GUIA DE ESTUDIO DE ÁLGEBRA LINEAL

Ing. Mijail Díaz Concepción

OBJETIVOS GENERALES DE LA MATERIA:

Al concluir la materia el estudiante deberá ser capaz de:

-Reconocer matrices y representar problemas en forma matricial.
-Realizar con destreza las diferentes operaciones posibles ente matrices.
-Calcular el determinante de una matriz, interpretar este valor y utilizar sus propiedades convenientemente.
-Resolver cualquier sistema de ecuaciones lineales empleando la notación matricial por los diferentes métodos.
-Realizar las diferentes operaciones en el trabajo con vectores y aplicar las propiedades de las mismas el la solución de diferentes problemas concretos.

CONTENIDOS MÍNIMOS:

Tema 1: Matrices.

1.1 Notación matricial. Conceptos básicos

1.2 Tipos de matrices.

1.2.1 Matriz fila.

1.2.2 Matriz columna.

1.2.3 Matriz nula.

1.2.4 Matriz triangular superior.

1.2.5 Matriz triangular inferior.

1.2.6 Matriz diagonal.

1.2.7 Matriz escalar.

1.2.8 Matriz identidad.

1.2.9 Matriz simétrica.

1.2.10 Matriz antisimétrica.

1.3 Operaciones con matrices.

1.3.1 Matriz opuesta.

1.3.2 Matriz traspuesta.

1.3.3 Suma de matrices.

1.3.4 Multiplicación por un escalar.

1.3.5 Multiplicación de matrices.

1.3.6 Combinaciones lineales.

1.3.7 Operaciones entre las filas de una matriz.

1.3.8 Matriz inversa (método de Gauss-Jordán)

Tema 2: Determinantes.

- **2.1** Definición. Cálculo de determinantes de orden 1; 2; 3
- **2.2** Propiedades del determinante.
- **2.3** Cálculo de determinantes de orden n.
  - **2.3.1** Evaluación por reducción en las filas.
  - **2.3.2** Evaluación por desarrollo de cofactores.
- **2.4** Matriz inversa (método de Cramer)

Tema 3: Sistemas de ecuaciones lineales.

- **3.1** Sistemas de ecuaciones lineales (SEL). Tipos de solución.
- **3.2** Solución de SEL compatibles indeterminados.
- **3.3** Representaciones matriciales de un SEL. Métodos de solución.
  - **3.3.1** Método de Gauss-Jordán.
  - **3.3.2** Método de Cramer.
  - **3.3.3** Método de la inversa.
- **3.4** Sistemas homogéneos de ecuaciones lineales.
- **3.5** Aplicaciones.

Tema 4: Espacios vectoriales.

- **4.1** Vectores en R^2; R^3; R^n.
- **4.2** Operaciones con vectores.
  - **4.2.1** Suma; resta y multiplicación por un escalar.
  - **4.2.2** Producto escalar de vectores.
  - **4.2.3** Producto vectorial (cruz).
  - **4.2.4** Aplicaciones.
- **4.3** Espacios vectoriales. Definición.
- **4.4** Dependencia lineal entre vectores.
- **4.5** Espacio vectorial generado. Base y Dimensión.

Tema 5: Transformaciones lineales.

- 5.1 La función transformación lineal.
- 5.2 Propiedades de una función transformación lineal.
- 5.3 Calculo de una función transformación lineal.

TAMA 1: MATRICES.

Una matriz es un arreglo rectangular de números ordenados en **m**-filas (horizontales) y **n**-columnas (verticales) encerrados entre paréntesis o corchetes.

La notación mas usada es **$A = [a_{ij}]$** donde **i** es el número de posición de la fila y **j** el de la columna.

El tamaño de la matriz se especifica usualmente escribiendo como subíndice "**mxn**"

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & - & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & - & a_{2n} \\ a_{31} & {}_{32} & a_{33} & - & a_{3n} \\ - & - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & - & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \qquad ejemplo \qquad B=\begin{bmatrix} 2 & 8 & -15 \\ -5 & 27 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

Cuando **m = n** se dice que la matriz es **cuadrada.**

Diagonal principal: Solo existe en matrices cuadradas y es la línea formada por los elementos a_{ij} tales que **i = j**

Traza de ena matriz: es la suma de los elementos de la diagonal principal.

Traz (A) = $a_{11} + a_{22} + a_{33} + ... + a_{nn}$

TIPOS DE MATRICES

Matriz fila: Es una matriz de orden 1 x n.

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 6 & -17 \end{bmatrix}$$

Matriz columna: Es una matriz de orden m x 1.

$$A=\begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Matriz nula: Es una matriz cuyos elementos son todos "0"

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz triangular superior: Es una matriz cuadrada cuyos elementos a_{ij} = o cuando i>j

$$A=\begin{bmatrix}3 & -2 & 5\\ 0 & 4 & -6\\ 0 & 0 & 7\end{bmatrix}$$

Matriz triangular inferior: Es una matriz cuadrada cuyos elementos a_{ij} = o cuando i<j

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 4 & -3 & 0\\ 6 & 15 & 12\end{bmatrix}$$

Matriz diagonal: Es una matriz cuadrada cuyos elementos a_{ij} = o cuando $i \neq j$

$$D=\begin{bmatrix}9 & 0 & 0\\ 0 & 7 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$$

Matriz escalar: Es una matriz diagonal cuyos elementos a_{ij} = k($k \neq 0$) cuando i = j

$$E=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

Matriz identidad: Es una matriz diagonal cuyos elementos a_{ij} = 1 cuando i = j

$$I_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad I_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \qquad I_4=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Matriz simétrica: Es una matriz cuadrada donde $a_{ij} = a_{ji}$ para $i \neq j$

$$A=\begin{bmatrix}3 & -2 & 5\\ -2 & 4 & -6\\ 5 & -6 & 7\end{bmatrix}$$

Matriz antisimétrica: Es una matriz cuadrada donde $a_{ij} = - a_{ji}$ para $i \neq j$ y $a_{ij} = 0$ para $i=j$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & -6 \\ -5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

OPERACIONES CON MATRICES

Matriz opuesta: Sea $A = [a_{ij}]$ su opuesta es $- A = - [a_{ij}] = [- a_{ij}]$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & -15 \\ -5 & 27 & 0 \end{bmatrix} \qquad -A = \begin{bmatrix} -2 & -8 & 15 \\ 5 & -27 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz traspuesta: Sea $A = [a_{ij}]$ de orden m x n su traspuesta se obtiene permutando las filas con las columnas y se denota A' o $A^t = [a_{ji}]$ y es de orden n x m

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & -15 \\ -5 & 27 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3} \qquad A^t = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 8 & 27 \\ -15 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

Suma de matrices: Sean la matrices $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ su suma se obtiene sumando "elemento a elemento" $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$ y es del mismo tamaño.

Nota: Solo se pueden sumar matrices del mismo tamaño.

Seanlas matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}_{2\times 2} \qquad B = \begin{bmatrix} -7 & 8 \\ 12 & 9 \end{bmatrix}_{2\times 2} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 3} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 3 \\ -3 & 104 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$$A+B = \begin{bmatrix} -5 & 13 \\ 18 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 2} \qquad C+D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 0 & 108 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 3} \qquad A+C = no\,existe$$

Multiplicación por un escalar: El producto de una matriz $A = [a_{ij}]$ por un escalar "k" se obtiene multiplicando cada elemento de la matriz por dicho escalar $k \cdot A = [k \cdot a_{ij}]$

Nota: En el trabajo con matrices se acostumbra a llamar escalar las cantidades numéricas independientes.

