgo obtenida como $\beta = \frac{\sigma_{i;m}}{\sigma_m}$.

III.2.2. Valor Actual Neto (VAN)

Es un indicador de recuperación de valores, ya que compara el valor presente de los beneficios futuros esperados de un proyecto con el valor presente del costo esperado.

El Valor Actual Neto (VAN) es el valor presente de los rendimientos futuros descontados al costo de capital de la empresa, menos el costo de la inversión y para su determinación se utiliza la siguiente expresión, donde:

$$VAN = \left[\frac{C_1}{(1+r_1)^1} + \frac{C_2}{(1+r_2)^2} + ...+ \frac{C_n}{(1+r_n)^n}\right] - C_0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+r_i)^t} - C_0$$

C_1, C_2, ... C_n: Flujos netos de efectivo en cada período.[1]
r_i: Tasa de descuento apropiada o costo de capital del proyecto en cada periodo
C_0: costo inicial del proyecto (inversión inicial)
n: Cantidad de períodos de duración del proyecto (vida esperada)

A los efectos del análisis del VAN, se aceptan lo proyectos cuyo VAN sea positivo y si es negativo, debe ser rechazado, en tanto si dos o más proyectos son mutuamente excluyentes, deberá elegirse el que tenga el VAN más alto mientras mayor sea el valor del VAN más atractivo resulta.

Un VAN positivo indica que la inversión en el proyecto produce excedentes superiores, en la cuantía del VAN, a los que podrían obtenerse invirtiendo esa misma cantidad a la tasa de inversión.

La ventaja fundamental de este método es que considera el valor del dinero en el tiempo y su inconveniente principal es la dificultad de especificar el tipo de descuento o de actualización, r_i, el cual debe considerar además del tipo de interés, el riesgo que representa el proyecto.

---

[1] Los flujos futuros de efectivo se definen como los flujos netos anuales de entradas de efectivo esperados de las inversiones, o como el ingreso neto en operación después de impuestos más la depreciación

Otro factor que debe considerarse previo a la elección de un cartera de proyectos excluyentes es si existen diferencias entre la cantidad de periodos de cada uno, para proceder a homogenizarlos, asumiendo que se repiten en el tiempo hasta el infinito.

Para este propósito se puede utilizar la siguiente expresión[2] que se deduce al considerar el VAN del flujo de proyectos repetidos a escala constante en forma infinita.

$$VAN(n,\infty) = VAN(n)\left[\frac{(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}\right]$$

Esta alternativa, si bien homogeniza los proyectos con duración diferente, tiene como inconveniente, que no es real que la tasa de descuento que pueda aplicarse para la duración real de los proyectos, se mantenga más allá de este periodo.

III.2.3. Tasa Interna de Retorno (TIR)

Este indicador es el máximo beneficio que puede esperarse del proyecto y se basa en obtener la tasa que iguale el valor presente de los beneficios con el costo (desembolso inicial), es decir, es la tasa de descuento que hace que el VAN del proyecto sea igual a cero.

Por tanto, la Tasa de Rendimiento Interno (TIR), es la tasa de descuento que iguala al valor presente de los flujos futuros de efectivo esperados con el costo inicial del proyecto, por lo que corresponde al rendimiento al vencimiento sobre un bono. Es un método de flujo de efectivo descontado.

La TIR es la tasa de descuento que iguala el valor presente de los flujos futuros de efectivo esperados, o ingresos, con el costo inicial del proyecto, que matemáticamente se expresa según la ecuación donde r es un valor tal que la suma de los ingresos descontados sea igual al costo inicial del proyecto con lo que se iguala la ecuación a cero.

Matemáticamente, el valor de la TIR se obtiene resolviendo la siguiente ecuación, donde los símbolos tiene el mismo significado que en el caso del VAN.

$$\left[\frac{C_1}{(1+TIR)^1} + \frac{C_2}{(1+TIR)^2} + \ldots\ldots + \frac{C_n}{(1+TIR)^n}\right] - C_0 = 0 \qquad (1)$$

El criterio de selección de un proyecto, una vez obtenida la TIR a través de la resolución de la ecuación anterior se corresponde con uno de los tres casos siguientes:

- TIR > i , y la inversión interesa.
- TIR = i, y la inversión es indiferente.
- TIR < i, y la inversión se rechaza.

---

[2] Para conocer la deducción, véase el Anexo B.

Una ventaja de este método es que se puede calcular a partir de los flujos proyectados de la inversión, sin necesidad de conocer el costo de capital de la empresa, que requiere de cálculos más complejos.

Las limitaciones del empleo de la TIR en la evaluación de proyectos, se debe fundamentalmente a:

- Se basa en la hipótesis de reinversión o financiación de los cobros o pagos netos intermedios a la tasa r, es decir, lo pagos netos se vuelven a reinvertir a un rendimiento r y el costo de los pagos netos es r, lo cual es irreal.
- La existencia de varios tipos de rentabilidad en algunas inversiones, cuando se requiere de préstamos en periodos intermedios del proyecto como se ilustra en la tabla 3. En este caso la Regla de Cambio de Signo de Descartes establece que existirán tantas raíces positivas para 1+r, como cambios de signo en los valores de flujo que definen la inversión.

Tabla 3. Flujos de caja proyectados para cuatro proyectos con TIR múltiples

Proyecto	Períodos						
	0	1	2	3	4	5	6
A	-100 ➡	45	25	15	40	30	30
B	-100 ➡	40	33	30	30	28	-15
C	-100 ➡	56	45 ➡	-20 ➡	37	30	25
D	-100 ➡	54	48	37 ➡	-25 ➡	40 ➡	-20

➡ : Indica los cambios de signo en los flujos actualizados

Tabla 4. Criterio de Descartes para el ejemplo de la tabla 3.

Proyecto	Períodos							Cambios de signo	Cantidad de raíces reales
	0	1	2	3	4	5	6		
A	-	+	+	+	+	+	+	1	una
B	-	+	+	+	+	+	-	2	dos o ninguna
C	-	+	+	-	+	+	+	3	tres o una
D	-	+	+	+	-	+	-	4	cuatro; dos o ninguna

Atendiendo a este comportamiento, las inversiones pueden clasificarse en:

- *Simple:* cuando existe un sólo valor de r y por tanto no hay cambios de signo en los flujos actualizados.

- *No simple:* cuando existen dos o más raíces positivas. En estos casos existen varios cambios de signo en los flujos de efectivo y en la práctica pueden ser consideradas como la suma de varias inversiones independientes.

