PLANEACIÓN Y CONTROL DE PROYECTOS CON PERT

Aportado por: Julio Cesar Silva Cruz
jcesars82@hotmail.com

1. Antecedentes.
Dos son los orígenes del método del camino crítico: el método PERT (Program Evaluation and Review Technique) desarrollo por la Armada de los Estados Unidos de América, en 1957, para controlar los tiempos de ejecución de las diversas actividades integrantes de los proyectos espaciales, por la necesidad de terminar cada una de ellas dentro de los intervalos de tiempo disponibles. Fue utilizado originalmente por el control de tiempos del proyecto Polaris y actualmente se utiliza en todo el programa espacial.
El método CPM (Crítical Path Method), el segundo origen del método actual, fue desarrollado también en 1957 en los Estados Unidos de América, por un centro de investigación de operaciones para la firma Dupont y Remington Rand, buscando el control y la optimización de los costos de operación mediante la planeación adecuada de las actividades componentes del proyecto.
Ambos métodos aportaron los elementos administrativos necesarios para formar el método del camino crítico actual, utilizando
el control de los tiempos de ejecución y los costos de operación, para buscar que el proyecto total sea ejecutado en el menor tiempo y al menor costo posible.

2. Usos

El campo de acción de este método es muy amplio, dada su gran flexibilidad y adaptabilidad a cualquier proyecto grande o pequeño. Para obtener los mejores resultados debe aplicarse a los proyectos que posean las siguientes características:

a. Que el proyecto sea único, no repetitivo, en algunas partes o en su totalidad.
b. Que se deba ejecutar todo el proyecto o parte de el, en un tiempo mínimo, sin variaciones, es decir, en tiempo crítico.
c. Que se desee el costo de operación más bajo posible dentro de un tiempo disponible.

Dentro del ámbito aplicación, el método se ha estado usando para la planeación y control de diversas actividades, tales como construcción de presas, apertura de caminos, pavimentación, construcción de casas y edificios, reparación de barcos, investigación de mercados, movimientos de colonización, estudios económicos regionales, auditorias, planeación de carreras universitarias, distribución de tiempos de salas de operaciones, ampliaciones de fábrica, planeación de itinerarios para cobranzas, planes de venta, censos de población, etc.
3. Planeación y control de proyectos con PERT-CPM
La buna administración de proyectos a gran escala requiere planeación, programación y coordinación cuidadosa de muchas actividades interrelacionadas. Al principiar la década de 1950 se desarrollaron procedimientos formales basados en uso de redes y de las técnicas de redes para ayudar en estas tareas. Entre los procedimientos mas sobresalientes se encuentran el PERT (técnica de evaluación y revisión de programas) y el CPM (método de la ruta critica).Aunque originalmente los sistemas tipo PERT se aplicaron para evaluar la programación de un proyecto de investigación y desarrollo, también se usan para controlar el avance de otros tipos de proyecto especiales. Como ejemplos se pueden citar programas de construcción, la programación de computadoras, la preparación de propuestas y presupuestos, la planeación de l mantenimiento y la instalación de sistemas de computo, este tipo de técnica se ha venido aplicando aun a la