Sean las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}_{2\times 2} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 3} \qquad 3 \cdot A = \begin{bmatrix} 6 & 15 \\ 18 & -9 \end{bmatrix} \qquad -5 \cdot C = \begin{bmatrix} -5 & -25 & 30 \\ 15 & -20 & -10 \end{bmatrix}$$

Multiplicación de matrices: El producto de dos matrices solo es posible cuando el número de filas de la segunda matriz es igual al número de columnas de la primera.

Sean las matrices $A = [a_{ij}]_{mx\mathbf{p}}$ y $B = [b_{ij}]_{\mathbf{p}xn}$ el producto es pasible porque el número de filas de B es **p** y es igual al número de columnas de A. La matriz resultante C es del orden m x n $C = A \cdot B = [c_{ij}]_{mxn}$ y sus elementos se obtienen multiplicando los elementos de **las filas de A** por los elementos correspondientes de **las columnas de B** y sumando estos productos.

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + a_{i3} \cdot b_{3j} + \ldots + a_{ip} \cdot b_{pj}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 3} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & -8 \\ -1 & 0 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 2} \qquad C = A \cdot B = \begin{bmatrix} 33 & 2 \\ 29 & -10 \\ 22 & -20 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

$$Ejemplo: \quad c_{32} = 3 \cdot (-8) + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 2 = -24 + 0 + 4 = -20$$

Combinaciones lineales: Se dice que una fila de una matriz es combinación lineal de las otras, si existen números reales k_1; k_2; k_3;...; k_n tales que la fila dada es la suma de los productos de cada número real por cada una de las otras filas de la matriz.

En la matriz :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 2 & 1 \\ -1 & -20 & 8 & 16 \end{bmatrix} \begin{matrix} fila\ 1 \\ fila\ 2 \\ fila\ 3 \end{matrix}$$

La fila 3 es una combinación lineal porque se puede expresar como:

Fila 3 = 3•(Fila 1) – 2•(Fila 2)

Operaciones entre filas de una matriz:

Entre las filas de una matriz se pueden realizar las siguientes operaciones sin que la matriz resultante deje de ser equivalente a la matriz original.

1. Permutar dos filas de la matriz.
2. Multiplicar una fila por un número real diferente de cero.
3. Sumar o restar a una fila una combinación lineal de una o varias de las demás filas de la matriz.

Inversa de una matriz:

En el trabajo con números reales se puede sustituir la división de un número "**a**" entre un número "**b**" por el producto de "**a**" por el inverso de "**b**".
No se ha definido un método para dividir matrices directamente pero si podemos encontrar una matriz inversa a la dada entonces podemos definir (en los casos que sean posibles) la división de una matriz **A** ente una matriz **B** como el producto de **A** por la matriz $\mathbf{B^{-1}}$ donde $\mathbf{B^{-1}}$ es la matriz inversa de **B**.

Uno de los métodos mas utilizados para encontrar la inversa de una matriz es el método de Gauss-Jordán y consiste anotar una matriz identidad correspondiente al lado de la matriz dada, luego realizar transformaciones en las filas de ambas matrices hasta convertir la matriz dada en identidad, luego la matriz resultante de las transformaciones realizadas en la identidad será la inversa de la matriz original.

Analice el siguiente esquema que resume el proceso descrito para hallar la enversa de "**A**".

$\mathbf{A_{nxn}/I_n}$ ⟶ operaciones entre filas ⟶ $\mathbf{I_n/A^{-1}}$

Nota: Solo se puede hallar la inversa de matices cuadradas.

Ejemplo: Hallar la inversa de la matriz A.

$$A=\begin{bmatrix}1&3&3\\1&4&3\\1&3&4\end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&3&3&1&0&0\\1&4&3&0&1&0\\1&3&4&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&3&3&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right] \begin{matrix}\\F2=F2-F1\\F3=F3-F1\end{matrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&3&0&4&0&-3\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right] F1=F1-3F3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&7&-3&-3\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right] F1=F1-3F2 \Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}7&-3&-3\\-1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$$

Propiedades de la aritmética matricial:

Suponiendo que los tamaños de las matrices son tales que sea posible realizar las operaciones indicadas:

$A + B = B + A$
$A + (B + C) = (A + B) + C$
$A(BC) = (AB)C$
$A(B + C) = AB + AC$
$(B + C)A = BA + CA$
$a(B + C) = aB + Ac$
$(a + b)C = aC + bC$
$(ab)C = a(bC)$
$a(BC) = (aB)C$

$A + 0 = A$
$A - A = 0$
$A0 = 0$
$0A = 0$
$AI_n = A$
$I_mA = A$
$AA^{-1} = A^{-1}A = I$

TAMA 2: DETERMINANTES.

En estudia anteriores se ha trabajado con funciones reares de variable real por ejemplo ***f(x) = 3x – 2*** es una función que a un número real ***x*** asocia un valor real ***f(x)***.
El determinante es una función que asocia un número real a una variable matricial y se define como ***det (A)***.

- El determinante de una matriz de primer orden (formada por un número real) es el propio número real.
- El determinante de una matriz de segundo orden es el producto de la diagonal principal menos el producto de la diagonal secundaria.

$$Si: \quad A=[a] \qquad B=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad Ejemplo \quad B=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\det(A)=a \qquad \det(B)=a\cdot d-c\cdot b \qquad \det(B)=3\cdot 5- \quad 7\cdot 4=-13$$

El determinante como un número real asociado a una matriz cumple las siguientes propiedades:

1. Si una matriz A tiene una fila o columna cuyos elementos son todos "0" entonces el det(A) = 0

$$Si: \quad A=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \qquad \det(A)=0 \quad \det(B)=0$$

2. Si una matriz A tiene dos filas iguales, det(A) = 0

$$Si: \quad A=\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} -5 & 11 \\ -5 & 11 \end{bmatrix} \qquad \det(A)=0 \quad \det(B)=0$$

3. Si A es una matriz cuadrada, $\det(A^t) = \det(A)$

$$Si: \quad A=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 4 & 5\end{bmatrix} \qquad A^t=\begin{bmatrix}2 & 4\\ -3 & 5\end{bmatrix} \qquad \det(A^t)=\det(A)$$

4. Si A es una matriz triangular, $\det(A) = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}\cdot \ldots \cdot a_{nn}$

$$Si: \quad A=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 0 & 5\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 4 & 0\\ 3 & 5 & 6\end{bmatrix} \qquad \begin{matrix}\det(A)=2\cdot 5=10\\ \det(B)=1\cdot 4\cdot 6=24\end{matrix}$$

5. Si una matriz B es el resultado de sumarle a una fila de la matriz A un múltiplo de otra fila, det(A) = det(B)

$$Si: \quad A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & 8\end{bmatrix} \quad F2=F2-2F1 \qquad \begin{matrix}\det(B)=\det(A)\\ 8-(-2)=4-(-6)\\ 10=10\end{matrix}$$

6. Si B es el resultado de intercambiar dos filas en una matriz A, det(A) = – det(B)

$$Si: \quad A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 1 & -2\end{bmatrix} \quad \begin{matrix}F1=F2\\ F2=F1\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\det(A)=-\det(B)\\ 4-(-6)=-(-6-4)\\ 10=-(-10)=10\end{matrix}$$

7. Si una matriz B es el resultado de multiplicar una fila de la matriz A por un escalar k entonces det(B) = k·det(A)

$$Si: \quad A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 9 & 12\end{bmatrix} \quad F2=3\cdot F2 \qquad \begin{matrix}\det(B)=3\cdot\det(A)\\ 12-(-18)=3\cdot[4-(-6)]\\ 30=3\cdot 10=30\end{matrix}$$

- Si A y B son matrices de igual tamaño, det(A·B) = det(A)·det(B)
- det(A + B) ≠ det(A) + det(B)
- $\det(A^{-1})=\dfrac{1}{\det(A)}$

  Nota: Si la matriz A es inversible □ det(A) ≠ 0

Métodos de evaluación de determinantes de orden "n".