- *Mixta:* son aquellas inversiones en la cuales de tener múltiples raíces, en alguno de los periodos intermedios el flujo actualizado se vuelve negativo, lo cual ocurre en los proyectos que reciben la mayor parte de su rendimiento en un momento determinado como se ilustra en el ejemplo recogido en la tabla 5.

Tabla 5. Ejemplo de comportamiento de los flujos de caja en inversiones mixtas

Flujo:	Períodos							Σ
	0	1	2	3	4	5	6	
De caja	-1500	600	700	1200	-900	150	143.75	----
Descontados al 15%	-1500	521.74	529.30	907.37	-680.53	113.42	108.70	0

En el ejemplo se aprecia que los flujos descontados al final del segundo año son positivos y que el importe del capital empleado a partir del segundo año es negativo, ya que es el proyecto el que financia a la empresa. En este caso existirán raíces múltiples positivas o un valor único de la TIR que no sea económicamente significativo.

En este caso se puede emplear el Método ampliado de la TIR, que consiste en que los flujos de caja se descuentan al costo del capital de la empresa y no al tipo de rentabilidad del proyecto hasta que se compensen con flujos positivos.

En la práctica, la obtención del valor de la TIR en cualesquiera de los casos anteriores, es equivalente a la determinación de la TIR en la siguiente ecuación, obtenida mediante la multiplicación de la expresión (1) por la magnitud $(1 + r)^n$, donde por simplicidad se utiliza r para representar el valor de la TIR.

$$(1+r)^n C_0 + (1+r)^{n-1} C_1 + (1+r)^{n-2} C_2 + \ldots + (1+r) C_{n-1} + C_n = 0$$

Si se realiza la sustitución $x = 1+ r$, se obtiene finalmente la expresión de trabajo siguiente, que matemáticamente se corresponde con un polinomio de grado n, cuyos coeficientes constituyen los flujos netos de cada período.

$$P(x) = C_0 x^n + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_{n-1} x + C_n = 0$$

Por tanto, la determinación de la TIR se corresponde con la búsqueda de las raíces reales y positivas (las complejas y los valores negativos carecen de sentido económico) de un polinomio de grado n. Matemáticamente está demostrado que un polinomio de grado n con coeficientes reales tiene n raíces en el campo de los números complejos, lo que conduce a las siguientes tres interrogantes:

– ¿Cuántos valores de TIR son matemáticamente posibles?. La respuesta a esta pregunta la brinda la Regla de Descartes *«el número de raíces positivas de la ecuación P(x)=0 no es mayor que el número de variaciones de signo del polinomio P(x) y puede diferenciarse de este número en una cantidad par».* Por tanto, pueden existir proyectos con múltiples valores de TIR en el sentido matemático.

– Cuando existen múltiples valores matemáticos de la TIR, ¿cuál es su interpretación?. Esta situación puede ser un índice de que la naturaleza del proyecto consta de más de una etapa y es recomendable su división para el análisis o que requiere de una mayor inversión inicial para que su comportamiento sea único.

– ¿Cómo determinar los valores de la TIR?. Para la determinación de la magnitud de la TIR pueden emplear diversos métodos atendiendo a las características, los cuales pueden agruparse en los cinco casos que se analizan a continuación por separado.

Caso I: Si existe un valor único de la TIR para el proyecto, sin importar la cantidad de períodos de que consta el proyecto, puede calcularse utilizando la función TIR() de la Hoja de Cálculo Electrónico EXCEL que tiene como argumento los valores proyectados de flujo y un valor inicial de la TIR, que se utiliza para el algoritmo interno de cálculo y que puede omitirse, como se ilustra en la figura 2.

Figura 2. Cálculo de la TIR utilizando EXCEL

a) Preparación

B	C	D	E	F	G	H	I
	períodos						
	0	1	2	3	4	5	TIR
Flujo de caja	-700	220	150	180	180	210	TIR(C4:H4,0.1)

b) Resultado

B	C	D	E	F	G	H	I
	períodos						
	0	1	2	3	4	5	TIR
Flujo de caja	-700	220	150	180	180	210	11%

Caso II: Si el proyecto consta de un período. En este caso el planteamiento del problema se corresponde con la siguiente ecuación:

$$C_0 + \frac{C_1}{1+r} = 0$$

El valor de r, puede obtenerse despejando su valor en la ecuación anterior, se obtiene:

$$r = -\left(\frac{C_0 + C_1}{C_1}\right)$$

Caso III: Cuando la inversión es de dos períodos. Para estas condiciones, la TIR viene dada por:

$$C_0 + \frac{C_1}{1+r} + \frac{C_2}{(1+r)^2} = 0$$

Multiplicando la expresión anterior por el término $(1 + r)^2$ y sustituyendo $(1 + r)$ por x se obtiene como expresión de trabajo la siguiente:

$$C_0x^2 + C_1x + C_2 = 0$$

La solución de esta ecuación equivalente se corresponde con la solución general de la ecuación de segundo grado[3] que, aplicada a la TIR adopta la forma siguiente:

$$x = \frac{-C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4C_0C_2}}{2C_0} \qquad (1)$$

$$r = x - 1 \quad (2)$$

Nótese que si en la expresión para la determinación de x, la magnitud de la expresión contenida en el radical es negativa, no existen valores reales de la TIR para el proyecto analizado, lo cual puede ocurrir si se cumplen las dos condiciones siguientes:

- En el segundo periodo se requiere de un préstamo (C_2: negativo).
- El valor absoluto de $4C_0C_2$ es mayor C_1^2.

Otro caso particular de interés, es aquel en el cual la suma de los flujos de efectivo de los tres períodos es cero, es decir, $C_0 + C_1 + C_2 = 0$. Bajo estas condiciones se cumple que $C_2 = -(C_1 + C_0)$.

Sustituyendo la expresión anterior en (1) se obtiene:

$$x = \frac{-C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4C_0\left[-(C_0 + C_1)\right]}}{2C_0} = \frac{-C_1 \pm \sqrt{C_1^2 + 4C_0^2 + C_1^2}}{2C_0} = \frac{-C_1 \pm \sqrt{(2C_0 + C_1)^2}}{2C_0}$$

$$x_1 = \frac{-C_1 + (2C_0 + C_1)}{2C_0} = 1 \quad \therefore \quad r_1 = x_1 - 1 = 0$$

$$x_2 = \frac{-C_1 - (2C_0 + C_1)}{2C_0} = \frac{-2(C_0 + C_1)}{2C_0} = \frac{-(C_0 + C_1)}{C_0} = -1 - \frac{C_1}{C_0} \quad \therefore \quad r_2 = x_2 - 1 = -2 - \frac{C_1}{C_0}$$

En correspondencia con el hecho de que el problema modela se trata de una inversión, C_0 es negativo, por tanto r_2 viene dada por:

$$r_2 = \frac{C_1}{|C_0|} - 2$$

---

[3] Para la deducción, véase la Solución general de la Ecuación de Segundo Grado desarrollada en el Anexo E1. de este trabajo.