producción de películas, a las compañas políticas y a operaciones quirúrgicas complejas.
El objetivo de los sistemas tipo PERT consiste en ayudar en la planeación y el control, por lo que no implica mucha optimización directa. Algunas veces el objetivo primario es determinar la probabilidad de cumplir con fechas de entrega especificas. También identifica aquellas actividades que son más probables que se conviertan en cuellos de botella y señala, por e4nde, en que puntos debe hacerse el mayor esfuerzo para no tener retrasos. Un tercer objetivo es evaluar el efecto de los cambios del programa. Por ejemplo, se puede valorar el efecto de un posible cambio en la asignación de recursos de las actividades menos criticas a aquellas que se identificaron con cuellos de botella. Otra aplicación importante es la evaluación del efecto de desviarse de lo programado.
Todos los sistemas tipo PERT emplean una red de proyecto para visualizar gráficamente la interrelación entre sus elementos. Esta representación del plan de un proyecto muestra todas las relaciones de procedencia, respecto al orden en que se deben realizar las actividades. En la Fig. 1 sé muestran estas características para la red de proyecto inicial para la construcción de una casa. Esta red indica que la excavación debe hacerse antes de poner los cimientos y después los cimientos deben completarse antes de colocar las paredes. Una vez que se levantan las paredes se pueden realizar tres actividades en paralelo. Al seguirla red hacia delante se ve el orden de las tareas subsecuentes.
En la terminología de PERT, cada arco de la red representa una actividad, es decir, una de las tareas que requiere el proyecto, cada nodo representa un evento que por lo general se define con el momento ñeque se terminan todas las actividades que llegan a ese nodo, Las puntas de flecha indican la secuencia en la que3 debe ocurrir cada uno de esos eventos. Lo que es mas, un evento debe preceder a la iniciación de las actividades que llegan a ese nodo. Las puntas de flecha indican la secuencia en la que debe ocurrir cada uno de esos eventos. Lo que es mas, un evento debe preceder a la iniciación de las actividades que salen de ese nodo. (En la realidad, con frecuencia se pueden traslapar etapas sucesivas de un proyecto, por lo que la red puede representar una aproximación idealizada del plan de un proyecto.)
El nodo hacia el que todas las actividades se dirigen es el evento que corresponde a la terminación desde su concepción, o bien, si el proyecto ya comenzó, el plan para su terminación. En él ultimo caso, cada nodo de la red sin arcos que llegan representa el evento de continuar una actividad en marcha o el evento de iniciar una nueva actividad que puede comenzar en cualquier momento.
Cada arco juega un doble papel, el de representar una actividad y el de ayudar a representar las relaciones de procedencia entre las distintas actividades. En ocasiones, se necesita un arco para definir las relaciones de procedencia aun cuando no haya una actividad real que representar. En este caso, se introduce una actividad ficticia que requiere un tiempo cero, en donde el arco que representa esta actividad ficticia se muestra como una flecha punteada que indica esa relación de procedencia. Por ejemplo, considérese el arco $5 \rightarrow 8$ que representa una actividad ficticia en la Fig. 1; el único objeto de este arco es indicar que la colocación de la tubería debe estar terminada antes de poder comenzar los exteriores.
Una regla común para construir este tipo de redes es que dos nodos no pueden estar conectados directamente por mas de un arco. Las actividades ficticias también se pueden usar para evitar violar esta regla cuando se tienen dos o más actividades concurrentes; en la Fig. 1 se ilustra esto con el arco $11 \rightarrow 12$. El único propósito de este arco es indicar que debe terminarse la colocación de pisos antes de instalar los acabados interiores sin tener dos arcos del nodo 9 al nodo 12.
Una vez desarrollada la red la red de un proyecto, el siguiente paso es estimar el tiempo que se requiere para cada actividad. Estas estimaciones para el ejemplo de la construcción de una casa de la figura 1. se muestran en la figura 2 con los números mas oscuros (en unidades de días de trabajo) que aparecen junto a los arcos. Estos tiempos se usan para calcular dos cantidades básicas para cada evento, a saber, su tiempo más próximo y su tiempo más lejano.
El tiempo más próximo para un evento es el tiempo (estimado) en el que ocurrirá el evento si las actividades que lo proceden comienzan lo mas pronto posible.
Los tiempos más próximos se obtienen al efectuar una pasada hacia delante a través de la red, comenzando con los eventos iniciales y trabajando hacia delante en el tiempo, hasta los eventos

finales, para cada evento se hace un calculo del tiempo en el que ocurrirá cada uno, si cada evento procedente inmediato ocurre en su tiempo más próximo y cada actividad que interviene consume exactamente su tiempo estimado. La iniciación del proyecto se debe etiquetar con el tiempo 0. este proceso se muestra en la tabla 1. para el ejemplo considerado en las figuras 1 y 2. los tiempos más próximos que se obtuvieron están registrados en la figura 2, con el primero de los dos números que se dan para cada nodo.
El tiempo más lejano para un evento es él ultimo momento (estimado) en el que puede ocurrir sin retrasar la terminación del proyecto mas allá de su tiempo más próximo.
Tabla 1. Calculo de los tiempos más próximos para el ejemplo de la construcción de una casa.

Evento	Evento inmediato Anterior	Tiempo Tiempo mas + de la próximo actividad	Tiempo = máximo más próximo
1	___	___	0
2	1	0 + 2	2
3	2	2 + 4	6
4	3	6 + 10	16
5	4	16 + 4	20
6	4	16 + 6	22
7	4	16+7	25
	5	20+5	
8	5	20+0	29
	6	22+7	
9	7	25+8	33
10	8	29+9	38
11	9	33+4	37
12	9	33+5	38
	11	37+0	
13	10	38+2	44

En este caso los tiempos más lejanos se obtienen sucesivamente para los eventos al efectuar una pasada hacia atrás a través de la red, comenzando con los eventos finales y trabajando hacia atrás en el tiempo hasta los iniciales. Para cada evento él calculo del tiempo final en el que puede ocurrir un evento de manera que los que le siguen ocurran en su tempo mas lejano, si cada actividad involucrada consume exactamente su tiempo estimado. Este proceso se ilustra en la tabla 2, en donde 44 días es el tiempo más próximo y el tiempo más lejano para la terminación del proyecto de construcción de la casa. Los tiempos más lejanos para la terminación del proyecto de construcción de la casa. Los tiempos mas lejanos que se obtuvieron se encuentran también en la figura 2 como el segundo numero que se da para cada nodo.

Sea la actividad (i , j) la actividad que va del evento i al evento j en la red del proyecto.
La holgura para un evento es la diferencia entre su tiempo más lejano y su tiempo más próximo.
La holgura para una actividad (i , j) e3s la diferencia entre [el tiempo mas lejano del evento] y [el tiempo mas próximo del evento i mas el tiempo estimado para la actividad].
Así, si se supone que todo lo demás marcha a tiempo, la holgura para un evento indica cuanto retraso se puede tolerar para llegar a ese evento sin retrasar la terminación del proyecto, y la holgura para una actividad indica lo mismo respecto a un retraso en la terminación de esa actividad. En a tabla 3 se ilustran los calculo de estas holguras para el proyecto de la construcción de una casa.
Una ruta critica de un proyecto es una ruta cuyas actividades tienen la holgura cero. (Todas las actividades y eventos que tienen holgura cero deben estar sobre una ruta crítica, pero no otras.)
Tabla 2. Calculo de los tiempos más lejanos para el ejemplo de la construcción de una casa

Evento	Evento inmediato Anterior	Tiempo Tiempo mas - de la lejano actividad	Tiempo = mínimo más próximo
13	__	___	44
12	13	44-6	38
11	12	38-0	38
10	13	44-2	42
9	12	38-5	33
	11	38-4	
8	10	42-9	33
7	9	33-8	25
6	8	33-7	26
5	8	33-0	20
	7	25-5	
4	7	25-7	16
	6	26-6	
	5	20-4	
3	4	16-10	6
2	3	6-4	2
1	2	2-2	0

Tabla 3. Calculo de las holguras para el ejemplo de la construcción de una casa.