- **Por reducción (con operaciones elementales entre filas).**

Este método consiste en transformar la matriz en una matriz triangular realizando operaciones en las filas y teniendo en cuenta las propiedades de los determinantes se obtiene el determinante a partir de determinante de la matriz resultante.

$$Ej. \qquad Se\ transforma\ de\ A \Rightarrow B$$

$$Sea \quad A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & -1 & 6 \\ -2 & 4 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -7 & -4 \\ 0 & 7 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad B=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -7 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$F2 = F2 - 2F1 \qquad F3 = F3 + F2$$

$$F3 = F3 + F1$$

Como las operaciones realizadas no afectan, det(A) = det(B) =2·(-7)·(-2) = 28

$Ej:$

$$Sea \quad A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 4 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \det\begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 4 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & 7 \end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & -\frac{11}{4} & \frac{34}{4} \end{bmatrix} = -\frac{1}{4}\det\begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & -11 & 34 \end{bmatrix} = -\frac{1}{4}\det\begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

$$F1 = F2;\ F2 = F1 \qquad F3 = 4F3 \qquad F3 = F3 - 11F2$$

$$F3 = F3 - \frac{3}{4}F2 \qquad \left(\frac{1}{4}\right) se\ multiplica$$

$$(-)\ se\ entercambian\ filas \qquad una\ fila\ por\ 4$$

$$\det A = -\frac{1}{4}\left[4\cdot(-1)\cdot(-10)\right] = -\frac{1}{4}(40) = -10$$

$$\boxed{\det A = -10}$$

De una forma sencilla se puede simplificar este método mediante el uso de de la siguiente expresión:

$$\det(A) = \frac{(-1)^n \cdot \det(T)}{k} \quad Donde:$$

$\det(T)$ es el det de la matríz triangular obtenida
"n" es en número de veces que se intercambian filas
"k" es el producto de todos los escalares multiplicados

- **Por desarrollo de cofactores en filas o columnas (regla de Cramer).**

Para explicar este método es necesario primero que es un ***menor*** y que es un ***cofactor*** o complemento.

Si $A=[a_{ij}]_{nxn}$ y $M=[m_{ij}]_{(n-1)x(n-1)}$ es la matriz obtenida de suprimir de A la i-ésima fila y la j-ésima columna, al detM se le conoce como ***menor*** del elemento a_{ij} de A y al escalar $c_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det M$ se le denomina ***cofactor.***

$$Sea: \quad A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$c_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad c_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad c_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad \cdots$$

El determinante de una matriz de orden n es la suma de los productos de los elementos de una fila o columna por su correspondiente cofactor.

Desarrollando en la fila 1

$\det A = a_{11} \cdot c_{11} + a_{12} \cdot c_{12} + a_{13} \cdot c_{13}$

$Ej:$

$$Sea: \quad A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$c_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} \qquad c_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} \qquad c_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$c_{11}=1\cdot(5\cdot 8-4\cdot 6)=16 \qquad c_{12}=-1(2\cdot 8-1\cdot 6)=-10 \qquad c_{13}=1\cdot(2\cdot 4-1\cdot 5)=3$$

$$\det A=3\cdot 16+1\cdot(-10)+(-4)\cdot 3$$

$$\det A=48-10-12$$

$$\det A=26$$

Inversa de una matriz usando determinante:

Dada una matriz cuadrada A, se llama matriz ***adjunta*** de A, y se representa por adjA, a la matriz a la matriz que se obtiene de reemplazar cada elemento de A por su correspondiente cofactor. Luego la inversa de A se puede calcular por la siguiente formula:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (adjA)^t$$

Ej :

$$Sea \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\det A = 4 \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + (-2) \cdot (-1) \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4(9+1) + 2(-2+9) = -40 + 14$$

$$\det A = -26$$

$$adjA = \begin{bmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 6 & -4 \\ -10 & -9 & -7 \\ 6 & 8 & 12 \end{bmatrix} \quad (adjA)^t = \begin{bmatrix} -2 & -10 & 6 \\ 6 & -9 & 8 \\ -4 & -7 & 12 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-26} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -10 & 6 \\ 6 & -9 & 8 \\ -4 & -7 & 12 \end{bmatrix}$$

TAMA 3: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

Ecuación lineal: Lineal es una igualdad donde hay una o mas incógnitas o cantidades desconocidas.
Resolver una ecuación consiste en encontrar el valor o los valores de las incógnitas para los cuales se cumple la igualdad.

Cuando una ecuación lineal tiene una sola incógnita entonces tiene una sola solución y se resuelve despejando la incógnita o variable.

Cuando una ecuación lineal tiene mas de una incógnita entonces tiene muchas soluciones (infinitas en la mayoría de los casos) porque al despejar la una variable esta queda en función de la otra. Para resolverla es necesario asignar el valor de un parámetro a una variable, luego las demás variables quedan en función del parámetro asignado.

$$2x + 3y = 12 \quad \Rightarrow \quad despejando \ \ y: \quad \Rightarrow \quad y = \frac{12 - 2x}{3}$$

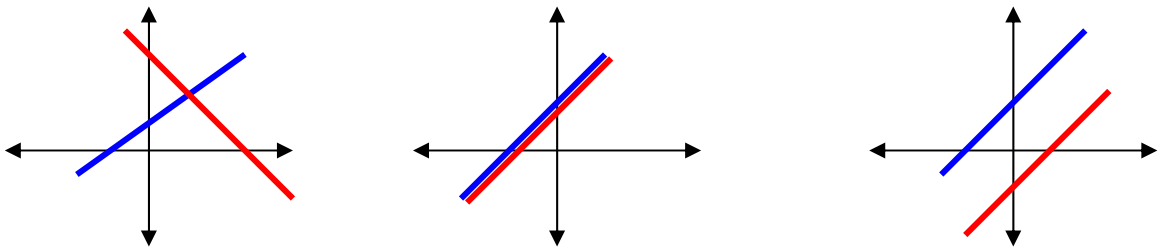
$$Si \ \ asignamos \ \ el \ \ valor "t" \ a \ x: \ \ la \ \ solución \ será: \ \ x = t; \quad y = \frac{12 - 2t}{3}$$

Sistemas de ecuaciones lineales: Se le llama así cuando si tienen mas de una ecuación con mas de una incógnita, en este caso se pueden dar tres posibles soluciones:

a) Que el sistema tenga una sola solución (***compatible y determinado***)
b) Que el sistema tenga mas de una solución (***compatible indeterminado***)
c) Que el sistema no tenga solución (***incompatible***)

Como una ecuación lineal representa una línea recta, las soluciones pueden interpretarse de la siguiente manera:

a) ***Compatible y determinado*** (rectas que se cortan)
b) ***Compatible indeterminado*** (rectas equivalentes o coincidentes)
c) ***Incompatible*** (rectas paralelas)



a) **b)** **c)**

Existen varios métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales de 2 o 3 ecuaciones con 2 o 3 incógnitas. En este curso no se trabajaran los ya aprendidos en materias anteriores a excepción del método de Cramer el cual se extenderá a sistemas de n-ecuaciones con n-incógnitas.
En forma general un Sistema de ecuaciones lineales (SEL) de m-ecuaciones con n-incógnitas se puede escribir:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

A los términos a_{11}, a_{12}, ... a_{1n}, a_{22}, ... (en general a_{ij}) se les llama *coeficientes* y a los términos b_1, b_2, ... b_m se les llama *términos independientes*.