A modo de resumen de este caso, $C_0 + C_1 + C_2 = 0$, puede señalarse que uno de los dos valores de la TIR siempre es cero, en tanto el signo (positivo o negativo) del otro valor depende de que la relación existente entre el monto del flujo de efectivo en el primer período (C_1) y la inversión inicial (C_0), sea mayor o menor que dos, es decir, para que exista una TIR positiva en el proyecto es necesario que el flujo en el primer periodo sea, como mínimo, el doble que la inversión inicial.

Caso IV: Cuando la inversión es de tres períodos. Para estas condiciones, la TIR se obtiene de resolver la siguiente ecuación:

$$C_0 + \frac{C_1}{1+r} + \frac{C_2}{(1+r)^2} + \frac{C_3}{(1+r)^3} = 0$$

Multiplicando la expresión anterior por el término $(1 + r)^3$ y sustituyendo (1 + r) por x se obtiene como expresión de trabajo la siguiente:

$$C_0x^3 + C_1x^2 + C_2x + C_3 = 0$$

La anterior ecuación es equivalente a la determinación de las raíces de un polinomio de tercer grado, para lo cual se puede utilizar de manera combinada el procedimiento de Cardano[4] (Anexo E2) que conduce a una de los tres variantes siguientes:

- *Variante #1: Una solución real y dos complejas conjugadas, estás últimas sin valor financiero.* En este caso el único problema es cuando la raíz real sea negativa, pues no tiene sentido económico y debe analizarse la formulación del problema y los cálculos. Matemáticamente, este caso se corresponde con la condición $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$ y el valor de la TIR viene dado por la expresión $TIR = \alpha + \beta - 1$, donde:

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \qquad \beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$p = \frac{C_2}{C_0} - \frac{C_1^2}{3C_0} \qquad q = \frac{C_3}{C_0} - \frac{2C_1^3}{27C_0^3} + \frac{C_1C_2}{3C_0^2}$$

- *Variante #2: Tres soluciones reales, dos de ellas iguales.* En la práctica este caso proporciona dos valores de TIR, entre los cuales debe escoger el analista aplicando criterios adicionales que brinden racionalidad a la magnitud seleccionada. Matemáticamente, este caso se corresponde con la condición $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$ y los

[4] Para la deducción, véase la Solución general de la Ecuación de Tercer Grado desarrollada en el Anexo C4.

valores de la TIR vienen dado por las expresiones: $TIR_1 = \alpha - 1$; $TIR_2 = 2\alpha - 1$ y $\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q^2}{4}}$.

– *Variante #3: Tres soluciones reales desiguales entre sí.* Este caso requiere, al igual que el anterior, un análisis financiero complementario, para escoger cual de las tres soluciones tiene sentido económico. La determinación analítica de los tres valores requiere de la extracción de la raíz cúbica de un número complejo, la cual se ilustra en el Anexo D. En este caso los valores posibles de α y β viene dados por expresiones de la tabla 6, en la cual θ_0 por simplicidad se asume como cero.

Tabla 6. Expresiones para la determinación de α y β.

k	Valores de α posibles:	Valores de β posibles:
0	$\alpha_0 = \sqrt[3]{r_1}$	$\beta_0 = \sqrt[3]{r_2}$
1	$\alpha_1 = \sqrt[3]{r_1}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$	$\beta_1 = \sqrt[3]{r_2}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$
2	$\alpha_2 = \sqrt[3]{r_1}\left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right]$	$\beta_2 = \sqrt[3]{r_2}\left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right]$

Caso V: Cuando la inversión consta de cuatro períodos, existen cuatro, dos o ninguna raíz con VAN positivo. Para estas condiciones, la TIR se obtiene de resolver la siguiente ecuación:

$$C_0 + \frac{C_1}{1+r} + \frac{C_2}{(1+r)^2} + \frac{C_3}{(1+r)^3} + \frac{C_3}{(1+r)^4} = 0$$

Multiplicando la expresión anterior por el término $(1 + r)^4$ y sustituyendo $(1 + r)$ por x se obtiene como expresión de trabajo la siguiente:

$$C_0x^4 + C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4 = 0$$

La anterior ecuación es equivalente a la determinación de las raíces de un polinomio de tercer grado, para lo cual se puede utilizar las expresiones de Ferrari[5] , lo cual en la práctica resulta engorroso y es preferible a partir de este número de raíces utilizar un algoritmo iterativo. Para cantidades de períodos superiores a cuatro no existe procedimientos algebraicos que permitan obtener las raíces de un polinomio en términos de los coeficientes de éste.

III.2.4. Indice de rentabilidad

El Indice de Rentabilidad se utiliza para decidir entre alternativas con semejantes VAN y TIR cuando existe una escasez de recursos, ya que este indicador mide cuanto reporta cada unidad monetaria invertida. Para su determinación se emplea la siguiente expresión:

[5] Para la deducción, véase el en el Capítulo de Álgebra el aspecto Solución general de la Ecuación de Cuarto Grado.

$$IR = \frac{Valor\ Actualizado\ de\ Flujos}{Inversiones} = \frac{\sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+i)^t}}{\sum_{t=1}^{n} I_t}$$

III.2.5. Comparación entre los Métodos del VAN y la TIR

El método de VAN indica de manera clara y exacta si la realización de un proyecto se justifica, pues sus beneficios exceden a sus costos (inversión inicial) evaluada a una tasa de descuento que refleja el costo de capital. Es muy útil para seleccionar entre un grupo de proyectos, aquel que brinda mayor beneficio, ya que brinda una información integral del proyecto y no conduce a una evaluación de las características del flujo de efectivo a lo largo del proyecto, lo cual reviste especial interés en el caso de proyectos de larga duración.

En el caso de la TIR, una ventaja es que se puede obtener utilizando los datos correspondientes a los flujos de efectivo del proyecto sin necesidad de conocer el costo de capital de la empresa.

De lo expuesto se aprecia que los criterios del VAN y la TIR pueden conducir a elecciones diferentes debido a que ambos criterios miden cosas diferentes: la TIR proporciona la rentabilidad relativa del proyecto y el VAN la rentabilidad absoluta.