Evento		Holgura		Actividad		Holgura
1		0 – 0 = 0		(1,2)		2 - (0+2) = 0

2		2 - 2 = 0		(2,3)		6 - (2+4) = 0
3		6 – 6 = 0		(3,4)		16 - (6+10) = 0
4		16 - 16 = 0		(4,5)		20 - (16+4) = 0
5		20 – 20 = 0		(4,6)		26 - (16+6) = 4
6		26 - 22 = 4		(4,7)		25 - (16+7) = 2
7		25 – 25 = 0		(5,7)		25 - (20+5) = 0
8		33 - 29 = 4		(6,8)		33 - (22+7) = 4
9		33 – 33 = 0		(7,9)		33 - (25+8) = 0
10		42 - 38 = 4		(8,10)		42 - (29+9) = 4
11		38 – 37 = 1		(9,11)		38 - (33+4) = 1
12		38 - 38 = 0		(9,12)		38 - (33+5) = 0
13		44 – 44 = 0		(10,13)		44 - (38+2) = 4
				(12,13)		44 - (38+6) = 0

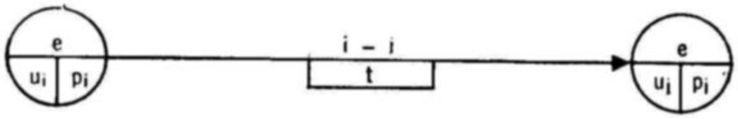
Si se verifica en la tabla 3 las actividades que tienen holgura cero, se observa que el ejemplo de la construcción de una casa tiene una ruta critica, 1 → 2 → 3 → 4 → 5 → 6 → 7 → 9 → 12 → 13, como se muestra en la figura 2 con las flechas mas oscuras. Esta secuencia de actividades criticas debe mantenerse estrictamente a tiempo, si se quiere evitar retrasos en la terminación del proyecto. Otros proyectos pueden tener mas de una ruta critica; por ejemplo nótese lo que pasaría en la figura 2 si el tiempo estimado de la actividad (4,6) se cambiara de 6 a 19.

Resulta interesante observar en la tabla 3 que mientras que todos los eventos sobre la ruta critica (inclusive el 4 y el 7) necesariamente tienen holgura cero, no es así para la actividad (4 , 7), ya que su tiempo estimado es menor que la suma de los tiempos estimados para las actividades (4 , 5) y (5 , 7). En consecuencia, estas ultimas actividades están en la ruta crítica, pero la actividad (4 , 7) no lo está.

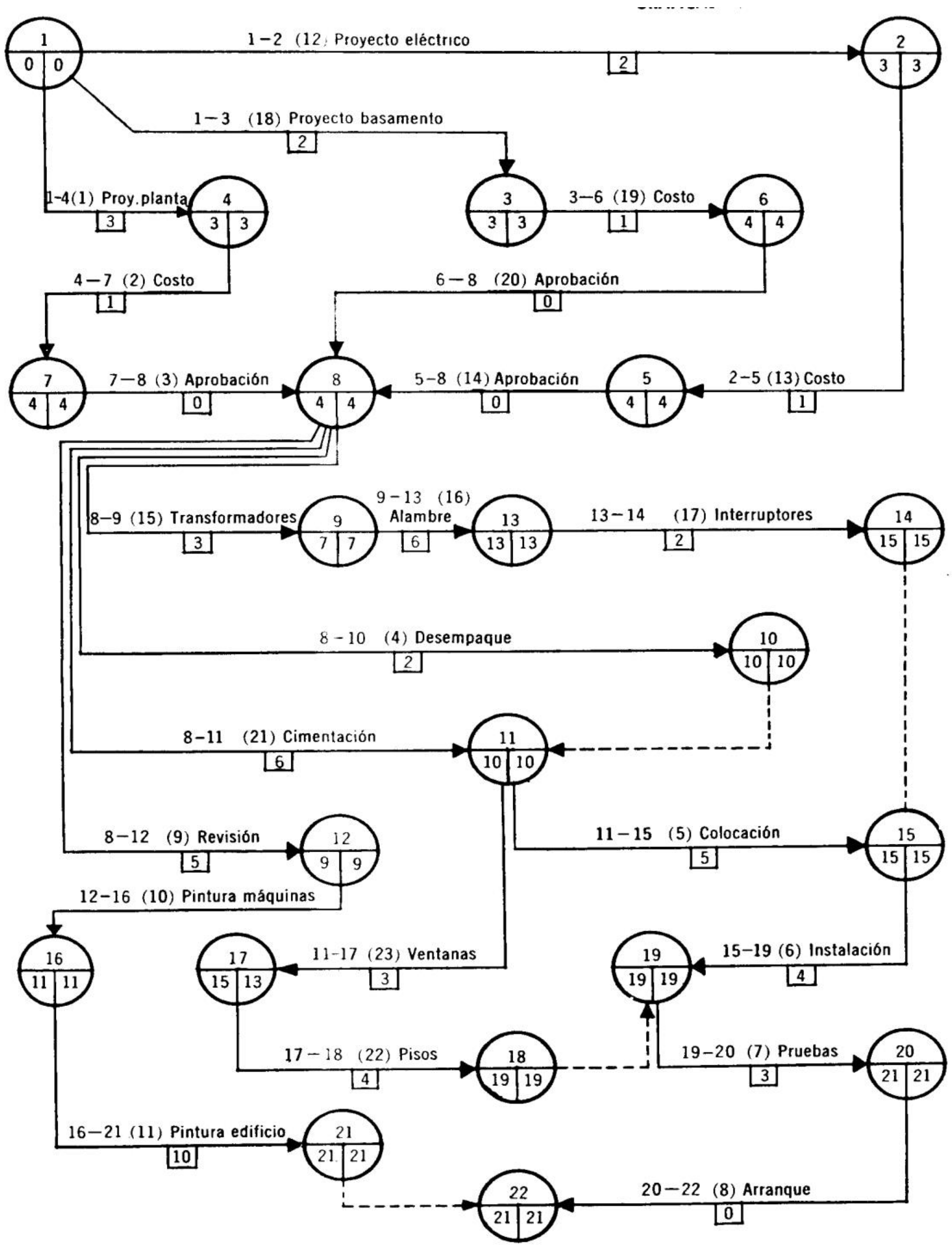
Esta información sobre los tiempos más cercanas y más lejanos, las holguras y la ruta crítica, es invaluable para el administrador del proyecto. Entre otras cosas, le permite investigar el efecto de posible mejoras en la planeación para determinar en donde debe hacerse un esfuerzo especial para mantenerse y evaluar el impacto de los retrasos.