Como en este curso se estudiará el uso de las matrices y determinantes para resolver SEL, veamos a continuación con un ejemplo dos formas de escribir un SEL con representación matricial.

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 8$$
$$-x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1$$
$$3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 11$$

Notación de matriz ampliada

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & 11 \end{array}\right]$$

Notación $A \bullet X = B$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 3 & -7 & 4 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Métodos de solución:

1. **Método de Gauss.**

El método de Gauss consiste en convertir la matriz ampliada del sistema de ecuaciones en otra escalonada (convertir en triangular la parte de los coeficientes de la matriz).

$x_1 - x_2 - x_4 = 3$

$2x_2 + x_3 + 4x_4 = -2$

$2x_1 - x_4 = 3$

$x_1 + x_2 + x_3 = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{transformaciones} \\ \text{elementales} \\ \text{en las filas} \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

sustituyendo y despejando $\Rightarrow \quad x_4 = \frac{1}{3}; \quad x_3 = 0; \quad x_2 = -\frac{5}{3}; \quad x_1 = \frac{5}{3}$

2. Método de Gauss -Jordán.

El método de Gauss-Jordán consiste en convertir la matriz ampliada del sistema de ecuaciones en una matriz escalonada y reducida (convertir en identidad la parte de los coeficientes de la matriz).

$x_1 + x_2 + 2x_3 = 9$

$2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1$

$3x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \textit{transformaciones} \\ \textit{en las} \\ \textit{filas} \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad S = \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

3. Método de Cramer.

El método estudiado en cursos anteriores es aplicable a SEL de n-ecuaciones con n-incógnitas.

4. Método de la inversa.

Consiste en escribir el SEL de la forma $\boldsymbol{A \cdot X = B}$ y luego resolver $\boldsymbol{X = A^{-1} \cdot B}$ aplicando la multiplicación de matrices.

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4$$
$$3x_1 + 4x_2 - x_3 = 2$$
$$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} \textit{se calcula la inversa} \\ \textit{de la matriz de los} \\ \textit{coeficientes} \end{matrix} \qquad \Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{-10}\begin{bmatrix} 13 & -1 & -10 \\ -14 & -2 & 10 \\ -17 & -1 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{-10}\begin{bmatrix} 13 & -1 & -10 \\ -14 & -2 & 10 \\ -17 & -1 & 10 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = -6 \\ x_2 = 7 \\ x_3 = 8 \end{cases} \quad o \quad S = (-6; 7; 8)$$

Sistemas homogéneos de ecuaciones lineales:

Cuando en un SEL todos los términos independientes son "0" se dice que el sistema es homogéneo y puede tener:

a) Una única solución que es S = (0; 0; ... ;0) (Solución ***trivial***)
b) Infinitas soluciones ***no triviales*** además de la Solución ***trivial.***

Por lo general se resuelven por **Gauss –Jordán.**

TEMA 2: ESPACIOS VECTORIALES

VECTORES:

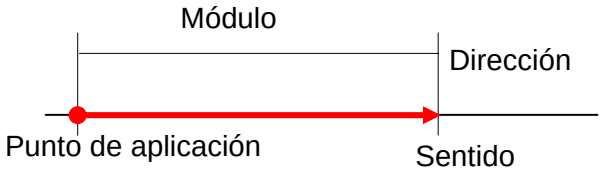
Llamamos ***magnitud física*** a aquella propiedad de un cuerpo que puede ser medida. La *masa*, la *longitud*, la *velocidad* o la *temperatura* son todas magnitudes físicas. El *aroma* o la *simpatía*, puesto que no pueden medirse, no son magnitudes físicas.

Para muchas magnitudes físicas basta con indicar su valor para que estén perfectamente definidas. Así, por ejemplo, si decimos que José Antonio tiene una temperatura de 38 ºC, sabemos perfectamente que tiene fiebre y si Rosa mide 165 cm de altura y su masa es de

35 kg, está claro que es sumamente delgada. Cuando una magnitud queda definida por su valor recibe el nombre de ***magnitud escalar***.

Otras magnitudes, con su valor numérico, no nos suministran toda la información. Si nos dicen que Pedrol corría a 20 km/h apenas sabemos algo más que al principio. Deberían informarnos también desde dónde corría y hacia qué lugar se dirigía.

Estas magnitudes que, además de su valor precisan una dirección se llaman ***magnitudes vectoriales***, y se representan mediante **vectores**. En este tema estudiaremos los vectores y sus propiedades.



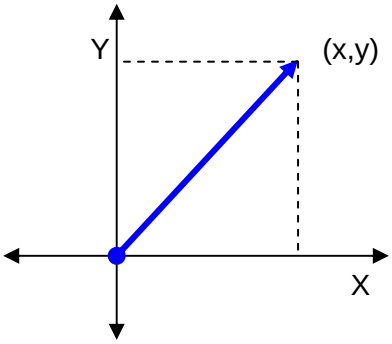
Podemos considerar un vector como un segmento de recta con una flecha en uno de sus extremos. De esta forma lo podemos distinguir por cuatro partes fundamentales: *punto de aplicación, módulo (norma o intensidad), dirección y sentido*. Si dos vectores se diferencian en cualquiera de los tres últimos elementos, (intensidad, dirección o sentido), los consideraremos distintos.

mientras que si sólo se diferencian en el punto de aplicación los consideraremos iguales.

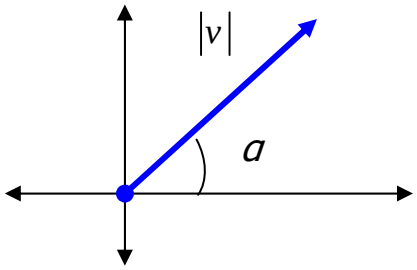
Siempre es posible dibujar dos vectores con la misma dirección pero sentido opuesto. Si además tienen la misma intensidad decimos que son vectores opuestos, ya que se anularían uno a otro.

Ya sabemos como podemos representar las magnitudes vectoriales. Pero si deseamos poder trabajar con vectores, no podemos conformarnos con una representación gráfica de ellos, necesitamos poder expresarlos de forma numérica, tanto para poder operar más cómodamente como para poder estudiarlos mejor.

Cualquier vector puede dibujarse en un plano, si lo colocáramos de tal forma que su punto de aplicación coincida con el origen de coordenadas, el extremo del vector, coincidirá entonces con un punto del plano, el punto **(x, y)**.



Cualquier punto **(x, y)** determina el vector que empieza en el origen de coordenadas y termina en él propio punto. ***Analíticamente***, representaremos el vector por el punto que determina su final. A las coordenadas del vector las denominaremos ***componentes,*** y todo vector estará así definido por dos *componentes*, una **x** y otra **y**, que serán las ***componentes cartesianas*** del vector.