- Si dos proyectos son independientes, los criterios del VAN y el TIR coinciden.
- Si los proyectos son mutuamente excluyentes se produce un conflicto cuando el costo de capital sea inferior a la TIR y el VAN mayor que cero.
- Existen dos condiciones fundamentales que pueden ocasionar conflictos entre los criterios del VAN y la TIR: cuando existen diferencias en el tamaño (escalas) de los proyectos, es decir, cuando el costo de un proyecto es mayor que el otro y cuando existen diferencias de oportunidad , es decir la oportunidad de los flujos de efectivo provenientes de los proyectos difiere de forma tal que la mayor parte de los flujos de un proyecto se presentan en los primeros años y en el otro al final. Estos factores aconsejan, que cuando se evalúan proyectos mutuamente excluyentes, especialmente aquellos con diferencia de escala y oportunidad en el tiempo, debe emplearse el VAN.

III.2.6. Criterios de selección atendiendo al capital disponible en la empresa

La cantidad y tipos de proyectos que pueden escogerse varían en dependencia del capital disponible en la empresa para inversión en nuevos proyectos, identificándose los cuatro tipos alternativas posibles siguientes:

- *Empresa de capital constante y proyectos independientes:* Se escogen entre los proyectos propuestos los de mayor VAN y TIR, hasta que se alcanza el monto del capital disponible.

- *Empresa de capital constante y proyectos mutuamente excluyentes:* Se escoge el proyecto de mayor VAN o TIR, cuyo monto no sobrepasa el capital constante disponible.

– *Empresa de capital sin restricción y proyectos independientes:* Se escogen todos los proyectos que cumplan la condición de VAN mayor que cero y TIR mayor que el costo de capital de la empresa.

– *Empresa de capital sin restricción y proyectos mutuamente excluyentes:* Se escoge el de mayor VAN y TIR.

IV. Discusión de casos

Ejemplo #1. Sean los proyectos A, B C, D, E, F y G alternativas de inversión de la empresa Mesa&PP S.A. con los flujos de efectivo que se muestran en la tabla 7. Seleccione el proyecto más atractivo utilizando los siguientes métodos:

a) Flujo de Caja (Cash Flow)
b) Tasa de Rendimiento Contable (Accounting Rate of Return)
c) Período de Recuperación (Pay Back)
d) Valor Actual (Present Value)
e) Valor Actual con Diferentes Duraciones
f) Indice de Rentabilidad
g) Tasa Interna de Rentabilidad (TIR)
h) Discuta de manera comparativa los resultados alcanzados en los incisos anteriores.

Tabla 7. Flujos de efectivo de los seis proyectos bajo estudio.

	B	C	D	E	F	G	H	I
	período	**Ejemplo #1. Flujos de efectivo de los proyectos**						
		Proyecto A	Proyecto B	Proyecto C	Proyecto D	Proyecto E	Proyecto F	Proyecto G
4	0	-1200.00	-1200.00	-1200.00	-6000.00	-10000.00	-6000.00	-1200.00
5	1	200.00	300.00	1050.00	4300.00	3500.00	4900.00	400.00
6	2	1000.00	850.00	100.00	1400.00	1500.00	1050.00	850.00
7	3	550.00	450.00	570.00	500.00	1000.00	950.00	400.00
8	4	370.00	550.00	100.00	500.00	400.00	700.00	485.00
9	5			-100.00	580.00	-1500.00		
10	6			300.00	600.00	3000.00		
11	7					6000.00		

Respuesta:

a) En la tabla 8 se muestran los resultados obtenidos al aplicar el Métodos del Flujo de Caja a los seis proyectos evaluados, utilizando la Hoja de cálculo Electrónico EXCEL, indicándose la ecuación de cálculo utilizada.

Tabla 8. Resultados por el Método del Flujo de Caja.

índice	Ejemplo #1. Método del Flujo de Caja (Cash Flow)						
	Proyecto A	Proyecto B	Proyecto C	Proyecto D	Proyecto E	Proyecto F	Proyecto G
Cálculo B:	SUMA(C4:C8)	SUMA(D4:D8)	SUMA(E4:E10	SUMA(F4:F10)	SUMA(G4:G11	a)	a)

			)		)		
B:	920.00	950.00	820.00	1880.00	3900.00	1600.00	935.00
Selección:					*		

a) Los cálculos para estos proyectos se realizan de manera similar a los anteriores.

Proyecto seleccionado: E.

b) En la tabla 9 se muestran los resultados para el Método de la Tasa de Rendimiento Contable en el caso de los seis proyectos evaluados.

Tabla 9. Resultados por el Método de la Tasa de Rendimiento Contable.

	B	C	D	E	F	G	H	I
	índice	Ejemplo #1. Método de la Tasa de Rendimiento Contable (Accounting Rate of Return)						
		Proyecto A	Proyecto B	Proyecto C	Proyecto D	Proyecto E	Proyecto F	Proyecto G
23	Cálculo I:	ABS(C4)	ABS(D4)	ABS(E4)	ABS(F4)	ABS(G4)	ABS(H4)	ABS(I4)
24	Cáculo Bm:	PROMEDIO(C5:C11)	a)	a)	a)	a)	a)	a)
25	Cálculo TRC:	C27/C26	D27/D26	E27/E26	F27/F26	G27/G26	H27/H26	I27/I26
26	I:	1200.00	1200.00	1200.00	6000.00	10000.00	6000.00	1200.00
27	Bm:	530.00	537.50	336.67	1313.33	1985.71	1900.00	533.75
28	TRC:	0.44	0.45	0.28	0.22	0.20	0.32	0.44
29	Selección:		*					

a) Los cálculos para estos proyectos se realizan de manera similar a los anteriores.

Proyecto seleccionado: B.

c) En la tabla 10 se muestran los resultados para el Método del Período de Recuperación

Tabla 10. Resultados por el Método del Período de Recuperación.

período	Ejemplo #1. Método del Período de Recuperación (Pay Back)						
	Proyecto A	Proyecto B	Proyecto C	Proyecto D	Proyecto E	Proyecto F	Proyecto G
1	-1000.00	-900.00	-150.00	-1700.00	-6500.00	-1100.00	-800.00
2	0.00	-50.00	-50.00	-300.00	-5000.00	-50.00	50.00
3	550.00	400.00	520.00	200.00	-4000.00	900.00	450.00
4	920.00	950.00	620.00	700.00	-3600.00	1600.00	935.00
5			520.00	1280.00	-5100.00	1600.00	
6			820.00		-2100.00	1600.00	
7					$3 900.00	$1 600.00	
Selección:	*						

Proyecto seleccionado: A.

d) En la tabla 11 se muestran los resultados para el Método del Valor Actual.