Graficas PERT

La gráfica PERT es una gráfica original de redes no medidas que contiene los datos de las actividades representadas por flechas que parten de un evento i y terminan en un evento j.



En la parte superior de la flecha se indica el número de identificación, generalmente los números de los eventos (i-j). En la parte inferior aparece dentro de un rectángulo la duración estándar (t) de la actividad. En la mitad superior del evento se anota el número progresivo, en el cuarto inferior izquierdo la última lectura del proyecto y en el cuarto inferior derecho la primera lectura del proyecto.
Esta gráfica tiene como ventaja la de informar las fechas más tempranas **y** más tardías de iniciación y terminación de cada actividad, sin tener que recurrir a la matriz de holguras.



Veamos cómo se presenta la ampliación de la fábrica por medio de una gráfica PERT.

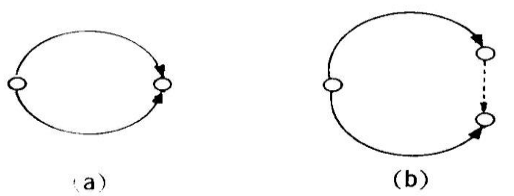
4. Red de Actividades

Se llama red la representación gráfica de las actividades que muestran sus eventos, secuencias, interrelaciones y el camino critico. No solamente se llama camino critico al método sino también a la serie de actividades contadas desde la iniciación del proyecto hasta su terminación, que no tienen flexibilidad en su tiempo de ejecución, por lo que cualquier retraso que sufriera alguna de las actividades de la serie provocaría un retraso en todo el proyecto.

Desde otro punto de vista, camino critico es la serie de actividades que indica la duración total del

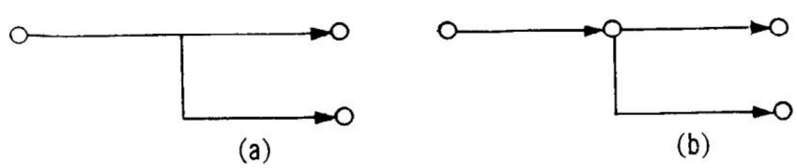
proyecto. Cada una de las actividades se representa por una flecha que empieza en un evento y termina en otro.
Se llama evento al momento de iniciación o terminación de una actividad. Se determina en un tiempo variable entre el más temprano y el más tardío posible, de iniciación o de terminación.
A los eventos se les conoce también con los nombres de nodos.
Evento Evento

I j
El evento inicial se llama i y el evento final se denomina j. El evento final de una actividad será el evento inicial de la actividad siguiente.
Las flechas no son vectores, escalares ni representan medida alguna. No interesa la forma de las flechas, ya que se dibujarán dé acuerdo con las necesidades y comodidad de presentación de la red. Pueden ser horizontales, verticales, ascendentes, descendentes curvas, rectas, quebradas, etc.
En los casos en que haya necesidad de indicar que una actividad tiene una interrelación o continuación con otra se dibujará entre ambas una línea punteada, llamada liga, que tiene una duración de cero.
La liga puede representar en algunas ocasiones un tiempo de espera para poder iniciar la actividad siguiente
Varias actividades pueden terminar en un evento o partir de un mismo evento.



