APUNTES DE MATEMÁTICAS FINANCIERAS. INTERÉS SIMPLE, INTERÉS COMPUESTO, ANUALIDADES Y AMORTIZACIONES

INTRODUCCIÓN

En el siguiente cuadernillo se desarrollan algunos temas de la unidad 1 (subtemas 1.1, 1.1.1 y 1.1.3), tales como: importancia de las matemáticas financieras, concepto y cálculo del tasa de interés simple así como del interés compuesto; de la unidad 2 (subtema 2.1) se incluye la definición y aplicación del descuento comercial; de la unidad 3 (subtemas 3.1, 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3, 3.2, 3.2.1 y 3.2.2) se atienden las anualidades simples en sus diferentes modalidades: vencidas, anticipadas y diferidas así como definición y elaboración de las tablas de amortización. El programa corresponde a la asignatura de Matemáticas Financieras (CPC-1032), que forma parte del tercer semestre de la carrera de Contaduría Pública.

quedan pendientes por ser temas que serán tratados con mayor amplitud en otro cuadernillo.

Los ejemplos incluidos han sido recopilados de diversos textos de Matemáticas Financieras; sin embargo, la mayor parte de ellos han sido modificados, en cuanto a su redacción, con la intención de hacerlos más fáciles de comprender e interpretar. Se espera en otro semestre desarrollar un cuadernillo de ejercicios que sirva para ejercitar los temas presentados.

Cabe señalar que en este cuadernillo, se desarrollan con mayor amplitud los subtemas de Interés simple e Interés compuesto así como los de anualidades, debido a que en ellos se establecen las bases para desarrollar un pensamiento matemático que permita comprender los subtemas siguientes.

Es importante aclarar que los temas relativos a Cetes y Mercado de valores, quedan pendientes por ser temas que serán tratados con mayor amplitud en otro cuadernillo.

1.1 IMPORTANCIA DE LAS MATEMÁTICAS FINANCIERAS EN EL PERFIL DEL CONTADOR PÚBLICO

COMPETENCIA A DESARROLLAR: En esta unidad, la competencia que logra desarrollar el estudiante es que conoce analiza y evalúa los fundamentos de las matemáticas financieras para la toma de decisiones. y el impacto que tiene el valor del dinero a través del tiempo y su equivalencia por medio de los diversos factores de capitalización

Las matemáticas financieras son un tipo de matemática aplicada que aspira a lograr el máximo beneficio como comprador y los más atractivos rendimientos como inversionista. Como comprador, máximo beneficio al conseguir dinero prestado, en efectivo, bienes o en servicios y a los que disponen de capital, para prestarlo, es decir, invertirlo si genera intereses y otros beneficios.

Además, al aplicar los métodos de valoración del dinero en el tiempo, se podrán interpretar los resultados para tomar decisiones efectivas que reditúen los máximos beneficios de los intereses y objetivos económicos y financieros de los entes económicos.

INTERÉS SIMPLE

Es la cantidad que se paga por el uso de dinero ajeno, o bien, el dinero que se gana por dejar nuestro dinero a disposición de terceras personas (bancos, préstamos personales) a través de depósitos en cuentas de ahorros o de préstamos. Además cabe señalar que en este tipo de interés únicamente el capital gana intereses por todo el tiempo que dura la transacción.

El interés es el importe pagado por hacer uso de dinero solicitado como préstamo, o bien, la cantidad que se obtiene por la inversión de algún capital.

Si designamos C a cierta cantidad de dinero en una fecha dada, a la que llamaremos momento cero, cuyo valor aumenta a S en una fecha posterior, entonces, tenemos que

$$\boldsymbol{I = Kit}$$

Donde

- ✓ K= Es el capital inicial que sirve de base para generar intereses, ya sea por un préstamo o por una inversión.
- ✓ I= Es el importe que se paga por el uso del dinero.
- ✓ t= Tiempo. Es el número de periodos (años, meses, días, etc.) que permanece prestado o invertido el capital.
- ✓ i= Tasa de interés. Es la razón del interés devengado respecto al capital inicial; es decir, es la cantidad que al multiplicarse por el capital inicial da como resultado el interés devengado en un periodo de tiempo determinado.

FÓRMULAS

$$\boldsymbol{I = Kit}$$

Si despejamos K, i y t tendremos las siguientes fórmulas:

$$\boldsymbol{K = \frac{I}{it}}$$

$$\boldsymbol{t = \frac{I}{Ki}}$$

$$\boldsymbol{i = \frac{I}{Kt}}$$

***NOTA**. Para aplicar las fórmulas anteriores, es preciso que los datos de la tasa de interés y el tiempo se refieran a la misma unidad de medida, es decir, si el interés es anual, el tiempo se expresará anualmente; si el tiempo se encuentra expresado mensualmente, habrá que obtener el interés por mes.*

$$\mathrm{i} = 12\%\ \boldsymbol{anual}$$

$$\mathrm{t} = 4\ \boldsymbol{meses}$$

Entonces para utilizarlos en las fórmulas quedará de la siguiente manera:

$$\mathrm{i} = .12\ \boldsymbol{anual}$$

$$\mathrm{t} = \frac{4}{12} = .33\ \boldsymbol{a}\text{ñ}\boldsymbol{os}$$

Tanto ***i*** como ***t*** quedan expresadas en la misma unidad de medida, es decir, en años.

INTERÉS SIMPLE EXACTO Y ORDINARIO

Con respecto a este punto, debemos señalar que el interés simple exacto, considera, para hacer sus cálculos, una base de tiempo de 365 para un año y de 30 y 31 días según lo marcado en el calendario para cada mes. Por su parte el interés simple ordinario, que es el más utilizado, considera una base de tiempo de 360 días para el año y de 30 días para los meses.

EJEMPLO. Determinar el interés simple exacto y ordinario sobre $2,000.00 al 5% durante 50 días.

TIEMPO EXACTO

Datos:

K= 2,000
i= 5% anual
t= 50 días
I= ?

Convertir los días a años:

$$\text{t} = \frac{50}{365}$$

$$\text{t} = .1369 \text{ años}$$

Resolución

$$I = Kit$$

$$I = 2{,}000(.05)(.1369)$$

$$I = \$13.69$$

TIEMPO ORDINARIO

Datos:

K= 2,000
i= 5% anual
t= 50 días
I= ?

Convertir los días a años:

$$\text{t} = \frac{50}{360}$$

$$\text{t} = .1388 \text{ años}$$

Resolución

$$I = Kit$$

$$I = 2{,}000(.05)(.1388)$$

$$I = \$13.88$$

CÁLCULO DEL TIEMPO

El tiempo se puede calcular de 2 maneras:

EJEMPLO: Determinar en forma exacta y aproximada el tiempo transcurrido del 20 de junio de 1970 y el 24 de agosto del mismo año.

Exacta: Consiste en calcular el tiempo sumando los días, de acuerdo con el calendario, que faltan para finalizar el mes que indica la fecha inicial, más los días de los meses intermedios y por último sumar los días transcurridos en el mes que indica la fecha final.