Además de por sus coordenadas cartesianas, existe otra forma de determinar numéricamente un vector: indicando su intensidad y el ángulo que forma con el eje de abscisas. Éstas (módulo y ángulo) son las ***coordenadas polares*** de un vector. En muchas ocasiones, es más conveniente trabajar con coordenadas polares que con coordenadas cartesianas.

Conocidas las coordenadas polares de un vector, determinar sus coordenadas cartesianas es inmediato aplicando la trigonometría.

$$x = |v| \cdot \cos\alpha; \qquad y = |v| \cdot sen\alpha$$

La determinación de las coordenadas polares del vector a partir de sus coordenadas cartesianas es también inmediata por trigonometría.

$$|v| = \sqrt{x^2 + y^2}\ ; \qquad \alpha = tag^{-1}\frac{y}{x}$$

VEVTORES Y MATRICES:

Un vector puede ser representado como una matriz fila o una matriz columna, así de igual manera las filas y columnas de una matriz pueden ser consideradas como vectores.

Operaciones con vectores:

Suma: La adición de vectores *suma vectores* y *produce* como resultado *un vector*. Esta operación se puede realizar, tanto gráficamente (como se ha estudiado en cursos anteriores) como analíticamente.

Nota: Es objetivo de este curso trabajar mas de esta última forma.

Para sumar dos o mas vectores en forma analítica es necesario primero expresarlos en coordenadas cartesianas y luego se suman como ***matrices filas*** (componente a componente). Solo se pueden sumar vectores de igual tamaño.

Ejemplo: Sean los vectores:

$v = (5,\ 3)\ ; \qquad u = (-2,\ 7)\ ; \qquad r : |r| = 12\ y\ \alpha = 35^0\ ; \qquad t : |t| = 7\ y\ \alpha = 60^0$

$v + u = [5 + (-2);\ 3 + 7]$

$v + u = (3;\ 10)$

$x_r = |r| \cdot \cos\ \alpha \Rightarrow x_r = 12 \cdot \cos\ 35^0 = 9{,}83$

$y_r = |r| \cdot sen\ \alpha \Rightarrow y_r = 12 \cdot sen\ 35^0 = 6{,}88 \qquad \Rightarrow \qquad r = (9{,}83;\ 6{,}88)$

$x_t = |t| \cdot \cos\ \alpha \Rightarrow x_t = 7 \cdot \cos\ 60^0 = 3{,}5$

$y_t = |t| \cdot sen\ \alpha \Rightarrow y_t = 7 \cdot sen\ 60^0 = 6{,}06 \qquad \Rightarrow \qquad t = (3{,}5;\ 6{,}06)$

$r + t = (\ 9{,}83 + 3{,}5;\ 6{,}88 + 6{,}06\ )$

$r + t = (13{,}33;\ 12{,}94)$

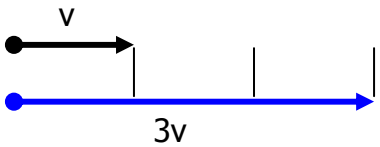
Como toda operación, la adición de vectores tiene unas propiedades que nos facilitan su realización:

Propiedad conmutativa	**v + w = w + v**
Propiedad asociativa	**(v + w) + u = w + (v + u)**
Elemento neutro	**v + 0 = v**
Elemento opuesto	**v + (-v) = 0**

Multiplicación por un escalar: Un vector puede ser multiplicado por un escalar y en ese caso cada componente del vector queda multiplicada por el escalar.

Sea: v = (3; 11)
5•v = (5•3; 5•11)
5v =(15; 55)

Gráficamente significa multiplicar el modulo del vector:



La multiplicación por un escalar también cumple ciertas propiedades:
Sean **U; V; W** vectores y **k; l** escalares:

Asociativa	**K•(l•U) = (k•l)•U**
Distributiva	**k•(U + V) = k•U +K•V**
	(k + l)•V = k•V + l•V
Elemento neutro	**1•W = W**

ESPACIOS VECTORIALES

Estamos acostumbrados a representar un punto en la recta como un número real; un punto en el plano como un par ordenado y un punto en el espacio tridimensional como una terna o trío ordenado. Pero si reconocemos un conjunto de números ordenados (a_1; a_2; a_3; a_4) como un punto en el espacio tetradimencional, aun cuando esta idea no se pueda concebir geométricamente mas allá del espacio tridimensional, es posible entenderlo considerando las propiedades analíticas de lo números en lugar de las propiedades geométricas.

Un ***espacio vectorial*** no es mas que un conjunto no vacío de n-vectores ordenados que cumple con las propiedades de ***cierre*** y las antes mencionadas para la ***suma*** y ***la multiplicación por un escalar***. Se denota por R^n y se clasifican así:

R^1 = espacio unidimensional, línea recta real.
R^2 = espacio bidimensional, pares ordenados.
R^3 = espacio tridimensional, terna ordenadas.
R^n = espacio n-dimencional, n-adas ordenadas.

Propiedad de cierre: Define que al operar dos elementos de un conjunto el resultado debe pertenecer al conjunto asignado en la operación.

Sean **U; V; W** vectores que pertenecen a R^n y **k; l** escalares:

Propiedad de cierre para la suma **$V + W \in R^n$**

Propiedad conmutativa	**v + w = w + v**
Propiedad asociativa	**(v + w) + u = w + (v + u)**
Elemento neutro	**v + 0 = v**
Elemento opuesto	**v + (-v) = 0**

Propiedad de cierre para la multiplicación por un escalar **$k \cdot W \in R^n$**

Asociativa	**$K \cdot (l \cdot U) = (k \cdot l) \cdot U$**
Distributiva	**$k \cdot (U + V) = k \cdot U + K \cdot V$**
	$(k + l) \cdot V = k \cdot V + l \cdot V$
Elemento neutro	**$1 \cdot W = W$**

Producto escalar: El producto escalar; (producto punto o producto interior euclidiano) es un tipo de multiplicación definida entre vectores que es muy útil para aplicaciones a problemas reales ya que asigna un valor real a una operación entre vectores y se define de la siguiente manera:

Ejemplo: Sean $v = (v_1; v_2)$; $u = (u_1; u_2)$ y Θ : Es el ángulo entre "v" y "u"

$$u \cdot v = |u| \cdot |v| \cdot \cos\theta$$

También se define en función de sus componentes cartesianas.

$$u \cdot v = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$$

Análogamente se extiende para el espacio vectorial $R^{n.}$

Sean $v = (v_1; v_2; \ldots ; v_n)$
$u = (u_1; u_2; \ldots ; u_n)$

$$u \cdot v = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \cdots u_n \cdot v_n$$

Propiedades del producto escalar.

Sean: "v" ; "u" y "w" vectores y k un número real:

v⋆u = u⋆v
kv⋆u = v⋆ku
v⋆(u + w) = v⋆u + v⋆w
v⋆v ≥ 0

Nota: Si dos vectores "u" y "w" son perpendiculares u⋆w = 0

Producto cruz de vectores: Es un tipo de multiplicación que se define para el espacio vectorial R^3 la cual es muy usada en la solución de problemas en los que es necesario definir un vector que sea perpendicular (ortogonal) a otros dos vectores.