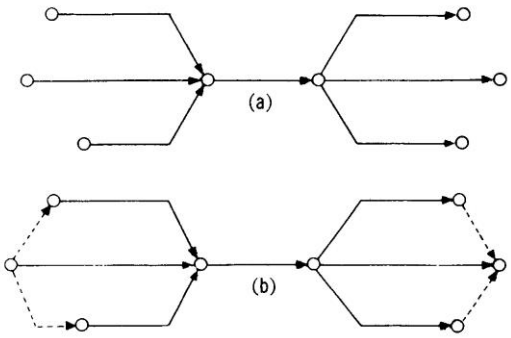
(a) Incorrecto, (b) Correcto**.**
Al construir la red, debe evitarse lo siguiente:

1. Dos actividades que parten de un mismo evento y llegan a un mismo evento. Esto produce confusión de tiempo y de continuidad. Debe abrirse el evento inicial o el evento final en dos eventos y unirlos con una liga.



2. Partir una actividad de una parte intermedia de otra actividad. Toda actividad debe empezar invariablemente en un evento y terminar en otro. Cuando se presenta este caso, a la actividad base o inicial se le divide en eventos basándose en porcentajes y se derivan de ellos las actividades secundadas.

   (a) Incorrecto; (b) Correcto.



3. Dejar eventos sueltos al terminar la red. Todos ellos deben relacionarse con el evento inicial o con el evento final.

(a) Incorrecto; (b) Correcto

5. Enfoque de tres estimaciones de PERT.

Hasta ahora se ha supuesto implícitamente que se puede obtener estimaciones con una exactitud razonable del tiempo requerido para cada actividad del proyecto. En la realidad, con frecuencia existe bastante incertidumbre sobré cuales serán estos tiempo; de hecho se trata de una variable aleatoria que tiene cierta distribución de probabilidad. La versión original de PERT toma en cuenta esta incertidumbre usando tres tipos diferentes de estimaciones par los tiempos de las actividades, con el fin de obtener información basica sobre su distribución de probabilidad. Esta información para todos los tiempos de las actividades se utiliza para estimas la probabilidad de terminar el proyecto en la fecha programada.

Las tres estimaciones empleadas por PERT para cada actividad son una estimación más probable, una estimación optimista y una estimación pesimista. La estimación mas probable (denotada por m) intenta ser la estimación mas realista del tiempo que puede consumir una actividad. En términos estadísticos, es una estimación de la moda (el punto mas alto) de la distribución de probabilidad para el tiempo de la actividad. La estimación optimista (denotada por a) procura ser el tiempo poco probable pero posible si todo sale bien; es en esencia una estimación de la cota inferior de la distribución de la probabilidad. Por ultimo, se intenta que la estimación pesimista (denotada por b) sea el tiempo poco probable pero posible si todo sale mal. En términos estadísticos, se trata en esencia de una estimación de la cota superior de la distribución de probabilidad. En la figura 3 se muestra la localización ideal de estas tres estimaciones con respecto a la distribución de probabilidad.

Tiempo transcurrido

Figura 3. Modelo de distribución de probabilidad para loas tiempos de las actividades en el enfoque de tres estimaciones de PERT: m = estimación probable, a = estimación optimista y b = estimación pesimista.

Se hacen dos suposiciones para convertir m, a y b en estimaciones del valor esperado (t_e) y la variancia (σ^2) del tiempo que requiere la actividad. Una suposición es que σ , la desviación estándar (raíz cuadrada de la variancia), es igual a un sexto del intervalo de los requerimientos de tiempo razonablemente posibles; esto es,

$$\sigma^2 = [\frac{1}{6}(b-a)]^2$$

es la estimación deseada de la variancia. El razonamiento para hacer esta suposición es que se considera que las colas de muchas distribuciones de probabilidad (como en la distribución normal) están mas o menos a tres desviaciones estándar de la media, de manera que existe una dispersión de alrededor de seis desviaciones estándar entre las colas, por ejemplo, las cartas de control que

se usan normalmente para el control estadístico de la calidad están construidas de manera que la dispersión entre los limites de control se estima en seis desviaciones estándar.
Para obtener la estimación del valor esperado (t_e), también es necesaria una suposición sobre la forma de la distribución de probabilidad, se supone que la distribución es (al menos aproximadamente) una distribución beta. Este tipo de distribución tiene la forma que se muestra en la figura 3, que es razonable para este propósito.
Si se usa el modelo ilustrado en la figura 3 el valor esperado del tiempo de una actividad es aproximadamente $t_e = \frac{1}{3}[2m + \frac{1}{2}(a + b)]$.
Nótese que el medio del intervalo (a + b)/ 2 se encuentra entre a y b de manera que t_e es la media aritmética ponderada de la moda y la mitad del intervalo, con un peso de dos tercios para la moda. Aunque la suposición de una distribución beta es arbitraria, sirve para el propósito de localizar el valor esperado a m, a y b de una manera que parece ser razonable.
Después de calcular el valor esperado y la variancia estimados para cada una de las actividades, se necesitan tres suposiciones adicionales (o aproximaciones) para poder calcular la probabilidad de terminar el proyecto a tiempo. Una es que los tiempos de las actividades son estadísticamente independientes. Una segunda es que la ruta critica (en términos de los tiempos esperado) siempre requiere un tiempo total mayor que cualquier otra ruta. Esto implica que el valor esperado y la variancia, es sencillo encontrar la probabilidad de que esta variable aleatoria normal (tiempo del proyecto) sea menor que el tiempo de terminación programado.