Días que faltan para que concluya junio (fecha inicial)	10
Días de julio (mes intermedio)	31
Días que han transcurrido del agosto (fecha final)	24
Total de días	**65 días**

Aproximada: En este caso, se realiza una resta de la fecha final menos la fecha inicial.

	Día	**Mes**	**año**
-	24	08	1970
	20	06	1970
	4	2	0

2 meses con 4 dias = **64 dias**

MONTO SIMPLE

El monto es el valor que adquiere una cantidad invertida, a lo largo de un tiempo y es denominado como valor futuro o monto.

$\boldsymbol{I = Kit}$ $\qquad S = K + (Kit)$ $\qquad$ Donde ***M*** = **monto**

$\boldsymbol{M = K + I}$ $\qquad \boldsymbol{M = K(1 + it)}$

EJEMPLO: Una persona deposita $15,000.00 en un fondo de inversiones que garantiza un rendimiento de 2.8% mensual. Si la persona retira su depósito 24 días después ¿Cuál será la cantidad que recibirá (monto)? ¿Cuál será el valor del interés?

Datos:

K= 15,000
i= 2.8 % mensual
t= 24 días
I= ?
M= ?

Convertir los días a años:

$$\mathrm{t} = \frac{24}{30}$$

$$\mathrm{t} = .8 \text{ años}$$

Resolución

$$I = Kit$$

$$I = 15{,}000(.028)(.8)$$

$$I = 15{,}000(.0224)$$

$$\mathrm{I} = 336.00$$

$$M = 15{,}000.00 + 336.00$$
$$M = 15{,}336.00$$

VALOR PRESENTE SIMPLE

Es la cantidad inicial con la que se realiza una inversión o préstamo, misma que representa la base sobre la cual se generan los intereses y es denotada por **C**.

$$\mathbf{K} = \frac{\boldsymbol{M}}{(\mathbf{1} + \boldsymbol{it})}$$

Donde ***K*** = **Capital o Valor presente**

EJEMPLO: ¿Qué capital inicial producirá un monto de $75,000.00 a la tasa de interés del 8.5% anual, durante 4 meses?

Datos:

K= ?
i= 8.5 % anual
t= 4 meses
M= 75,000.00

Convertir los días a años:

$$\mathrm{t} = \frac{4}{12}$$

$$\mathrm{t} = ..33 \text{ años}$$

Resolución

$$\mathrm{K} = \frac{M}{(\mathbf{1} + \boldsymbol{it})}$$

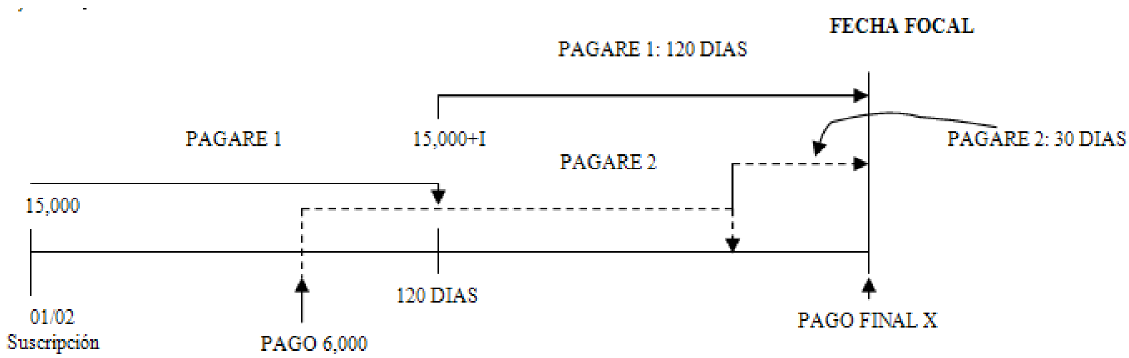
$$\mathrm{K} = \frac{75{,}000}{(\mathbf{1} + .\mathbf{085}\ (.\mathbf{33}))}$$

$$\mathrm{K} = \frac{75{,}000}{(\mathbf{1.028})}$$

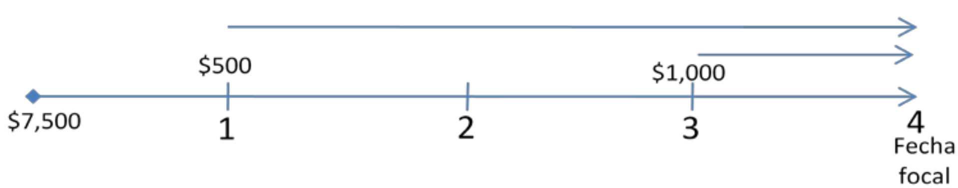
$$\mathrm{K} = 72{,}933.54$$

ECUACIONES DE VALOR A INTERÉS SIMPLE

Una Ecuación de valor es una igualdad entre dos o más conjuntos de obligaciones, valuadas todas en una misma fecha llamada Fecha Focal o fecha de valuación. También puede ser definida como el replanteamiento o renegociación de varias operaciones financieras, expresándolas en una operación única.



EJEMPLO: El Sr. Pérez firmó dos documentos: uno por $5,000.00 que se vence en un año y otro por $1,000.00 con vencimiento en 3 años. En un nuevo arreglo, acordó pagar $7500.00 ahora y el resto dentro de 4 años. Si se considera como fecha focal el año cuarto ¿Qué cantidad tendrá que pagar al final de dicho periodo, suponiendo un rendimiento del 5% anual?



$$\boldsymbol{M = K(1 + it)}$$

$$500\big(1 + .05(3)\big) + 1{,}000\big((1 + .05(1)\big) = \quad 750\big((1 + .05(4)\big) + x$$

$$500(1.15) + 1{,}000((1.05) = \quad 750((1.2) + x$$

$$575 + 1{,}050.00 = \quad 900 + x$$

$$1{,}625 - 900 = \quad x$$

$$\boldsymbol{725 = \quad x}$$

INTERÉS COMPUESTO

Se le llama interés compuesto al Interés que se convierte en capital en cada periodo de conversión (capitalización). En el interés compuesto los intereses que se van generando se agregan al capital en periodos de tiempo, previamente establecidos, esto significa que el capital no es constante a través del tiempo.

El interés simple tiene la propiedad de que el capital inicial permanece constante durante el plazo del préstamo. Sin embargo cuando un capital se invierte durante varios períodos y al final de cada periodo se agregan los intereses obtenidos del capital y se reinvierten, entonces lo que se observa es que se están calculando intereses sobre intereses, es en este caso que hablamos de interés compuesto.

Cada vez que se realiza una operación puede requerirse hacer cálculos para determinar el valor que se recibirá después de transcurrido un periodo de tiempo, para lo que se deberá sumar al capital inicial todos los intereses calculados al final de cada uno de los periodos contemplados en el lapso de tiempo indicado, a esto se le denomina ***MONTO COMPUESTO***.

EJEMPLO: Se deposita un capital de $1,000.00 a una tasa de interés del 3% anual, si no se retira el depósito y los intereses se reinvierten, cada año, durante 3 años. ¿Cuál será el monto compuesto al final de esos 3 años y qué cantidad representa los intereses?