Sean $v = (v_1; v_2; v_3)$ y $u = (u_1; u_2; u_3)$ vectores que pertenecen a R^3
El producto v x u es un vector que pertenecen a R^3 y es perpendicular a "v" y a "u", su sentido se puede determinar utilizando la regla de la mano derecha:

Se determina formando una matriz cuya primera fila son las componentes del primer vector y la segunda fila son las componentes del segundo vector, luego cada componente del vector resultante es el determinante de la matriz que se obtiene de suprimir en la matriz formada la columna correspondiente a la componente que se busca cambiándole el signo a la segunda componente:

$$\begin{matrix} v = (v_1 ; v_2 ; v_3) \\ u = (u_1 ; u_2 ; u_3) \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \quad v \times u = \left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ u_2 & u_3 \end{vmatrix} ; - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ u_1 & u_3 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} \right)$$

$Ej:$

$$\begin{matrix} v = (1, 2, -2) \\ u = (3, 0; 7) \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad v \times u = \left(\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} ; - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \right)$$

$$v \times u = (14 ; -13 ; -6)$$

Nota: Las componentes del producto u x v tienen los mismos valores pero con signos contrarios:

$$u \times v = (-14;\ 13;\ 6)$$

u y v son paralelos Si u x v = 0**.**
las propiedades del producto cruz:

u x v = – (v x u);	**u x (v + w) = (u x v) + u x w)**
u x u = 0;	**(u + v) x w = (u x w) + (v x w)**
u x 0 = 0 x u = 0;	**k (u x v) = k u x v = u x k v**

Algunas aplicaciones de vectores:

El **ángulo** θ que forman dos vectores se puede calcular combinando las formulas del producto escalar, por la siguiente expresión:

Ejemplo: Sean v = (v_1; v_2) y u = (u_1; u_2)

$$\theta = \cos^{-1} \frac{v_1 \cdot u_1 + v_2 \cdot u_2}{|v| \cdot |u|}$$

La **distancia entre dos puntos** se puede determinar utilizando la formula del modulo de un vector $|v| = \sqrt{x^2 + y^2}$ considerando el vector que une al punto $P_1(x_1; y_1; z_1)$ con el punto $P_2(x_2; y_2; z_2)$ como la diferencia entre los vectores $OP_2 - OP_1$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

El **área de un paralelogramo** cuyas aristas no paralelas sean consideradas como vectores en R^3 $v(v_1; v_2; v_3)$ y $u(u_1; u_2; u_3)$ puede ser calculada como el modulo del producto cruz entre ambos vectores y el **área de un triangulo** como la mitad.

$$A_P = |v \times u| \qquad A_T = \frac{1}{2}|v \times u|$$

Combinación Lineal: Se dice que un vector **"v"** es una combinación lineal de los vectores v_1, v_2, v_3, ..., v_n en un espacio vectorial R^n si existen números reales k_1, k_2, ... k_n tales que "v" pueda ser expresado como:

$$V = k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 + \ldots + k_nv_n$$

Para comprobar si el vector "x" es combinación lineal de v, u, w $\in R^3$:
Se plantea un sistema homogéneo de ecuaciones lineales para:

$k_1v + k_2u + k_3w = x$
$k_1(v_1; v_2; v_3) + k_2(u_1; u_2; u_3) + k3(w_1; w_2; w_3) = (x_1; x_2; x_3)$

$k_1 \cdot v_1 + k_2 \cdot u_1 + k_3 \cdot w_1 = x_1$
$k_1 \cdot v_2 + k_2 \cdot u_2 + k_3 \cdot w_2 = x_2$
$k_1 \cdot v_3 + k_2 \cdot u_3 + k_3 \cdot w_3 = x_3$

Si el sistema tiene solución el vector x es combinación lineal de v, u, w.

Dependencia e Independencia Lineal: Se dice que los vectores v_1, v_2, v_3, ..., v_n son ***linealmente dependientes*** si existen infinitas combinaciones lineales de estos vectores que den como resultado el vector 0.
Si la única combinación lineal que da este resultado es aquella en la que $k_1 = k_2 = ... = k_n$, entonces se dice que los vectores son ***linealmente independientes.***

$$\boldsymbol{0 = k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 + ... + k_nv_n}$$

Ejemplo: Para comprobar la dependencia Lineal entre los vectores v, u, w $\in R^3$:
Se plantea un sistema homogéneo de ecuaciones lineales para:

$k_1v + k_2u + k_3w = 0$
$k_1(v_1; v_2; v_3) + k_2(u_1; u_2; u_3) + k3(w_1; w_2; w_3) = (0; 0; 0)$

$k_1 \cdot v_1 + k_2 \cdot u_1 + k_3 \cdot w_1 = 0$
$k_1 \cdot v_2 + k_2 \cdot u_2 + k_3 \cdot w_2 = 0$
$k_1 \cdot v_3 + k_2 \cdot u_3 + k_3 \cdot w_3 = 0$

Si este sistema solo tiene la solución trivial los vectores son *linealmente independientes.*
Si tiene infinitas soluciones entonces son *linealmente dependientes.*

Espacio vectorial generado: Se dice que los vectores v_1, v_2, v_3, ..., v_n generan un espacio vectorial V si cualquier vector "b" de dicho espacio se puede escribir como combinación de los vectores dados.

$$\boldsymbol{b = k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 + ... + k_nv_n}$$

Base y Dimensión de un espacio vectorial: Un sistema de vectores libre, que permite generar todos los vectores de su espacio vectorial es una *base*.
Todo espacio vectorial tiene al menos una base.
El número de elementos de una base de un sistema de vectores se llama *dimensión* del espacio vectorial.

Por ejemplo: Los vectores (0,0,1), (0,1,0) y (1,0,0) son la base que se utiliza normalmente en un espacio de tres dimensiones.

TRANSFORMACIONES LINEALES

La transformada lineal es una función vectorial de variable vectorial ***w = f (v).***
Donde: → El espacio vectorial "v" es la variable independiente
→ El espacio vectorial "w" es la variable dependiente

Si V y W son espacios vectoriales y F es una función que asocia un vector único en W para cada vector de V, se dice entonces que F aplica V en W y se escribe:
F: V → W
Además si se escribe ***w = f (v)*** se dice que w es la imagen de v bajo f.

Definición. La definición de transformación lineal dice que todo espacio vectorial en V y W se puede hacer transformación lineal si cumplen con los axiomas de la distribución bajo la suma ***T(u + v) = T(u) + T(v)*** y la multiplicación por un escalar ***T(k•u)= k•T(u)***. Cumpliendo con lo anterior la transformada lineal tiene sus propiedades que son:

1) $T(0) = 0$
2) $T(-v) = -T(v)$
3) $T(v-u) = T(v)-T(u)$

Sí $v = c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_nv_n$ entonces $v = c_1 T(v_1)+ c_2 T(v_2)+ ... + c_n T(v_n)$.

Ejemplo: Sea la función *f(v) = (x; x+y; x-y)* una función F: $R^2 \rightarrow R^3$
Para *u = (x, y)* y *v = (x'; y')* → u + v = (x + x'; y + y')
→ ku = (kx; ky)
Si se prueba:
F(u + v) = [x + x'; (x + x') + (y + y'); (x + x') – (y + y')]
= [x + x'; x + x' + y + y'; x + x' – y – y']
= [x; x + y; x – y] + [x'; x' + y'; x'– y']

F(u + v) = F(u) + F(v)
F(ku) = (kx; kx + ky; kx – ky)
= [kx; k(x + y); k(x – y)]
= k(x; x + y; x – y)
F(ku) = kF(u)
Entonces F: $R^2 \rightarrow R^3$ es una transformación lineal.

Ejemplo: Dados las transformaciones para los puntos (2,-1); (-1,1) y conociendo que la función es transformación lineal, encuentre la expresión de la función.