Tabla 11. Resultados por el Método del Valor Actual.

	B	C	D	E	F	G	H	I
	índice	Ejemplo #1. Método del Valor Actual (VAN)						
		Proyecto A	Proyecto B	Proyecto C	Proyecto D	Proyecto E	Proyecto F	Proyecto G
46	Cálculo VAN:	VNA($C$48 C5:C11)+C4	a)	a)	a)	a)	a)	a)
47	VAN:	$474.20	$488.96	$440.99	$482.10	-$713.00	$514.17	$497.90
48	r (%):	10.00%						
49	Selección:						*	

a) Los cálculos para estos proyectos se realizan de manera similar a los anteriores.

Proyecto seleccionado: F.

e) En la tabla 12 se muestran los resultados para el Método del Valor Actual con Diferentes Duraciones.

Tabla 12. Resultados por el Método del Valor Actual con Diferentes Duraciones.

	B	C	D	E	F	G	H	I
	índice	Ejemplo #1. Método del Valor Actual para Proyectos con Diferentes Duraciones						
		Proyecto A	Proyecto B	Proyecto C	Proyecto D	Proyecto E	Proyecto F	Proyecto G
54	Cálculo VAN infinito:	a)	a)	a)	a)	a)	a)	a)
55	VAN infinito:	281.76	290.52	281.88	308.15	-471.20	305.51	295.84
56	N:	4	4	6	6	7	4	4
57	Selección:				*			

a) **C47*POTENCIA(1+$C$48 C56)/(1+POTENCIA(1+$C$48 C56))**

Proyecto seleccionado: D.

f) En la tabla 13 se muestran los resultados para el Método del Indice de Rentabilidad.

Tabla 13. Resultados por el Método del Indice de Rentabilidad.

	B	C	D	E	F	G	H	I
	período	Ejemplo #1. Método del Indice de Rentabilidad						
		Proyecto A	Proyecto B	Proyecto C	Proyecto D	Proyecto E	Proyecto F	Proyecto G
62	0	-1200.00	-1200.00	-1200.00	-6000.00	-10000.00	-6000.00	-1200.00
63	1	181.82	272.73	954.55	3909.09	3181.82	4454.55	363.64
64	2	826.45	702.48	82.64	1157.02	1239.67	867.77	702.48
65	3	413.22	338.09	428.25	375.66	751.31	713.75	300.53
66	4	252.71	375.66	68.30	341.51	273.21	478.11	331.26
67	5			-62.09	360.13	-931.38		
68	6			169.34	338.68	1693.42		
69	7					3078.95		
70	Cálculo IR:	a)	a)	b)	a)	c)	a)	a)
71	IR:	1.40	1.407	c)	1.08	0.93	1.09	1.415
72	r:	10.00%						

73	Selección:							*

a) SUMA(C63:C66)/ABS(C62)

b) (SUMA(E63:E66)+E68)/(ABS(E62+E67))

c) (SUMA(G63:G66)+G68+G69)/(ABS(G62+G67))

Proyecto seleccionado: F.

g) En la tabla 14 se muestran los resultados para el Método de la TIR.

Tabla 14. Resultados por el Método de la TIR.

	B	C	D	E	F	G	H	I
	índice	Ejemplo #1. Método de la Tasa Interna de Retorno (TIR)						
		Proyecto A	Proyecto B	Proyecto C	Proyecto D	Proyecto E	Proyecto F	Proyecto G
78	Cálculo TIR:	TIR(C4:C11 $C$80)	TIR(D4:D11 $C$80)	a)	a)	a)	a)	a)
79	TIR:	26%	27%	30%	15%	8%	16%	28%
80	r_inicial (%):	8.00%						
81	Selección:			*				

Proyecto seleccionado: C.

h) Discusión comparativa.

El primer resultado que resulta evidente del análisis de la selección obtenida al evaluar por cada uno de los métodos recogidos en la literatura los siete proyectos del ejemplo, es que: *«un mismo conjunto de proyectos analizados por métodos diferentes conduce a a selecciones diferentes que, en el límite, como se ilustra en el caso de estudio, la selección no coincida por ninguno de los métodos».* Por tanto, la selección del método es un proceso de gran impacto y debe ser realizada cuidadosamente.

Por otra parte, cada uno de los métodos descritos exhiben una racionalidad en su propuesta, al recoger un enfoque contable o financiero, lo cual conduce a otra conclusión derivada del ejemplo: *«utilizar más de un método proporciona niveles de comparación de enfoques y puede ser muy útil, siempre y cuando, no constituya una carga financiera y una demora apreciable para obtener la información necesaria para adoptar la decisión».*

Finalmente, puede extraerse otra enseñanza de este caso: *«ningún método sustituye el análisis del colectivo de Finanzas, sólo representan una herramienta que facilita la adopción de decisiones».*

Ejemplo #2. Sean los proyectos I, II, III, IV y V, alternativas de inversión de la empresa Rich&Poor S.A. con los flujos de efectivo que se muestran en la tabla 15. Determine:

a) Las Tasas Internas de Retorno utilizando la solución general de la Ecuación de Segundo así como la TIR y el VAN a través de la hoja de cálculo EXCEL.

b) Analice los resultados obtenidos en el inciso anterior.

Tabla 15. Flujos de efectivo de los proyectos para evaluar.

	B	C	D	E	F	G
	período	**Ejemplo #2. Flujos de efectivo**				
		Proyecto I	**Proyecto II**	**Proyecto III**	**Proyecto IV**	**Proyecto V**
4	**0**	**-1900**	**-900**	**-2500**	**-6000**	**-6000**
5	**1**	**2800**	**2800**	**8000**	**8000**	**5500**
6	**2**	**-900**	**-1900**	**-6000**	**-2500**	**2500**

Repuesta:

a) Los valores de la TIR obtenidos por los métodos solicitados se muestra en la tabla 16.

Tabla 16. Valores de la TIR para los proyectos analizados.