Datos:	**Fórmulas**	**Resolución**		
k=1,000.00	$I = Kit$	$I = 1{,}000.00(.03)(1)$	$I = 1{,}030.00(.03)(1)$	$I = 1{,}060.92(.03)(1)$
i= 3% anual	$M = k + I$	$I = 1{,}000.00(.03)$	$I = 1{,}000.00(.03)$	$I = 1{,}060.92(.03)$
t=1 año		$I = 30$	$I = 30.90$	$I = 31.82$
M=?				
		$M = 1{,}000.00 + 30$	$M = 1{,}030.00 + 30$	$M = 1{,}060.92 + 31.82$
		$M = 1{,}030.00$	$M = 1{,}060.90$	$\boldsymbol{M = 1{,}092.72}$

***Nota**: El cálculo también puede realizarse, más breve, utilizando la fórmula **S=C(1+it)** que se verá más adelante.*

El interés compuesto se usa principalmente para los depósitos en los bancos y en las asociaciones de préstamos y ahorros. Estas empresas utilizan el dinero depositado para hacer préstamos a personas individuales o a negocios. Cuando se deposita el dinero en un banco, el depositante está prestando dinero al banco por un tiempo indefinido, a fin de ganar intereses.

CONCEPTOS BÁSICOS

Periodo de Capitalización o conversión. Es el intervalo de tiempo convenido, en la obligación, para capitalizar los intereses; dicho intervalo puede ser anual, semestral, trimestral, mensual, etc.

Frecuencia de Capitalización o Conversión. Número de veces que, en un año, el interés se suma al capital.

$$\boldsymbol{fc = \frac{12}{\#mc}}$$

Donde:
fc= frecuencia de conversión
#mc= número de meses que abarca el periodo de conversión

EJEMPLO: ¿Cuál es la frecuencia de conversión (***fc***) para un depósito bancario que paga el 5% de interés capitalizable trimestralmente?

Datos:

#mc=3

$$fc = \frac{12}{3} = 4$$

Tasa de interés por periodo

$$\boldsymbol{r = \frac{i}{fc}}$$

Donde:
i = tasa de interés anual
fc= frecuencia de conversión

EJEMPLO: ¿Cuál es la frecuencia de conversión y la tasa interés por periodo (***r***) al 60% anual capitalizable mensualmente, de una operación cualesquiera?

Datos:

i= 60%

$$fc = \frac{12}{1} = 12 \qquad r = \frac{.60}{12} = .05$$

***NOTAS**: Es muy importante que para la solución de problemas de interés compuesto, el interés anual sea convertido a la tasa que corresponda de acuerdo al periodo de capitalización que se establezca.*

Cada vez que se señala que la tasa de interés es capitalizable, se deberá convertir la tasa anual a tasa de interés por periodo, es decir, aplicar la fórmula de tasa de interés por periodo

Total de periodos: Número total de periodos que abarca la operación, es decir, la cantidad de veces que se capitalizarán los intereses durante todo el tiempo que dure la operación.

$$\boldsymbol{n} = (\boldsymbol{total\ de\ a}\text{ñ}\boldsymbol{os})(\boldsymbol{fc})$$

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{total\ meses}}{\#\boldsymbol{mc}}$$

Donde:

n= Total de periodos

EJEMPLO: Determina la tasa de interés por periodo (***r***) y el número de periodos de capitalización (***n***) para una inversión al 9% de interés compuesto anual, durante 10 años.

Datos:
i= 9% anual
t= 10 años

$$fc = \frac{12}{12} = 1$$

$$r = \frac{.09}{1} = .09$$

$$n = (10)(1)$$

$$n = 10$$

$$n = \frac{120}{12}$$

$$n = 10$$

***NOTA**: Cada vez que calculen **n**, especificar si son semestres, trimestres, etc. Hacer lo mismo para el caso de **r**.*

MONTO COMPUESTO

Deducción de la fórmula

Año 1	K+Ki=	K(1+i)	
Año 2	K(1+i)+{K(1+i)}i =	K(1+i)*(1+i)=	$K(1+i)^2$
Año 3	K(1+i)+{K(1+i)}i+[{K(1+i)}i]i=$K(1+i)^2$*(1+i)=		$K(1+i)^3$

Entonces al final de *n* años tendremos:

$$\boldsymbol{S = C(1+r)^n}$$

Donde:
S= Monto compuesto
C= Capital o valor presente compuesto
r= tasa de interés por periodo
n= número total de periodos

Deducción de la fórmula del monto compuesto con ejemplo

EJEMPLO: Se deposita un capital de $1,000.00 a una tasa de interés del 3% anual, si no se retira el depósito y los intereses se reinvierten, cada año, durante 3 años. ¿Cuál será el monto compuesto al final de esos 3 años y qué cantidad representa los intereses?

Datos:
C=1,000.00
i= 3% anual
t=1 año
#mc=12
S=?

Conversiones

S_1=C(1+i)
S_2=C(1+i)(1+i)
S_3=C$(1+i)^2$(1+i)

$$\boldsymbol{fc = \frac{12}{12} = 1}$$

$$\boldsymbol{r = \frac{.03}{1} = .03}$$

$$\boldsymbol{n = (3)(1) = 3}$$

Resolución

$$\boldsymbol{S = C(1+i)}$$

$$S = 1{,}000.00(1+.03) \quad = 1{,}030.00$$
$$S = 1{,}000.00(1+.03)(1+.03) = 1{,}060.90$$
$$S = 1{,}000.00(1+.03)(1+.03)(1+.03) = 1{,}092.72$$

Utilizando fórmula de monto compuesto directa:

$$\boldsymbol{S = C(1+r)^n}$$

$$S = 1{,}000.00(1+.03)^3$$

$$S = 1{,}092.72$$

VARIACIONES EN EL CÁLCULO DEL INTERÉS COMPUESTO
a) Cuando se tiene tiempo fraccionario

En este caso se calcula el valor de ***n*** de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{n = \frac{total\ meses}{\#mc}}$$

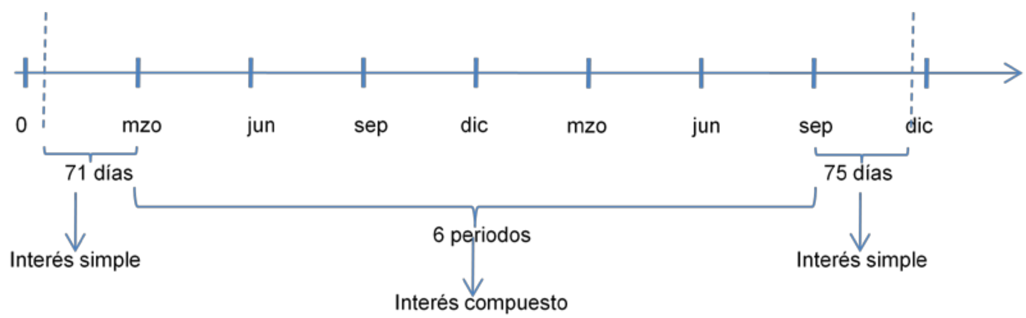
EJEMPLO. $10,000.00 permanecen en una cuenta que paga el 10% capitalizable en forma trimestral durante 5 años y 3 meses. ¿Cuánto interés se ganará?