F(2,-1) = (-1, 1, 2)
F(-1,1) = (2, 0, 1)

Como se sabe que la función es transformación lineal entonces los vectores (2,-1) y (-1,1) forman una base de R^2 y por lo tanto generan al espacio, luego:

$(x, y) = k_1 (2,-1) + k_2 (-1,1)$
$(x, y) =(2k_1 - k_1) + (- k_2, k_2)$
$(x, y) =(2k_1 - k_2 , - k_1 + k_2)$ *de donde se obtiene:*

$x = 2k_1 - k_2$
$y = - k_1 + k_2$ *resolviendo el sistema de ecuaciones para* K_1 *y* k_2*:*

$k_1 = x + y$
$k_2 = x + 2y$ *planteando la transformación para el vector general:*

$F(x, y) = F[k_1 (2,-1) + k_2 (-1,1)]$
$F(x, y) = F[k_1 (2,-1)] + F[k_2 (-1,1)]$
$F(x, y) = k_1 F(2,-1) + k_2 F(-1,1)$ *sustituyendo* K_1 *y* k_2 *por sus valores y remplazando* $F(2,-1)$ *y* $F(-1,1)$*:*

$F(x, y) = (x +y)(-1, 1, 2) + (x +2y)(2, 0, 1)$
$F(x, y) = (-x -y ,x +y , 2x +2y) + (2x +4y, 0 , x +2y)$
$F(x, y) = (-x -y +2x +4y , x + y , 2x +2y +x +2y)$
$\mathbf{F(x, y) = (x +3y , x +y , 3x +4y)}$ *comprobando:*

$F(2,-1) = (-1, 1, 2)$
$F(-1,1) = (2, 0, 1)$ *se verifica la función:*

PRACTICO # 1 (OPERACIONES CON MATRICES)

1. Considerando las siguientes matrices:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 0\\ -1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}4 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\ 3 & 1 & 5\end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix}1 & 5 & 2\\ -1 & 0 & 1\\ 3 & 2 & 4\end{bmatrix} \qquad E=\begin{bmatrix}6 & 1 & 3\\ -1 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 3\end{bmatrix} \qquad F=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & 5\\ 4 & -3 & 0 & 7\end{bmatrix}$$

$$G=\left[g_{ij}\right]_{4x3} / \quad g_{ij}=i\cdot j \qquad H=\left[h_{ij}\right]_{2x3} / \quad h_{ij}=i^{\,j}$$

Determine cuando sea posible y justifique su respuesta cuando no lo sea.

a) 3C – D
b) (3E)D
c) (AB)C
d) A(BC)
e) (4B)C + 2B
f) $D + E^2$
g) $GH^T - 2F^T$
h) $(3H + {}^1/_2C) - BA^T$

2. Dadas las matrices, Que valor debe tomar "x" para que el elemento $a.b_{32} = 14$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 7 & -5 & 11 & 3\\ -9 & X & -6 & -23\\ 0 & -4 & 5 & 8\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}2 & 10 & 11 & 0 & -5\\ 7 & 11 & 20 & -1 & 35\\ -5 & X & 17 & 13 & 3\\ 4 & -3 & 2 & 2 & -9\end{bmatrix}$$

PRACTICO # 2 (INVERSAS)

Encuentre la inversa de las siguientes matrices: (A, B, E, F) por el método de Gauss-Jordan y las demás por el método de los cofactores.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 5 & -3\end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix} \qquad D=\begin{bmatrix}5 & 8\\ -7 & 11\end{bmatrix}$$

$$E=\begin{bmatrix}0 & -2 & -3\\ 1 & 3 & 3\\ -1 & -2 & -2\end{bmatrix} \quad F=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 3\\ 1 & 0 & 8\end{bmatrix} \quad G=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 4\\ 0 & 2 & 2\end{bmatrix} \quad H=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 3 & -2 & 0\\ 5 & -\frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}$$

PRACTICO # 3 (DETERMINANTES)

1. Calcule (por simple inspección) el determinante de las siguientes matrices:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 0\\ 3 & 11 & 0\\ -2 & 5 & 0\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}-4 & 23 & 13 & 4\\ 5 & -12 & 7 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -12 & 6 & -17 & 3\end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 41 & 11 & 21\\ -3 & -9 & -15\end{bmatrix} \quad D=\begin{bmatrix}4 & 21 & -7 & -1\\ 0 & 3 & -1 & 4\\ 0 & 0 & -2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

2. Calcule el determinante de las siguientes matrices:

$$A=\begin{bmatrix}4 & -5 & -1\\ 0 & 3 & 2\\ -2 & 1 & 3\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}0 & 0 & 2 & -3\\ -3 & 20 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 5 & -1 & 2\end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix}-3 & 1 & 2\\ 6 & 2 & 1\\ -9 & 1 & 2\end{bmatrix} \quad D=\begin{bmatrix}2 & -3 & 4 & -1\\ 4 & -6 & 8 & 2\\ -5 & 7 & -3 & 0\\ 0 & 4 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

3. Dadas la siguientes matrices, evalué las expresiones indicadas teniendo en cuenta las propiedades de los determinantes:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 6 & -3\end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 4\end{bmatrix} \qquad D=\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}$$

$$E=\begin{bmatrix}1 & -2 & -3\\ 0 & 3 & 3\\ -1 & 2 & -2\end{bmatrix} \quad F=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 4 & 8 & 12\end{bmatrix} \quad G=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 2\end{bmatrix} \quad H=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ -2 & 3 & 2\\ -3 & 3 & -2\end{bmatrix}$$

$a)\quad Y=\left(\det A\right)^2-3\det B+\det E$

$b)\quad Y=5\left(\det H\right)^3-5(\det E)^3$

$c)\quad Y=\det C\cdot D-\left(\det C\cdot\det D\right)+\det F$

$d)\quad Y=\det F+\det F^t$

$e)\quad Y=\left(\det F+\det B\right)-\det(F+B)$

4. Determine los valores de x en las siguientes matrices para su determinante sea "cero":

$$A=\begin{bmatrix}2+x & 2x-1\\ 4 & 3\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}2x-3 & 0\\ 1 & x+1\end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -11 & 9\\ 0 & x-3 & -17\\ 0 & 0 & 2x\end{bmatrix} \quad D=\begin{bmatrix}2x & -3\\ -3 & 2x\end{bmatrix}$$

5. Sabiendo que det (A) = 4 y det (C) = –3. Aplique las propiedades correspondientes y calcule los determinantes de las matrices "B" y "D". Justifique su respuesta.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 2 & 3 & 4\end{bmatrix}\ B=\begin{bmatrix}8 & 16 & 24\\ 0 & -1 & 2\\ 2 & 3 & 4\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix}\quad D=\begin{bmatrix}a & b & c\\ d-3a & e-3b & f-3c\\ -2g & -2h & -2i\end{bmatrix}$$

PRACTICO # 4 (SISTEMAS DE ECUACIONES)

1. Considere que siguientes matrices representan sistemas de ecuaciones y resuélvalos.

$$a)\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 5\end{bmatrix}\qquad b)\begin{bmatrix}1 & -5 & 7 & -2 & 1/2\\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2\end{bmatrix}\qquad c)\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -4 & 8\\ 0 & 0 & 1 & 5 & 9\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\qquad d)\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2\end{bmatrix}$$

2. Resuelve los siguientes sistemas por el método Gauss.

$$a)\begin{cases}x+y-z=0\\ x-y-2z=1\\ x-2y-3z=0\end{cases}\qquad b)\begin{cases}2x_1+5x_2+3x_3=28\\ 3x_1+2x_2+4x_3=35\\ x_1+7x_2+5x_3=29\end{cases}$$