	B	C	D	E	F	G
	índice	Ejemplo #2. Método de la Tasa Interna de Retorno (TIR)				
		Proyecto I	Proyecto II	Proyecto III	Proyecto IV	Proyecto V
13	Cálculo suma flujos:	SUMA(C4:C6)	SUMA(C4:C6)	SUMA(C4:C6)	SUMA(C4:C6)	SUMA(C4:C6)
14	Cálculo TIR1 :	(-C5+RAIZ(C5*C5-4*C6*C4))/(2*C4)-1	a)	a)	a)	a)
15	Cálculo TIR2 :	(-C5-RAIZ(C5*C5-4*C6*C4))/(2*C4)-1	b)	b)	b)	b)
16	TIR EXCEL :	TIR(C4:C6,0.1)	TIR(D4:D6,0.1)	c)	c)	c)
17	Cálculo VAN #1 :	VNA($C$25 C5:C6)+C4	VNA($C$25 D5:D6)+D4	d)	d)	d)
18	Cálculo VAN #2 :	VNA($C$27 C5:C6)+C4	VNA($C$27 D5:D6)+D4	e)	e)	e)
19	Cálculo VAN #3 :	VNA($C$29 C5:C6)+C4	VNA($C$29 D5:D6)+D4	f)	f)	f)
20	Suma flujos :	0.00	0.00	-500.00	-500.00	2000.00
21	TIR1 :	-52.63%	0.00%	20.00%	-50.00%	-133.33%
22	TIR2 :	0.00%	111.11%	100.00%	-16.67%	25.00%
23	TIR según EXCEL :	0.00%	0.00%	20.00%	-16.67%	25.00%
24	VAN1 :	-$ 145.75	$ 98.11	-$ 80.34	-$ 933.84	$ 672.97
25	Tasa1 :	15.00%				
26	VAN2 :	-$ 191.67	$ 113.89	$ 0.00	-$ 1 069.44	$ 319.44
27	Tasa2 :	20.00%				
28	VAN3 :	-$ 236.00	$ 124.00	$ 60.00	-$ 1 200.00	$ 0.00
29	Tasa3 :	25.00%				

b) Análisis de los resultados

Los resultados mostrados en la tabla 16 ponen de manifiesto los siguientes aspectos:

- Se comprueba que en aquellos proyectos cuyo flujo de efectivo final es cero (I;II), uno de los valores de la TIR es nulo. Igualmente se aprecia que el otro valor de la TIR puede ser negativo a positivo.

- Se comprueba que cuando un proyecto se evalúa a un valor de la TIR, su VAN es nulo (III;V)

- Proyectos cuyos dos valores de la TIR sean positivos (III) o nulo (I), pueden tener un VAN negativo.

- El algoritmo utilizado por EXCEL escoge siempre la TIR más cercana a cero, que se corresponde con el valor más racional.

V. Conclusiones

Como resultado de este trabajo puede señalarse que se presentaron los diferentes Métodos para la evaluación de Proyectos de Inversión, así como sus ventajas y limitaciones, las cuales se ilustran en los ejemplos desarrollados para este propósito.

De igual forma, se desprende de los aspectos planteados se ratifica la importancia de la insustituible evaluación «inteligente» de los resultados y la selección del método de evaluación utilizado.

VI. Bibliografía

Blanco, A.M.; Domínguez, J.C.: «Elementos de Matemática Financiera»; Editorial ENPES; Cuba; 1989.

Bronshtein, I.; Semendiaev, K.: «Manual de Matemáticas para Ingenieros y Estudiantes», Editorial MIR, URSS, 1971.

Bueno, E.; Cruz, I.; Durán, J.J.: «Economía de la empresa», Ediciones Pirámide. S.A., 14 Edición, 1991

Caso, J.C:«Ecuaciones Cuadráticas y Cúbicas. Un Enfoque distinto»; 1999.

Caso, J.C:«Resolución de ecuaciones algebraicas, con coeficientes reales, de grado n»; 1999.

Churchill, R.V: «Elementos de variable compleja y aplicaciones»; Ediciones Ciencia y Técnica; 1970, Cuba.

García, J.:«Contabilidad de Costos»; McGraw Hill , 1999.

Gonzalez, B.: «Las bases de las finanzas empresariales»; Editorial Academia, La Habana, Cuba, 2001

Hadley, G.: «Linear Algebra»; Editorial Ciencia y Técnica; La Habana; Cuba; 1968.

Hdez, L.; del Castillo, A.; Bofia, A.; Pons, A:«Probabilidades»; pp: 243-54; Editorial Pueblo y Educación; Cuba, 1981.

Hohn, F.E.: «Elementary Matrix Algebra»; Ediciones Revolucionarias; La Habana; Cuba; 1969.

Kurosch, A.G.: «Curso de Álgebra Superior»; Editorial MIR; Moscú; 1968.

Spigel, M.:«Teoría y Problemas de Estadística», Ediciones Revolucionarias, 1977.

VII. Anexos

VII.1. Anexo A. Términos y definiciones

Análisis de inversión. Planeamiento eficaz que permite determinar el momento más adecuado para la adquisición de un activo.

Costo de oportunidad. Rentabilidad a la que se renuncia para invertir en un proyecto en lugar de hacerlo en el mercado de capitales, es el criterio que expresa que el negocio donde se va a realizar la inversión tiene que proporcionar mayor beneficio que colocarlo en el banco a ganar la tasa de interés.

Nota 1: La tasa de interés es la expresión monetaria del costo de oportunidad.
Nota 2: El mercado de capitales permite transferir riqueza a través del tiempo.

Ecuación. Combinación de variables y parámetros que proporcionan un resultado numérico conocido como término independiente.

Director de Proyectos. Es el responsable de la planificación y la supervisión del proyecto desde su comienzo hasta el final.

Gestión de proyectos. Proceso de planificación y puesta en marcha que empezó a utilizarse en los años sesenta en la NASA.

Incertidumbre. Es un caso particular de riesgo que ocurre cuando no se tienen antecedentes históricos de las probabilidades de ocurrencia de eventos o situaciones y por tanto no se puede determinar una probabilidad de ocurrencia objetiva.

Mercado. Es aquella que está compuesta por todos los activos invertidos ponderados de acuerdo a su valor en el mercado.

Polinomio de grado n. Un polinomio de grado n, $P_n(x)$,viene dado por la siguiente expresión $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$, que de manera compacta puede expresarse a través de $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}x^i$.

Parámetros. Magnitud que en la formulación de un problema para su solución su valor es conocido, pero que puede variar de un problema a otro.

Raíces (ceros) de un polinomio. Es un valor de la variable independiente (x_i) que al sustituirse en el polinomio hace que el valor del polinomio sea cero. $P_n(x_i) = 0$.