Datos:	Conversiones	Resolución	

C=10,000.00
i=10% conv/trim
t=5 a 3m
#mc=3
S=?
I=?
	$fc = \frac{12}{3} = 4$
	$r = \frac{.10}{4} = .025$
	$n = \frac{63}{3} = 21$
		$\boldsymbol{S = C(1+r)^n}$
		$S = 10{,}000(1+.025)^{21}$
		$S = 10{,}000(1.679)$
		$S = 16{,}795.82$
			$\boldsymbol{I = S - C}$
			$I = 16{,}795.82 - 10{,}000.00$
			$I = 6{,}795.82$

En algunas operaciones financieras, se señalan expresamente las fechas de capitalización en el año y todo dinero colocado entre fechas, gana interés simple hasta la fecha inicial del periodo siguiente; todo dinero retirado entre fechas gana interés simple, desde la fecha terminal del periodo anterior. Así

EJEMPLO: Alguien deposita $1,000.00 el 20 enero en una cuenta de ahorros que ofrece el 6% capitalizable trimestralmente los días últimos del mes de Marzo, Junio, Septiembre y Diciembre. ¿Calcula el monto que podrá retirar el 15 de diciembre del año siguiente?



Datos:
C=1,000.00
i=6% conv/trim
t=71 d
t=1.5 años
t=75 d
#mc=3
S=?

Conversiones

$$fc = \frac{12}{3} = 4$$

$$r = \frac{.06}{4} = .015$$

$$n = \frac{18}{3} = 6$$

Resolución

$$\boldsymbol{S = C(1 + it)}$$
$$S = 1{,}000.00\left(1 + (.0.06)\left(\frac{71}{360}\right)\right)$$
$$S = 1{,}000.00\big(1 + (.06)(.1972)\big)$$
$$S = 1{,}000.00\big(1 + (.0118)\big)$$
$$S = 1{,}000.00(1.0118)$$
$$S = 1{,}011.66$$

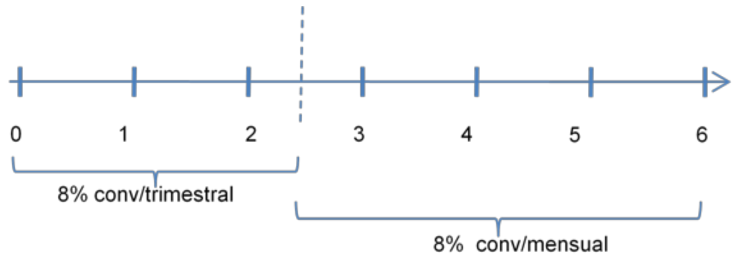
$$\boldsymbol{S = C(1 + r)^n}$$
$$S = 1{,}011.66(1 + .015)^6$$
$$S = 1{,}011.66(1.093)$$
$$S = 1{,}106.38$$

$$\boldsymbol{S = C(1 + it)}$$
$$S = 1{,}106.38\left(1 + (.0.06)\left(\frac{75}{360}\right)\right)$$
$$S = 1{,}106.38\big(1 + (.0.06)(.2083)\big)$$
$$S = 1{,}106.38(1.0125)$$
$$S = 1{,}120.21$$

VARIACIONES EN EL CÁLCULO DEL INTERÉS COMPUESTO
c) La tasa cambia durante el periodo que dura la operación

En estos casos, el problema se divide en partes y se trata como un problema por separado cada vez que se produce un cambio.

EJEMPLO. Se invirtieron $5,000.00 en un banco de ahorros a plazo de seis años. Cuando se realizó el depósito, el banco estaba pagando el 8% capitalizable en forma trimestral. Después de dos años y medio la tasa cambio al 8% capitalizable en forma mensual. ¿Determina el monto e interés compuesto al finalizar los 6 años?



Datos:	Conversiones	Resolución	

C=5,000.00
i=8% conv/trim
t=2.5 años
#mc=3
S=?
	$fc = \frac{12}{3} = 4$
	$r = \frac{.08}{4} = .02$
	$n = (2.5)(4) = 10$
		$\boldsymbol{S = C(1+r)^n}$
		$S = 5{,}000.00(1+.02)^{10}$
		$S = 5{,}000.00(1.2189)$
		$S = 6{,}094.97$	

C=6,094.97
i=8%conv/mens
t=3.5 años
#mc=1
S=?
	$fc = \frac{12}{1} = 12$
	$r = \frac{.08}{12} = .006$
	$n = (3.5)(12) = 42$
		$\boldsymbol{S = C(1+r)^n}$
		$S = 6{,}094.97(1+.006)^{42}$
		$S = 6{,}094.97(1.3219)$
		$S = 8{,}056.94$
			$\boldsymbol{I = S - C}$
			$I = 8{,}056.94 - 5{,}000.00$
			$I = 3{,}056.94$

VARIACIONES EN EL CÁLCULO DEL INTERÉS COMPUESTO
d) Existe un depósito adicional durante el periodo

En este caso los problemas también se dividen en partes. Cada vez que se realiza un depósito este tiene que ser agregado al importe compuesto en el momento del depósito para obtener el nuevo principal. El interés será igual al importe final menos (el capital original más cualquier depósito realizado durante el periodo).

EJEMPLO. El primero de julio 1981 se efectuó un depósito de $4,000.00 en un banco que pagaba el 6% de interés capitalizable en forma trimestral. El 1 enero de 1983 se realizo un depósito adicional de $2,000.00 en la misma cuenta ¿Cuál será el saldo en la cuenta el 1 enero de 1986? ¿Qué cantidad del saldo final representará el interés compuesto?

Datos:	**Conversiones**	**Resolución**

C=4,000.00
i=6% conv/trim
t=1.5 años
#mc=3
S=?
	$fc = \frac{12}{3} = 4$
	$r = \frac{.06}{4} = .015$
	$n = (1.5)(4) = 6$
		$\boldsymbol{S = C(1+r)^n}$
		$S = 4{,}000.00(1+.015)^6$
		$S = 4{,}000.00(1.0934)$
		$S = 4{,}373.77$
		al 1 de enero de 1983
		
		más el depósito
		4,373.77+ 2,000.00=
		6,373.77

C=4,373.77
i=6% conv/trim
t=3 años
#mc=3
S=?
	$fc = \frac{12}{3} = 4$
	$r = \frac{.06}{4} = .015$
	$n = (3)(4) = 12$
		$\boldsymbol{S = C(1+r)^n}$
		$S = 6{,}373.77(1+.015)^{12}$
		$S = 6{,}373.77(1.1956)$
		$\boldsymbol{S = 7{,}620.59}$
			$\mathrm{I} = \mathrm{S} - (\mathrm{C} + \text{deposito adicional})$
			$\mathrm{I} = 7{,}620.59 - (4{,}000 + 2{,}000)$
			$\mathrm{I} = 7{,}620.59 - 6{,}000.00$
			$\boldsymbol{I = 1{,}620.59}$

VALOR PRESENTE COMPUESTO

Es el capital inicial que debe ser invertido ahora a una determinada tasa de interés para acumular un importe deseado al final de un periodo de tiempo definido.