6. Método CPM para trueques entre tiempo y costo

Las versiones originales de CPM y PERT difieren en dos aspectos importantes. Primero, el CPM supone que los tiempos de las actividades son deterministicos (es decir, se pueden predecir de manera confiable sin incertidumbre significativa), por lo que no necesita las tres estimaciones que se acaban de describir. Segundo, en lugar de dar una importancia primordial al tiempo (explícitamente), el CPM asigna la misma importancia al tiempo y al costo y pon esto de relieve al construir un a curva de tiempo-costo para cada actividad, con la que se muestra en la figura 4. Esta curva representa la relación entre el costo directo presupuestado para la actividad y su tiempo de duración resultante.
Figura 4. Curva tiempo-costo para la actividad (i,j).
Por lo general la grafica se basa en dos puntos: el normal y el intensivo o de quiebre. El punto normal da el costo y el tiempo necesario cuando la actividad se realiza en la forma normal, sin incurrir en costos adicionales (horas extras de mano de obra, equipo o materiales especiales para ahorrar tiempo, etc.), Para acelerar la actividad. Por el contrario, el punto de quiebre proporciona el tiempo y el costo necesario cuando se realiza la actividad en forma intensiva o de quiebre, esto es se acelera completamente sin reparar en costos, con el fin de reducir su tiempo de duración lo mas que se pueda. Como una aproximación, se supone entonces que todos los trueques intermedios entre tiempo y costos son posibles y que se encuentran sobre el segmento de línea que une a estos dos puntos. (Obsérvese en el segmento de línea oscuro en la Fig. 4). Así, las únicas estimaciones que tienen que obtener el personal del proyecto son el costo y el tiempo para estos dos puntos.
El objetivo fundamental del CPM es determinar el trueque entre tiempo y costo que debe emplearse en cada actividad para cumplir con el tiempo de terminación del proyecto que se programo a un costo mínimo. Una forma de determinar la
combinación optima del tiempo y costo es aplicar programación lineal. para descubrir esto, es necesario introducir notación nueva, parte de la cual se resume en la figura 4. Sea
D_{ij} = tiempo normal para la actividad (i , j)
CD_{ij} = costo (directo) normal para la actividad (i , j)
d_{ij} = tiempo de quiebre para la actividad (i , j)
Cd_{ij} = costo (directo) de quiebre para la actividad (i , j)
Las variables de decisión para el problema son x_{ij} donde
x_{ij} = tiempo de duración de la actividad (i , j)

Entonces existe una varible de decisión x_{ij} para cada actividad, pero no lo hay par alos valores de i y j que no tienen una actividad correspondiente.
Para expresar el costo directo de la actividad (i, j) como una función (lineal) de X_{jj} denótese la pendiente de la línea que pasa por los puntos normal y de quiebre para la actividad (i , j) por

$$S_{ij} = \frac{C_{Dij} - C_{dij}}{D_{ij} - d_{ij}}.$$

tambien definase K_{ij} como la intersección con el eje del costo directo de esta linea, com se muestra en la fig. 4, por tanto,
costo directo de la actividad (i , j) = $K_{ij} + S_{ij}\, x_{ij}$,
en consecuencia,
costo directo total del proyecto = $\sum_{(i,j)} (K_{ij} + S_{ij}\, x_{ij})$,
en donde la sumatoria se extiende sobre todas las actividades (i , j). Ahora se puede establecer y formular matemáticamente el problema.
El problema: dado un tiempo T (máximo) de terminación del proyecto, selecciónese la x_{jj} que minimice el costo directo total del proyecto.
Formulación De Programación Lineal. Para tomar en cuenta el tiempo de terminación del proyecto en la formulación de programación lineal del problema, se necesita una variable más para cada evento. Esta variable adicional es
yk = tiempo más próximo (desconocido) para el evento k, el cual es una función determinística de X_{ij}.
Cada yk es una variable auxiliar, es decir, una variable que se introduce al modelo por ser conveniente en la formulación y que no representa una decisión. El método simplex trata a las variables auxiliares igual que a las variables de decisión (x_{ij}) normales.
Para ver cómo se introducen las yk a la formulación, considérese el evento 7 de la figura 1 Por definición, su tiempo más próximo es:
$y_7 = \text{máx}\ \{y_4 + x_{47}, y_5 + x_{57}\}$,
En otras palabras y_7 es la cantidad más pequeña tal que las dos restricciones siguientes se cumplen:
$y_4 + x_{47} < y_7$
$y_5 + x_{45} < y_7$,
por lo que estas dos restricciones se pueden incorporar directamente a la formulación de programación lineal (después de pasar y_7 al lado izquierdo para obtener la forma apropiada). Aún más, adelante se verá por qué la solución óptima que se obtiene con el método simples para el modelo completo hará de manera automática que el valor de y_7 sea la cantidad más pequeña que ,satisface estas restricciones, por lo que no se necesitan más restricciones para incorporar la definición de y_7 al modelo.
Dentro del proceso e incorporación de estas restricciones para todos los eventos, se tiene que cada variable x_{ij} aparecerá en exactamente una restricción de este tipo,

$$y_i + x_{ij} \leq y_j,$$

que se puede expresar en la forma apropiada como

$$y_i + x_{ij} - y_i \leq 0$$

Para continuar con los preparativos para escribir el modelo completo de programación lineal, se etiquetan
Evento 1 = inicio del proyecto
Evento n = terminación del proyecto,
con lo que

y_i =0

y_n = tiempo de terminación. .