3. Resuelve los siguientes sistemas por el método Gauss – Jordán.

$$a)\begin{cases}x_1+x_2+2x_3=8\\ -x_1-2x_2+3x_3=1\\ 3x_1-7x_2+4x_3=11\end{cases}\qquad b)\begin{cases}x_1-x_2+2x_3-2x_4=11\\ 2x_1-x_2-2x_3-2x_4=-2\\ -3x_1-7x_2+4x_4=8\end{cases}$$

$$c)\begin{cases}x_1-3x_2+2x_3=0\\ -x_1+7x_2+0x_3=0\\ -x_1-2x_2+3x_3=0\end{cases}\qquad d)\begin{cases}x_1-x_2+2x_3-2x_4=0\\ 3x_1-7x_2+4x_4=0\end{cases}$$

4. Resuelve los siguientes S. E. L. Por la formula $X = A^{-1} . B$

$$a)\begin{cases}I_1+3I_2=23\\ I_1-I_2-I_3=0\\ 2I_2-3I_3=-9\end{cases}\qquad b)\begin{cases}2x_1+5x_2+3x_3=28\\ 3x_1+2x_2+4x_3=35\\ x_1+7x_2+5x_3=29\end{cases}$$

5. En el siguiente sistema de ecuaciones, que valores puede "**λ**" para que el sistema tenga infinitas soluciones.

$$\begin{aligned}2x-(\lambda+7)y&=0\\ (\lambda-3)x+8y&=0\end{aligned}$$

PRACTICO # 5 (APLICACIONES DE VECTORES)

1. ¿Es posible que dos vectores tengan la misma dirección, punto de aplicación e intensidad y que sean distintos?

2. ¿Cuál de los siguientes vectores tiene mayor modulo? (3,0);(2,1);(2.5,2).

3. Expresa en coordenadas cartesianas los vectores 2 y 30º; 2 y 60ª; 2 y 135º; 5 y 30º; 2 y 270º.

4. Expresa en coordenadas polares los vectores(2,1); (-2,1); (2,-1) y (-2,-1).

5. Con los vectores v(1,2);w(2,-1) y u(-1,1) realiza las sumas:
   a) u + v + w b) v + u + w c) u – v d) v - u e) u - w

6. Dados los vectores v(1,2) y w(-2,1), ¿qué vector deberé sumar a v + w para obtener el vector (0,0)?

7. Dados v(1y 45º) y w(2 y 180º) ¿Calcule su producto escalar?

8. Con los vectores v(1,2);w(2,-1) y u(-1,1) realiza:
   a) u . w b) v . w c) u . v d) v . u

9. ¿Qué ángulo forman los vectores u y v ; u y w ; v y w del ejercicio anterior?

10. Calcule el producto escalar entre:

    a) u = (3,4,2) y v = (2,1,5)
    b) u = (5,-2,1) y v = (0,-1,3)
    c) u = (30,1,1) y v = (2,2,2)
    d) u = (1,1,1) y v = (2,2,-2)
    e) u = (3,-4,1) y v = (2,3,6)
    f) u = (-3,7,-1) y v = (4,-3,-11)

11. Determine la distancia entre los puntos $P_1(1,2,3)$ y $P_2(-3,-2,-1)$

12. Determine el producto vectorial y el ángulo comprendido entre:

    a) u = (3,4,2) y v = (2,1,5)
    b) u = (5,-2,1) y v = (0,-1,3)
    c) u = (30,1,1) y v = (2,2,2)
    d) u = (1,1,1) y v = (2,2,-2)
    e) u = (3,-4,1) y v = (2,3,6)
    f) u = (-3,7,-1) y v = (4,-3,-11)

13. Determine el área del triangulo comprendido entre los puntos:

    a) $P_1(1,2,3)$; $P_2(-3,-2,-1)$ y $P_3(3,-3,0)$
    b) $P_1(5,0,0)$; $P_2(0,5,0)$ y $P_3(0,0,5)$
    c) $P_1(3,-2,12)$; $P_2(-4,-2,7)$ y $P_3(1,-3,0)$

PRACTICO # 6 (ESPACIOS VECTORIALES)

1. Determine cuales de los siguientes conjuntos son espacios vectoriales y para los que no lo son, enumere las propiedades que no cumple:

   a) El conjunto de pares (x ; y) con las operaciones
   (x ; y) + (x´ ; y´) = (x + x´ ; y + y´) y k (x ; y) = (kx +ky)
   b) El conjunto de pares (x ; y) con las operaciones
   (x ; y) + (x´ ; y´) = (x ▪ x´; y ▪ y´) y $kx = x^k$
   c) El conjunto de las matrices $M_{2\,2} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix}$

2. Determine cuales de los siguientes son sub-espacios de R^3

   a) Todos los vectores (a ; 0 ; 0)
   b) Todos los vectores (a ; b ; c) en donde b = a + c
   c) Todos los vectores (a ; b ; c) en donde b = a + c + 1

3. ¿Cuáles de los siguientes vectores son combinaciones lineales de :
   u = (1 ; -1 ; 3) y v = (2 ; 4 ; 0)

   a = (3 ; 3 ; 3) b = (4 ; 2 ; 8) c = (1 ; 5 ; 6) d = (0 ; 0 ; 0)

4. Exprese los siguientes vectores como combinaciones lineales de:
   u = (2 ; 1 ; 4) ; v = (1 ; -1 ; 3) y w = (3 ; 2 ; 5)

   a = (5 ; 9 ; 5) b = (2 ; 0 ; 6) c = (0 ; 0 ; 0) d = (2 ; 2 ; 3)

5. Determine en cada caso si los vectores dados forman una base de R^3

   a) v_1 = (1 ; 1 ; 1) ; v_2 = (2 ; 2 ; 0) y v_3 = (3 ; 0 ; 0)
   b) v_1 = (2 ; -1 ; 3) ; v_2 = (4 ; 1 ; 2) y v_3 = (8 ; -1 ; 8)

6. ¿Cuales de los siguientes conjuntos de vectores son linealmente dependientes y cuales linealmente independientes?

   a) u_1 = (1 ; 2) y u_2 = (-3 ; -6) en R^2
   b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$ en M_{22}
   c) (2 ; -1 ; 4) ; (3 ; 6 ; 2) y (2 ; 10 ; -4) en R^3
   d) $2 - x + 4x^2$; $3 + 6x + 2x^2$ y $2 + 10x - 4x^2$ en P^2 .

PRACTICO # 7 (TRANSFORMACIONES LINEALES)

1. Determine si las siguientes funciones son o no transformaciones lineales.

   a. F(x; y) = (x; y + 1)
   b. F(x; y) = (2x + y; x – y)
   c. F(x; y; z) = (x; x + y + z)
   d. $F(a + bx + cx^2) = (a +1) + (a + b)x + cx^2)$
   e. $F(x; y) = (2x; y^x)$
   f. $F\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a \cdot d - c \cdot b$

2. Dados las funciones $\boldsymbol{F: R^2 \rightarrow R^3}$ para los vectores indicados y conociendo que son transformaciones lineales, encuentre la expresión de cada función.

   a) F(1,2)=(2, 3, 1)
      F(-1,5)=(-2, 4, 6)

   b) F(3,4) = (7, 9, 1)
      F(2,5) = (7, 6, 3)

   c) F(3,2) = (4, 1, 5)
      F(5,4) = (6, 3, 9)