FORMULAS

$$\boldsymbol{C = \frac{S}{(1+r)^n}} \qquad \boldsymbol{C = S(1+r)^{-n}}$$

EJEMPLO: ¿Cuánto debe depositarse en el banco si se decide obtener un monto de $5,000.00 dentro de 3 años si la tasa de interés es del 20% anual convertible semestralmente?

Datos:

S=5,000.00
i=20% conv/sem
t=3 años
#mc=6
S=?

Conversiones

$fc = \frac{12}{6} = 2$

$r = \frac{.20}{2} = .10$

$n = (3)(2) = 6$

Resolución

$$\boldsymbol{C = \frac{S}{(1+r)^n}}$$

$$C = \frac{5{,}000.00}{(1+.10)^6}$$

$$C = \frac{5{,}000.00}{(1.7715)}$$

$$C = 2{,}822.36$$

$$\boldsymbol{C = S(1+r)^{-n}}$$

$$C = 5{,}000(1+.10)^{-6}$$

$$C = 5{,}000(1.5644)$$

$$C = 2{,}822.36$$

2.1 DESCUENTO SIMPLE

COMPETENCIA A DESARROLLAR: A lo largo de esta unidad el estudiante entenderá los conceptos básicos del descuento simple, con el fin de que sean aplicados a operaciones financieras de compra-venta de cetes y de factoraje financiero.

El descuento simple es una operación de crédito que se lleva a cabo principalmente en instituciones financieras. Consiste en adquirir letras de cambio o pagarés de cuyo valor al vencimiento se descuenta una suma equivalente a los intereses que devengaría el documento entre la fecha en que se recibe y la fecha de vencimiento. Con esta operación se anticipa el valor actual del documento.

Será importante distinguir la diferencia entre dos conceptos: solvencia y liquidez. Ambos términos se refieren a capacidad de pago; sin embargo el primero se refiere al mediano o largo plazo, mientras que el segundo es en el corto plazo.

En términos generales, el descuento de documentos puede ser definido como la disminución del valor de un documento.

Una de las formas de calcular el descuento es catalogarlo como Bancario o comercial, al que se le define como interés del valor nominal de un documento y se determina mediante el interés entre el vencimiento de la deuda y la fecha de descuento a cierta tasa, valuada esta sobre el valor nominal del documento. Se le conoce también como interés pagado por adelantado porque se calcula con base en el monto.

La fórmula para calcular el descuento es similar a la fórmula del interés simple, la diferencia radica en que el valor tomado en cuenta para el cálculo del descuento es el valor al vencimiento de la deuda.

FORMULA

$$\mathbf{Dc} = \mathbf{Sdt}$$

Donde:
Dc= Descuento comercial
d= tasa de descuento
t= tiempo
S= monto

NOTA: Para encontrar la fórmula del descuento bancario, es necesario aplicar al valor nominal sobre el cual se concede el descuento, la tasa de descuento correspondiente.

El valor presente del valor al vencimiento nominal, S, estará dado por la diferencia entre ese valor menos el descuento obtenido, ie:

Deducción de fórmula

$$\mathbf{C} = \mathrm{S} - \mathrm{Dc}$$

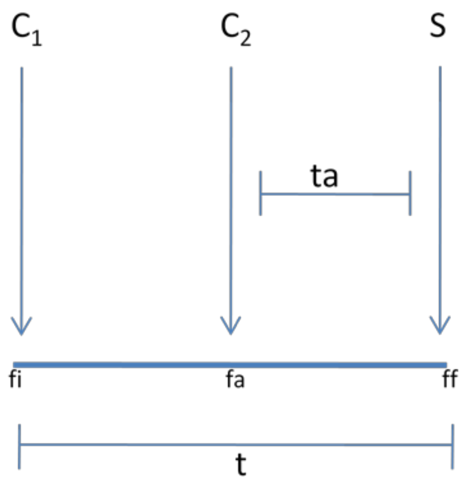
$$\mathbf{C} = \mathrm{S} - (\mathrm{Sdt})$$

$$\mathbf{C} = \mathrm{S}(1 - \mathrm{dt})$$

$$\mathbf{C} = \boldsymbol{S}(\mathbf{1} - \mathbf{dt})$$

Donde

C= valor presente o capital



Donde:

fi= fecha en que se firma el documento
ff= fecha de vencimiento del documento
fa= fecha en que se vende el documento
ta= intervalo de tiempo comprendido entre fa y ff
t= duración de la operación

EJEMPLO: Un banco aplica el 8% de descuento. Si un cliente firma un documento cuyo valor al vencimiento es de $2,500.00 a 4 meses, sin intereses. ¿Qué cantidad le dará el banco?

Procedimiento para calcular el descuento comercial, cuando el documento es vendido:

1) *Obtener el valor al vencimiento del pagaré o documento de la operación original*

   Datos:
   S= *2,500.00*
   d= 8% anual
   t= 4 meses

2) *Encontrar el valor descontado, utilizando la tasa de descuento convenida, para el periodo comprendido entre el momento en que se efectúa el descuento y la fecha de vencimiento del pagaré. Lo anterior se hace aplicando la fórmula del descuento comercial.*

Fórmula

$$\mathbf{Dc} = \mathrm{Sdt}$$

Resolución

$$\mathbf{Dc} = 2{,}500(.08)\left(\frac{4}{12}\right)$$

$$\mathbf{Dc} = 2{,}500(.08)(.33)$$

$$\mathbf{Dc} = 2{,}500(.026)$$

$$\mathbf{Dc} = 66.66$$

3) *Se resta el descuento obtenido al valor de vencimiento del pagaré y así se obtiene el valor recibido, es decir,* ***C****.*

Resolución

Fórmulas

$\mathbf{C} = \mathrm{S} - \mathrm{Dc}$

$\mathbf{C} = 2{,}500 - 66.66$

$\mathbf{C} = 2{,}433.33$ valor recibido por el cliente.

3.1 ANUALIDADES

COMPETENCIA A DESARROLLAR: Identificar la aplicación del valor del dinero a través del tiempo en operaciones de anualidades y amortización de deudas.

Las anualidades son una serie de pagos iguales, realizados en forma periódica, es decir, a intervalos de tiempo iguales. Las anualidades pueden clasificarse de la siguiente manera:

Tipos de anualidades

- **Generales**
  El periodo de pago no coincide con el periodo de capitalización.
  - **Inmediata**
    La realización de los cobros o pagos, tiene lugar en el periodo que sigue inmediatamente a la formalización del trato.
  - **Diferida**
    La realización de los cobros o pagos, se pospone.
- **Simples**
  Aquellas en que el periodo de pago coincide con el periodo de capitalización.
  - **Vencida u Ordinaria**
    Se trata de casos en los que los pagos se efectúan al vencimiento o final del periodo.
  - **Anticipada**
    Es aquella en la que los pagos se realizan al principio de cada periodo.

ELEMENTOS DE LAS ANUALIDADES

Renta (R): Valor de cada pago periódico

Periodo de pago de la renta: Tiempo que se fija entre dos pagos sucesivos.