Nótese también que $\sum K_{ij}$ es una constante fija que puede eliminarse de la función objetivo, de manera que minimizar el costo directo total para el proyecto es equivalente a maximizar $\sum(-S_{ij})\,x_{ij}$ Por tanto, el problema de programación lineal es encontrar las x_{ij} (y las y_k correspondientes) tales que

Maximizar $$Z = \sum_{i,j}(-S_{ij})x_{ij},$$

Sujeta a:

$x_{ij} \geq d_{ij}$

$x_{ij} \leq D_{ij}$ Para todas las actividades (i , j)

$y_i + x_{ij} - y_j \leq 0$

$y_n \leq T.$

Desde un punto de vista computacional, este modelo se puede mejorar algo al sustituir todas las x_{ij} por

$x_{ij} = d_{ij} + x_{ij}$

en todo el modelo, para que el primer conjunto de restricciones funcionales ($x_{ij} \geq d_{ij}$) se sustituya por las restricciones de no negatividad

$x_{ij} \geq 0.$

Es conveniente también introducir restricciones de no negatividad para el resto de las variables:

$y_k \geq 0,$

aunque estas variables ya estaban forzadas a ser no negativas al establecer $y_1 = 0$, debido a las restricciones $x_{ij} \geq 0$ y $y_i \geq y_i + d_{ij} + x_{ij}.$

Una propiedad interesante de una solución óptima para este modelo es que (en circunstancias normales) toda trayectoria de la red será una ruta crítica que requiere un tiempo T, La razón es que una solución de este tipo satisface las restricciones $y_n \leq T,$ mientras que evita los costos adicionales en que se incurre por acortar el tiempo de cualquier trayectoria.

La clave de esta formulación es la manera en que se introducen las y_k al modelo mediante las restricciones $y_i + x_{ij} - y_j \leq 0$, con el fin de proporcionar los tiempos más próximos para los respectivos eventos (dados los valores de las x_{ij} en la solución básica factible actual). Como los tiempos más próximos se tienen que obtener en orden, todas estas y_k son necesarias nada más para obtener finalmente el valor correcto de y_n (para los valores actuales de las x_{ij}), reforzando así la restricción $y \leq T$. Sin embargo, obtener el valor correcto requiere que el valor de cada y_j (incluso el de y_n) sea la cantidad más pequeña que satisface todas las restricciones $y_i + x_{ij} \leq y_j$.

Ahora se hará una descripción breve de por qué (en circunstancias normales) esta propiedad se cumple para una solución óptima.

Considérese una solución para las variables x_{ij} tal que toda trayectoria de la red es crítica y requiere un tiempo T. Si los valores de las y_k satisfacen la propiedad anterior, entonces las x_{ij} son los verdaderos tiempos más pr6ximos con $y_n = T$ exactamente y la solución completa para las x_{ij} y y_k satisface todas las restricciones. Sin embargo, si alguna y_i se hace un poco más grande, esto crearía una reacción en cadena en la que alguna y_j se tendría que hacer un poco más grande para satisfacer todavía las restricciones $y_i + x_{ij} \leq y_j$ etc., hasta que en última instancia, y_n deba hacerse un poco más grande y se viole la restricción $y_n \leq T$. La única manera de evitar esto con una y_i un poco más grande, es hacer que los tiempos de duración de algunas actividades (posteriores al evento i) sean un poco más pequeñas, aumentando con esto el costo. Por lo tanto, una solución óptima evitará que las y_k sean más grandes de lo necesario para satisfacer las restricciones $y_i + x_{ij} \leq y_j$.

El problema, como se estableció aquí, supone que se ha fijado una fecha de entrega específica T (tal vez por contrato) para la terminación del proyecto. En realidad, algunos proyectos no tienen una fecha de entrega, en cuyo caso no está claro el valor que debe asignarse a T en la formulación de programación lineal. En este tipo de situaciones, la decisión sobre T (que resulta ser la duración del proyecto en la solución óptima), de hecho depende de cuál es el mejor trueque entre el costo total y el tiempo total del proyecto.

La información básica que se necesita para tomar esta decisión es cómo cambia el costo directo total mínimo al cambiar el valor de T en la formulación anterior, como se muestra en la figura 5. Esta información se puede obtener cuando se usa progranlflci6n lineal parametrica para obtener la solución óptima como una funci6n de T en todo el intervalo. Existen procedimientos aún más eficientes, para obtener esta información, que explotan la estructura especial del problema.

La figura 5 proporciona una base útil para la toma de decisiones del administrador sobre el valor de T (y la solución óptima correspondiente para x_{ij}) cuando los efectos importantes de la duración del proyecto (distintos a los costos directos) son en esencia intangible. Ahora bien, cuando estos otros efectos que son básicamente financieros (costos indirectos), es apropiado combinar la curva del costo directo total de la figura 5 con una curva de costo indirecto total mínimo (supervisión, instalaciones, intereses, multas contractuales) contra t, como se muestra en la figura 6. La suma de estas curvas proporcionará la curva del costo total mínimo del proyecto para distintos valores de T. El valor óptimo de T será entonces aquél que minimice esta curva de costo total.