Riesgo. Es una condición desventajosa cuya tendencia es conocida, se conoce donde se encuentran las dificultades y cual es el beneficio, permitiendo la determinación de una probabilidad histórica.

Riesgo financiero. Es el riesgo de no estar en condiciones de cubrir los costos financieros y está asociado al crecimiento de los costos financieros fijos de la empresa, a cambio de lo cual se obtiene un incremento superior al pronosticado por el modelo lineal en las ganancias por acción.

Riesgo operativo. Es el riesgo de no estar en capacidad de cubrir los costos de operación y está asociado al incremento de los Costos Fijos de la empresa, a cambio de lo cual las utilidades antes de intereses e impuestos experimentan un incremento superior al pronosticado por el modelo lineal con un incremento en las ventas.

Solución de una ecuación. Valor de la(s) variable(s) independiente(s) que al ser sustituida(s) en la ecuación hacen uno de sus miembros igual a cero.

Viabilidad de un proyecto. Es un Plan Comercial para confirmar:

a) Existencia de un mercado para dar salida a los nuevos productos o servicios.
b) Todos los gastos del proyecto se recuperan con creces y en un tiempo suficientemente breve como para poner en peligro la estabilidad financiera de la compañía.
c) El balance económico del proyecto ha sido desarrollado de forma realista, justificando los costes añadidos.

Variables independientes o incógnitas. Son aquellas magnitudes cuya determinación constituye la solución de un problema.

VII.2. Anexo B. Deducción del Valor Actual Neto de proyectos repetidos a escala constante en forma infinita

La suma infinita de una progresión geométrica de razón x < 1, se puede obtener a través de la siguiente expresión:

$$\sum_{t=1}^{\infty} x^t = \frac{1}{1-x}$$

En el caso de un proyecto de n periodos, su repetición infinita a escala constante VAN(n,α) se define de la forma siguiente:

$$VAN(n,\infty) = \sum_{t=1}^{\infty} VAN(n)x^t$$

donde:

$$VAN(n) = \sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+r)^t}$$

$$x = \frac{1}{(1+r)^n}$$

Nótese, que la expresión para VAN(n,α), es una serie geométrica de razón $(1 + d)^{-n}$, por lo que pude calcularse como.

$$VANA(n,\infty) = VAN(n)\left[\frac{1}{1-(1+r)^{-n}}\right] = VAN(n)\left[\frac{(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}\right]$$

VII.3. Anexo C. Elementos de Estadística

VII.3.1. Anexo C1. Esperanza Matemática

Definición

Si x es una variable aleatoria discreta que puede asumir los valores x_1, x_2, ...x_n con las probabilidades respectivas p_1, p_2, ... p_n, la Esperanza Matemática E(x) se define como

$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \qquad y \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Propiedades de la Esperanza Matemática

$$E(cx) = cE(x) \qquad \forall c \in \Re$$

$$E(x \pm y) = E(x) \pm E(y)$$

$$E(xy) = E(x)E(y) \qquad si\ x\ es\ independiente\ de\ y$$

VII.3.2. Anexo C2. Varianza

Definición.

$$V(x) = E[x - E(x)]^2 = E(x^2) - 2E(x)E(x) + [E(x)]^2 = E(x^2) - 2[E(x)]^2 + [E(x)]^2$$

$$V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$$

Propiedades de la varianza.

$$V(0) = 0$$

$$V(cx) = c^2 V(x) \qquad \forall c \in \Re$$

$$V(x \pm y) = V(x) \pm V(y)$$

$$V(cx \pm dy) = c^2V(x) \pm d^2V(y) \qquad \forall c,d \in \Re$$

VII.3.3. Anexo C3. Covarianza

Definición

$$C(x,y) = E\{[x-E(x)][y-E(y)]\}$$

Propiedades de la covarianza

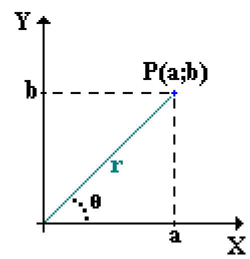
$$C(x,x) = E(x^2) - [E(x)]^2 = V(x)$$

VII.4. Anexo D. Raíces de Números Complejos

VII.4.1. Anexo D1. Formas de Representación

Los números complejos representan un punto P(a;b) en el plano complejo como se ilustra en la figura 3 donde:

Figura 3. Representación de números complejos



a: proyección sobre el eje X del punto P(a;b).
b: proyección sobre el eje X del punto P(a;b).
r: distancia (módulo) del punto al origen de coordenadas P(0;0), obtenida mediante la expresión $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ **.**
θ: ángulo formado por el eje X y el segmento de recta que une el origen de coordenadas y el punto P(a;b). Matemáticamente su valor de obtiene a través de la expresión $\theta = tg^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$.

Analíticamente pueden representarse a través de las formas siguientes:

- *Forma binómica:* Está constituida por dos componentes: una real (a) y otra compleja (bi) mediante la forma $P(a;b) = a + bi$, donde i es la unidad imaginaria que se define como $i = \sqrt{-1}$.

– *Forma trigonométrica:* En este caso los valores de a y b se sustituyen por su equivalente trigonométrico de la forma que se indica a continuación: $P(r;\theta) = r[\cos(\theta) + isen(\theta)]$. Los valores del coseno y el seno de θ pueden determinarse a traves de las siguientes expresiones: $\cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ y $sen(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

– *Forma exponencial:* Esta representación utiliza la identidad fundamental de las exponenciales imaginarias: $e^{-i\theta t} = \cos(\theta t) - isen(\theta t)$. Sustituyendo la expresión anterior en la forma trigonométrica se obtiene para P la siguiente expresión: $P(r;\theta) = re^{i\theta}$.

VII.4.2. Anexo D2. Transformación de forma binómica a trigonométrica

Sea el punto $P(a;b)$ cuya representación en forma binómica es $P(a;b) = a + bi$ y en forma trigonométrica $P(r;\theta) = r[\cos(\theta) + isen(\theta)]\,(1)$. Además se conoce que:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (2)$$

$$\cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (3)$$

$$sen(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (4)$$

Sustituyendo las expresiones (2), (3) y (4)en (1) se obtiene para $P(r;\theta)$ la siguiente expresión:

$$P(a;b) = a + bi = P(r;\theta) = \sqrt{a^2 + b^2}\left[\cos\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) + isen\left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)\right]$$

VII.4.3. Anexo D3. Raíces de números complejos

La determinación de las raíces de un número complejo se realiza utilizando la forma trigonométrica. Sea el número complejo $P(r;\theta) = r[\cos(\theta) + isen(\theta)]$. Entonces la raíz n de $P(r;\theta)$ viene dada por:

$$Z = \sqrt[n]{P(r;\theta)} = \sqrt[n]{r}\sqrt[n]{\cos(\theta) + isen(\theta)} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

donde k toma los valores 0,1,2,...,n-1.