Tiempo o plazo de anualidad: Intervalo de tiempo que transcurre entre el comienzo del primer periodo de pago y el final del último.

Renta Anual (S): Es la suma de los pagos realizados durante un año.

Tasa de una Anualidad (r): Tipo de interés que se fija y puede ser nominal o efectiva.

ANUALIDAD ORDINARIA O VENCIDA

MONTO

El monto V_f de una anualidad, es la suma de los montos compuestos de los distintos pagos, cada uno acumulado hasta el término del plazo. Su fórmula es la siguiente

$$\boldsymbol{Vf = R\left[\left[\frac{(1+r)^n - 1}{r}\right]\right]}$$

Donde:
V_f= Monto o valor futuro de una anualidad

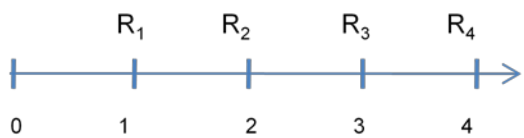


Diagrama de anualidad ordinaria o vencida

EJEMPLO: Se deposita $1,000.00 al final de cada trimestre en un banco que paga el 6% capitalizable en forma trimestral. ¿Cuánto habrá en depósito al finalizar un año?

Datos:

R=1,000.00
i=6% conv/trim
t=1 año
#mc=3
$\boldsymbol{V_f}$=?

Conversiones

$$fc = \frac{12}{3} = 4$$

$$r = \frac{.06}{4} = .015$$

$$n = (1)(4) = 4$$

Resolución

$$\boldsymbol{V_f = R\left[\left[\frac{(1+r)^n - 1}{r}\right]\right]}$$

$$\boldsymbol{V_f} = 1{,}000.00\left[\left[\frac{(1+.015)^4 - 1}{.015}\right]\right]$$

$$\boldsymbol{V_f} = 1{,}000.00\left[\left[\frac{(1.0613) \quad - 1}{.015}\right]\right]$$

$$\boldsymbol{V_f} = 1{,}000.00\left[\left[\frac{.0613}{.015}\right]\right]$$

$$\boldsymbol{V_f} = 1{,}000.00[[4.09]]$$

$$\boldsymbol{V_f} = 4{,}090.90$$

RENTA DE UNA ANUALIDAD VENCIDA

Es el valor de cada pago periódico que se realiza a intervalos iguales de tiempo.

$$\boldsymbol{R = \frac{V_f r}{(1+r)^n - 1}}$$

Donde:

$\boldsymbol{R}$= Valor de cada pago periódico

EJEMPLO: Calcular el valor de los depósitos semestrales vencidos necesarios para que una cuenta de ahorros que paga el 8% con capitalización semestral, brinde en 5 años un importe o fondo de $20,000.00

Datos:	Conversiones	Resolución

$\boldsymbol{V_f}$ =20,000.00
i=8% conv/sem
t=5 años
#mc=6
R=?
	$fc = \frac{12}{6} = 2$
	$r = \frac{.08}{2} = .04$
	$n = (5)(2) = 10$
		$\boldsymbol{R = \frac{V_f r}{(1+r)^n - 1}}$
		$R = \frac{20{,}000.00(.04)}{(1+.04)^{10} - 1}$
		$R = \frac{800}{1.48 - 1}$
		$R = \frac{800}{48}$
		$R = 1{,}665.81$

PLAZO DE UNA ANUALIDAD VENCIDA

Formula

$$\boldsymbol{n = \frac{\log\left\{\frac{V_f r}{R} + 1\right\}}{\log(1+r)}}$$

Donde:

n= plazo de la anualidad, *ie*, total de periodos que abarca la operación.

EJEMPLO: ¿Cuántos pagos anuales completos de $1,896.70 deben cubrirse al fin de cada periodo, con objeto de acumular, al 6% anual, la cantidad de $25,000.00?

Datos:

R=1,896.70
i=6%
t=?
#mc=12
V_f=25,000.00

Conversiones

$$fc = \frac{12}{12} = 1$$

$$r = \frac{.06}{1} = .06$$

Resolución

$$n = \frac{\log\left\{\frac{25{,}000.00(.06)}{1{,}896.70} + 1\right\}}{\log(1+.06)}$$

$$n = \frac{\log\left\{\frac{1{,}500.00}{1{,}896.70} + 1\right\}}{\log(1+.06)}$$

$$n = \frac{\log\{1.7908\}}{\log(1+.06)}$$

$$n = \frac{.2530}{.02530}$$

$$\boldsymbol{n = 9.99\ a\tilde{n}os}$$

VALOR ACTUAL DE UNA ANUALIDAD VENCIDA

Es la suma de los valores actuales de las rentas.

$$\boldsymbol{V_p = R\left\{\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}\right\}}$$

Donde:

A= Valor actual o presente

EJEMPLO: ¿Cuál será el valor actual de una anualidad, si el importe de las rentas depositadas es de $450.00, al final de cada uno de 7 trimestres, además la tasa de interés es del 9% trimestral?

Datos:

R=450
i=
t=
#mc=3
$\boldsymbol{V_p}$=?

Conversiones

$fc = \frac{12}{3} = 4$

$r = .09$

$n = 7\ trim$

Resolución

$$\boldsymbol{V_p} = 450\left\{\frac{1-(1+.09)^{-7}}{.09}\right\}$$

$$\boldsymbol{V_p} = 450\left\{\frac{1-.5470}{.09}\right\}$$

$$\boldsymbol{V_p} = 450\left\{\frac{.4529}{.09}\right\}$$

$$\boldsymbol{V_p} = 450\{5.03\}$$

$$\boldsymbol{A = 2,264.82}$$

RENTA DE UNA ANUALIDAD VENCIDA

Formula:

$$\boldsymbol{R = \frac{V_p r}{1-(1+r)^{-n}}}$$

Donde:

$\boldsymbol{R}$= Valor de cada pago periódico

EJEMPLO: Una persona adquiere hoy a crédito una computadora que cuesta $9,750.00 y acuerda pagarla en 4 mensualidades vencidas. ¿Cuánto deberá pagar cada mes si le cobran el 3.5% mensual de interés?

Datos:

$\boldsymbol{V_p}$=9,750.00
i=
t=
#mc=1
R=?

Conversiones

$fc = \frac{12}{1} = 12$

$r = .035$

$n = 4$

Resolución

$$R = \frac{9{,}750(.035)}{1-(1+.035)^{-4}}$$

$$R = \frac{341.25}{1-.8714}$$

$$R = \frac{341.25}{.1285}$$

$$\boldsymbol{R = 2,654.44}$$

TIEMPO O PLAZO A VALOR PRESENTE DE UNA ANUALIDAD VENCIDA

Fórmula:

$$\boldsymbol{n = -\frac{\log\left\{\frac{-V_p r}{R} + 1\right\}}{\log(1 + r)}}$$

Donde:

$\boldsymbol{n}$= plazo de la anualidad, *ie*, total de periodos que abarca la operación.