7. Elección entre PERT y CPM

La elección entre el enfoque de las tres estimaciones de PERTy el método de trueques entre el tiempo y el costo del CPM depende fundamentalmente del tipo de proyecto y de los objetivos gerenciales. El PERT es en particular apropiado cuando se maneja mucha incertidumbre al predecir los tiempos de las actividades y cuando es importante controlar de una manera efectiva la programación del proyecto; por ejemplo, la mayor parte de los proyectos de investigación y desarrollo caen dentro de esta categoría. Por otro lado, el CPM resulta muy apropiado cuando se pueden predecir bien los tiempos de las actividades
(quizá con base en la experiencia) y cuando estos tiempos se pueden ajustar con facilidad (por ejemplo, si se cambian tamaños de brigadas), al igual que cuando es importante planear una combinación apropiada entre el tiempo y el costo del proyecto. Este último tipo lo representan muchos proyectos de construcción y mantenimiento.

En la actualidad, las diferencias entre las versiones actuales de PERT y CPM no son tan marcadas como se han descrito. Muchas versiones de PERT permiten emplear una sola estimación (la más probable) para cada actividad y omiten así la investigación probabilística. Una versión llamada PERT/Costo considera también combinaciones de tiempo y costo en forma parecida al CPM.

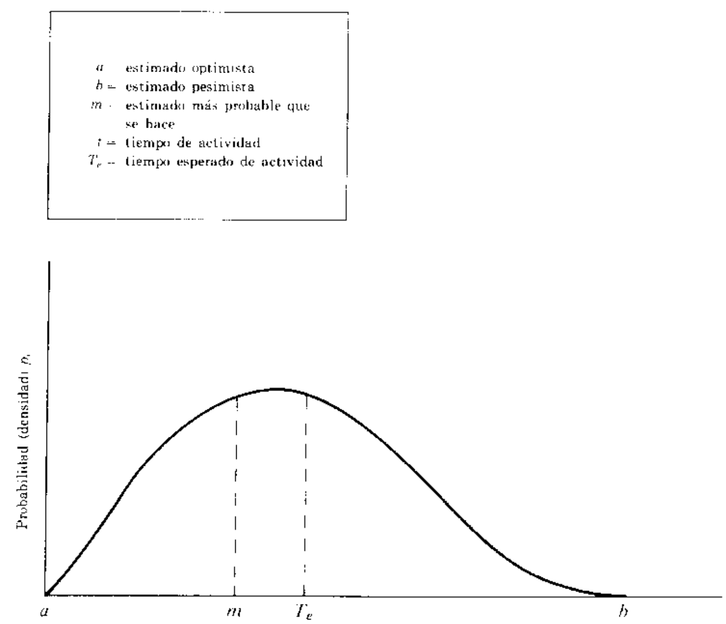
8. Diferencias Entre PERT y CPM

La diferencia entre PERT y CPM es la manera en que se realizan los estimados de tiempo. E1 PERT supone que el tiempo para realizar cada una de las actividades es una variable aleatoria descrita por una distribución de probabilidad. E1 CPM por otra parte, infiere que los tiempos de las actividades se conocen en forma determinísticas y se puede variar cambiando el nivel de recursos utilizados.

La distribución de tiempo que supone el PERT para una actividad es una distribución beta. La distribución para cualquier actividad se define por tres estimados:

1. el estimado de tiempo más probable, m;
2. el estimado de tiempo más optimista, a; y
3. el estimado de tiempo más pesimista, b.

La forma de la distribución se muestra en la siguiente Figura. E1 tiempo más probable es el tiempo requerido para completar la actividad bajo condiciones normales. Los tiempos optimistas y pesimistas proporcionan una medida de la incertidumbre inherente en la actividad, incluyendo desperfectos en el equipo, disponibilidad de mano de obra, retardo en los materiales y otros factores.



Con la distribución definida, la media (esperada) y la desviación estándar, respectivamente, del tiempo de la actividad para la actividad Z puede calcularse por medio de las fórmulas de aproximación.

$$T_e(Z) = \frac{a + 4m + b}{6}$$

$$\sigma(Z) = \frac{b - a}{6}$$

El tiempo esperado de finalización de un proyecto es la suma de todos los tiempos esperados de las actividades sobre la ruta crítica. De modo similar, suponiendo que las distribuciones de los tiempos de las actividades son independientes (realísticamente, una suposición fuertemente cuestionable), la varianza del proyecto es la suma de las varianzas de las actividades en la ruta

crítica. Estas propiedades se demostrarán posteriormente.
En CPM solamente se requiere un estimado de tiempo. Todos los cálculos se hacen con la suposición de que los tiempos de actividad se conocen. A medida que el proyecto avanza, estos estimados se utilizan para controlar y monitorear el progreso. Si ocurre algún retardo en el proyecto, se hacen esfuerzos por lograr que el proyecto quede de nuevo en programa cambiando la asignación de recursos.

9. Bibliografía

- Frederick S. Hillier, Gerald J. Lieberman; Introducción ala Investigación de Operaciones, Quinta edición, Edit. McGraw Hill, México 1993.
- http://www.gestiopolis.com