Por ejemplo, la raíz cúbica de un número complejo tiene tres raíces complejas que vienen dadas por:

$$Z_0 = \sqrt[3]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta_0}{3}\right) + isen\left(\frac{\theta_0}{3}\right)\right] \quad (k=0)$$

$$Z_1 = \sqrt[3]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta_0 + 2\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{\theta_0 + 2\pi}{3}\right)\right] \quad (k=1)$$

$$Z_2 = \sqrt[3]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta_0 + 4\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{\theta_0 + 4\pi}{3}\right)\right] \quad (k=2)$$

VII.5. Anexo E. Determinación de las raíces de polinomios

VII.5.1. Anexo E1. Solución de la Ecuación General de Segundo Grado

La ecuación general de segundo grado está dada por la expresión $ax^2 + bx + c = 0$, donde los términos a, b, y c son números reales. Debe señalarse que la magnitud $a \neq 0$, ya que en ese caso, la ecuación de segundo grado se reduce a la forma $bx + c = 0$, de donde el valor de x viene dado por –c/b.

Si se dividen ambos miembros de la ecuación entre a y se suma y resta en el miembro izquierdo de la ecuación el término $b^2/(2a)^2$ se puede operar como sigue:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$$

Extrayendo raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación se obtiene:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right) = \pm\sqrt{\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)}$$

Despejando finalmente x en la ecuación anterior se obtiene que la solución general de la ecuación de segundo grado tiene dos raíces (soluciones) que están dadas por la siguiente expresión:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Nótese que el valor de la magnitud $\Delta = b^2 - 4ac$, denominada determinante, conduce a tres alternativas para las raíces, excluyentes entre sí:

a) $\Delta > 0$. En este caso los dos valores de x (raíces) que satisfacen la ecuación general de segundo grado son reales y diferentes entre sí y se corresponden con los obtenidos de las siguientes expresiones:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

b) $\Delta = 0$. Cuando se cumple esta condición, las dos raíces de la ecuación analizada son reales e iguales $x_1 = x_2$ y su magnitud puede determinarse mediante la expresión $-b/2a$.

c) $\Delta < 0$. En este caso la solución de la ecuación general de segundo grado son dos raíces complejas conjugadas y su valor viene dado por:

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\left|b^2 4ac\right|}}{2a} i \qquad x_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\left|b^2 4ac\right|}}{2a} i$$

VII.5.2. Anexo E2. Solución de la Ecuación General de Tercer Grado

La ecuación general de tercer grado dada por la expresión $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Si se divide la ecuación anterior por la magnitud a se obtiene $x^3 + rx^2 + sx + t = 0$, donde los parámetros de la ecuación transformada tienen el siguiente significado: r= b/a; s= c/a y t=d/a.

Si se efectúa la transformación x = y − r/3 en la ecuación anterior se obtiene la siguiente ecuación equivalente trasformada $\left(y - \frac{r}{3}\right)^3 + r\left(y - \frac{r}{3}\right)^2 + s\left(y - \frac{r}{3}\right) + t = 0$.

Desarrollando de manera independiente cada uno de los términos que constituyen la expresión anterior se obtiene los resultados siguientes:

$$\left(y - \frac{r}{3}\right)^3 = y^3 - 3y^2\left(\frac{r}{3}\right) + 3y\left(\frac{r}{3}\right)^2 - \left(\frac{r}{3}\right)^3 = y^3 - ry^2 + \frac{yr^2}{3} - \frac{r^3}{27}$$

$$r\left(y - \frac{r}{3}\right)^2 = ry^2 - 2ry\left(\frac{r}{3}\right) + r\left(\frac{r}{3}\right)^2 = ry^2 - 2r^2\frac{y}{3} + \frac{r^3}{9}$$

$$s\left(y - \frac{r}{3}\right) = sy - \left(\frac{sr}{3}\right)$$

Sustituyendo los resultados de las tres expresiones en la expresión transformada se obtiene la siguiente ecuación: $y^3 - y\left(s - \frac{r^2}{3}\right) + t - \frac{2r^3}{27} - \frac{sr}{3} = 0$**, que de forma compacta puede representarse mediante** $y^3 + px + q = 0$ **conocida como ecuación reducida, donde los términos p y q tiene el significado siguiente:**

$p = s - r^2/3$.

$q = t - 2r^3/27 + rs/3$.

En términos de los coeficientes a, b, c y d de la ecuación original, las expresiones anteriores se corresponden con:

$p = c/a - b^2/(3a^2)$

$q = d/a - 2b^3/(27a^3) + bc/(3a^2)$

Utilizando las fórmulas de Vieta y realizando operaciones de transformación algebraicas [6] se obtiene que las raíces del polinomio tercer grado vienen dadas por las siguientes expresiones $x_1 = \alpha + \beta$; $x_2 = \alpha\varepsilon + \beta\varepsilon^2$ y $x_3 = \alpha\varepsilon^2 + \beta\varepsilon$; donde:

$$\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\varepsilon^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\,.$$

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$\beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Si se define $D = (q^2/4 + p^3/27)$, se tiene entonces que:

- Si $D < 0 \Rightarrow$ una raíz real $y = \alpha + \beta$.
- Si $D = 0 \Rightarrow$ tres raíces reales, de ellas dos iguales: $y_1 = 2\alpha$; $y_2 = y_3 = -\alpha$
- Si $D > 0 \Rightarrow$ las tres raíces son reales y diferentes entre sí. En este caso es necesario extraer la raíz cuadrada de un Número Complejo, pues la magnitud bajo el radical cuadrático que forma parte de la determinación de α y de β es menor que cero. En este caso

[6] Para los detalles consultar las páginas 241-42 del Curso de Álgebra Superior, A.G. Kurosch, Editorial MIR, Moscú 1968.

$$Z_k = \sqrt[n]{P(r;\theta)} = \sqrt[n]{r}\sqrt[n]{\cos(\theta) + isen(\theta)} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

donde k toma los valores 0,1,2,...,n-1.

Trabajo enviado por:

M. Ec. Lic. Jesús Mesa Oramas, Especialista de Normas y Procedimientos, Sociedad HAVANATUR S.A., Corporación CIMEX.
e-mail: jmesa@cimex.com.cu