EJEMPLO: ¿Cuántos pagos bimestrales vencidos de $1,450.00 se tendrán que realizar para saldar una deuda que vencía el día de hoy y cuyo importe es de $8,000.00? El primer pago se realizará dentro de 2 meses y el interés es del 11 % bimestral.

Datos:

R=1,450.00
i=
t=?
#mc=2
$\boldsymbol{V_p}$=8,000.00

Conversiones

$fc = \frac{12}{2} = 6$

$r = .11$

Resolución

$$\boldsymbol{n = -\frac{\log\left\{\frac{-V_p r}{R} + 1\right\}}{\log(1 + r)}}$$

$$n = -\frac{\log\left\{\frac{-8{,}000.00(.11)}{1{,}450.00} + 1\right\}}{\log(1.11)}$$

$$n = -\frac{\log\left\{\frac{-880}{1{,}450.00} + 1\right\}}{\log(1.11)}$$

$$n = -\frac{\log\{-1.6068\}}{\log(1.11)}$$

$$n = -\frac{\{-.4054\}}{.0453}$$

$\boldsymbol{n = 8.94}$ $bimestres$

ANUALIDADES ANTICIPADAS

Una anualidad anticipada, es una sucesión de pagos o rentas que se efectúan o vencen, al principio del periodo de pago.

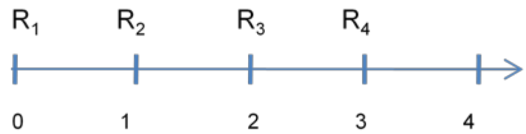


Diagrama de anualidad anticipada

En los negocios, es frecuente que los pagos periódicos se efectúen al comienzo de cada periodo; tal es el caso de la renta de terrenos, edificios y oficinas, cuyo alquiler se paga a principio de periodo.

MONTO DE UNA ANUALIDAD ANTICIPADA

$$\boldsymbol{V_{fa} = R\left[\!\left[\frac{(1+r)^n - 1}{r}\right]\!\right](1+r)}$$

Donde:
$\boldsymbol{V_{fa}}$= Monto de la anualidad anticipada

EJEMPLO: Un obrero deposita en una cuenta de ahorros $500.00 al principio de cada mes. Si la cuenta paga el 2.3% mensual de interés ¿Cuánto habrá ahorrado durante el primer año?

Datos:

R=500.00
i=
t=1 año
#mc=1
$\boldsymbol{V_{fa}}$=?

Conversiones

$$fc = \frac{12}{1} = 12$$

$$r = .023$$

$$n = (1)(12) = 12$$

Resolución

$$\boldsymbol{V_{fa} = R\left[\!\left[\frac{(1+r)^n - 1}{r}\right]\!\right](1+r)}$$

$$\boldsymbol{V_{fa}} = 500\left[\!\left[\frac{(1+.023)^{12} - 1}{.023}\right]\!\right](1+.023)$$

$$\boldsymbol{V_{fa}} = 500\left[\!\left[\frac{(1.3137) \quad - 1}{.023}\right]\!\right](1.023)$$

$$\boldsymbol{V_{fa}} = 500\left[\!\left[\frac{.3137}{.023}\right]\!\right](1.023)$$

$$\boldsymbol{V_{fa}} = 500[\![13.06406]\!](1.023)$$

$$\boldsymbol{V_{fa}} = 500(13.9543)$$

$$\boldsymbol{V_{fa} = 6,977.18}$$

VALOR PRESENTE DE UNA ANUALIDAD ANTICIPADA

$$\boldsymbol{V_{pa} = R\left\{\frac{1-(1+r)^{-n+1}}{r}+1\right\}}$$

Donde:

$\boldsymbol{V_{pa}}$= Valor actual o presente de una anualidad anticipada

EJEMPLO: Un comerciante alquila un local para su negocio y acuerda pagar $750.00 de renta, al inicio de cada mes. Como desea librarse del compromiso mensual de la renta decide proponer una renta anual equivalente y también anticipada. Si se calculan los intereses a razón del 37.44% convertible mensualmente, ¿Cuál será el valor de la renta anual?

Datos:

R=750
i= 37.44%
t=1
#mc=1
$\boldsymbol{V_{pa}}$=?

Conversiones

$$fc=\frac{12}{1}=12$$

$$r=\frac{.3744}{12}=.0312$$

$$n=(1)(12)=12$$

Resolución

$$\boldsymbol{V_{pa} = R\left\{\frac{1-(1+r)^{-n+1}}{r}+1\right\}}$$

$$\boldsymbol{V_{pa}} = 750\left\{\frac{1-(1+.0312)^{-12+1}}{.0312}+1\right\}$$

$$\boldsymbol{V_{pa}} = 750\left\{\frac{1-(1.0312)^{-11}}{.0312}+1\right\}$$

$$\boldsymbol{V_{pa}} = 750\left\{\frac{1-(.71322)}{.0312}+1\right\}$$

$$\boldsymbol{V_{pa}} = 750\left\{\frac{.2867}{.0312}+1\right\}$$

$$\boldsymbol{V_{pa}} = 750\{9.1914+1\}$$

$$\boldsymbol{V_{pa}} = 750\{10.19\}$$

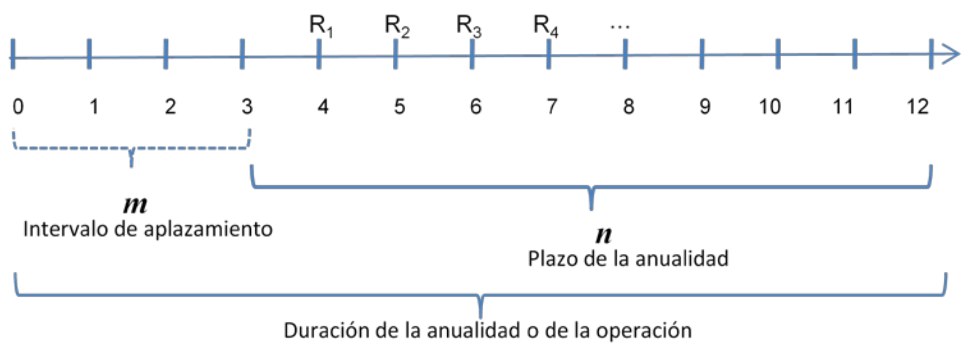
$$\boldsymbol{V_{pa} = 7,643.57}$$

ANUALIDAD DIFERIDA

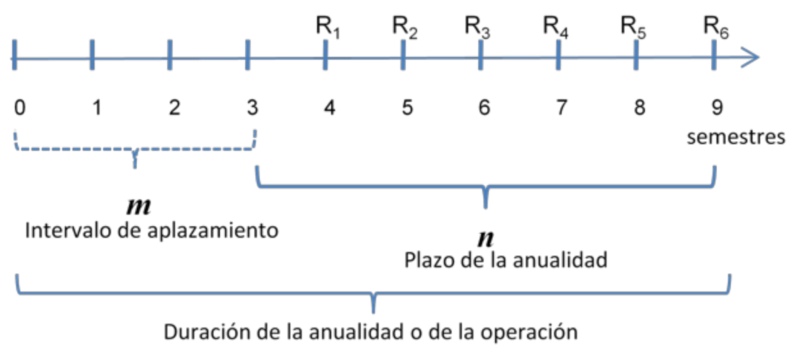
Es aquella cuyo plazo comienza a correr después de transcurrido un intervalo de tiempo, es decir, no coincide la fecha inicial de la anualidad con la fecha del primer pago

DURACION. Es el tiempo que transcurre entre el comienzo del intervalo de aplazamiento y el final del plazo de la anualidad.

INTERVALO DE APLAZAMIENTO. Número de ***periodos*** que transcurren entre la fecha inicial a fecha de valoración de la anualidad y la fecha del primer pago menos uno y es denotado por ***m***.



EJEMPLO: Si suponemos que dentro de 2 años se efectuara el primer pago de una anualidad diferida de R pesos por semestre y cuyo plazo es 3 años tendremos la siguiente representación gráfica:



***NOTA**: por lo general las anualidades diferidas se analizan como anualidades ordinarias o vencidas, por ello en los planteamientos, al hablar de una anualidad diferida, **será tratada como vencida y se utilizarán las fórmulas ya revisadas**.*

VALOR PRESENTE DE UNA ANUALIDAD DIFERIDA

Fórmula:

$$\boldsymbol{V_{pd} = R\left\{\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}\right\}(1+r)^{-m}}$$

Donde:

$\boldsymbol{V_{pd}}$= valor presente de una anualidad diferida

EJEMPLO: Calcula el valor actual de una renta de $5,000.00 semestrales, si el primer pago debe recibirse dentro de 2 años y el último dentro de 6 años. Considera la tasa de interés del 8% convertible semestralmente.

Datos:

R=5,000.00
i= 8% conv/sem
t=
#mc=6
$\boldsymbol{V_{pd}}$=?

Conversiones

$fc = \frac{12}{6} = 2$

$r = \frac{.08}{2} = .04$

$n = 9$

m=4-1=3

Resolución

$$\boldsymbol{V_{pd} = R\left\{\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}\right\}(1+r)^{-m}}$$

$$\boldsymbol{V_{pd}} = 5{,}000\left\{\frac{1-(1+.04)^{-9}}{.04}\right\}(1+.04)^{-3}$$

$$\boldsymbol{V_{pd}} = 5{,}000\left\{\frac{1-(.7025)}{.04}\right\}(.8889)$$

$$\boldsymbol{V_{pd}} = 5{,}000\left\{\frac{.2974}{.04}\right\}(.8889)$$

$$\boldsymbol{V_{pd}} = 5{,}000\{7.43\}(.8889)$$

$$\boldsymbol{V_{pd}} = 5{,}000(.6.60)$$

$$\boldsymbol{V_{pd} = 33{,}049.91}$$

MONTO DE UNA ANUALIDAD DIRERIDA

El monto se puede calcular como el de una anualidad vencida (para conocer la forma de calcularlo, remitirse al ejercicio de la página 24) , y en este caso el posponerla ya no tiene efecto sobre el comportamiento de la anualidad. Es por ello que la consideración de si la anualidad es diferida o inmediata, carece de interés cuando lo que se requiere determinar es el monto.

3.2 AMORTIZACIÓN

La amortización es una forma de liquidar o reducir paulatinamente una deuda mediante pagos periódicos, generalmente iguales, que cubren tanto una parte del interés como una parte del valor total de la deuda (capital original).

EJEMPLO: Si hoy se adquiere una deuda de $5,000.00 con intereses al 5% convertible semestralmente que se va a amortizar en 6 pagos semestrales en los próximos 3 años, el primero al término de 6 meses.

a) Señala que tipo de anualidad es: *Dado que el primer pago se realiza después de los primeros 6 meses de la operación, se deduce que es vencida*
b) Anota los datos
c) Hallar el valor de los pagos parciales y
d) Elaborar la tabla de amortización

Datos:

$\boldsymbol{V_p}$=5,000.00
i=5% conv/sem
t=3 años
#mc=6
R=?

Conversiones

$fc = \frac{12}{6} = 2$

$r = \frac{.05}{2} = .025$

$n = (3)(2) = 6$

Resolución

$$\boldsymbol{R = \frac{V_p r}{1-(1+r)^{-n}}}$$

$$R = \frac{5,000.00(.025)}{1-(1+.025)^{-6}}$$

$$R = \frac{125}{1-(.8622)}$$

$$R = \frac{125}{.1377}$$

$$\boldsymbol{R = 907.74}$$

TABLA DE AMORTIZACIÓN

PERIODO	A VALOR DEL PAGO	B INTERES CONTENIDO EN EL PAGO E*r	C CAPITAL CONTENIDO EN EL PAGO A-B	D CAPITAL PAGADO ACUMULADO C+D*	E SALDO INSOLUTO Capital inicial -D
0					5,000.00
1	907.75	125.00	782.75	782.75	4,217.25
2	907.75	105.43	802.32	1,585.07	3,414.93
3	907.75	85.37	822.38	2,407.45	2,592.55
4	907.75	64.81	842.94	3,250.38	1,749.62
5	907.75	43.74	864.01	4,114.39	885.61
6	907.75	22.14	885.61	5,000.00	0.00

B I B L I O G R A F Í A

Portus Govinden, Lincoyan. *Matemáticas Financieras*. McGraw Hill

Ayres, Frank. *Matemáticas Financieras*. McGraw Hill

Díaz Mata, Alfredo. *Matemáticas Financieras*. McGraw HillToledano y Castillo.

Mario. *Matemáticas Financieras*. CECSA.

Highland, Esther. *Matemáticas Financieras*. Prentice Hall

Villalobos, José Luis. *Matemáticas Financieras*. Pearson.

GOBIERNO DEL
ESTADO DE MÉXICO

GOBIERNO QUE TRABAJA Y LOGRA
enGRANDE

TESOEM
TECNOLÓGICO DE ESTUDIOS SUPERIORES
ORIENTE DEL ESTADO DE MÉXICO

"2013. AÑO DEL BICENTENARIO DE LOS SENTIMIENTOS DE LA NACIÓN"

MIS APUNTES DE MATEMATICAS FINANCIERAS

ELABORO:***L.A.E. MARIA DE LA LUZ MARTINEZ LEON***
LA PAZ, MARZO 2013

Í N D I C E

Introducción	2
Importancia de las Matemáticas Financieras Tema : 1.1, 1.1.1	3
Interés Simple Tema:1.1.3	4
Interés simple exacto y ordinario	6
Cálculo del tiempo	7
Monto simple	8
Valor presente simple	9
Ecuaciones de valor a interés simple	10
Interés compuesto Tema:1.1.3	11
Monto compuesto	14
Variaciones en el cálculo del interés compuesto	15
Valor presente compuesto	19
Descuento Simple Tema: 2.1	20
Anualidades Tema:3.1, 3.1.1, 3.1.2	23
Anualidades vencidas Tema:3.1.3	24
Anualidades anticipadas Tema:3.1.3	29
Anualidades diferidas Tema: 3.1.3	31
Amortización Tema: 3.2, 3.2.1, 3.2.2	34
Bibliografía	35