



ESTADÍSTICA

Descriptiva y Analítica

Enrique Alberto Hurtado Minotta

Estadística 1

CONTENIDO

MODULO 1

INTRODUCCIÓN A LA ESTADÍSTICA

- 1.1 IMPORTANCIA DE LA ESTADÍSTICA
- 1.2 HISTORIA DE LA ESTADÍSTICA
- 1.3 LA ESTADÍSTICA Y SUS METODOS
- 1.4 LA ESTADÍSTICA Y LA INFORMATICA
- 1.5 REFLEXION
- BIBLIOGRAFIA

MODULO II

DEFINICIONES Y CONCEPTOS BASICOS

- 2.1 ESTADISTICA
 - 2.1.1 ESTADISTICA DESCRIPTIVA
 - 2.1.2 ESTADISTICA ANALÍTICA
- 2.2 POBLACION
- 2.3 PARAMETRO
- 2.4 MUESTRA
- 2.5 ESTADISTICO
- 2.6 VARIABLES
 - 2.6.1 VARIABLE CUALITATIVA
 - 2.6.2 VARIABLE CUANTITATIVA
 - 2.6.2.1 VARIABLE CONTINUA
 - 2.6.2.2 VARIABLE DISCRETA
- 2.7 UNIDAD ELEMENTAL
- 2.8 DATO
- 2.9 EXPERIMENTO
- 2.10 ENCUESTA
 - 2.10.1 CENSO
 - 2.10.2 ENCUESTA MUESTRAL
- 2.11 RAZONES PARA HACER UN MUESTREO
- 2.12 TIPOS DE MUESTRAS
 - 2.12.1 MUESTRAS DE CONVENIENCIAS
 - 2.12.2 MUESTRAS DE JUICIOS
 - 2.12.3 MUESTRAS ALEATORIAS
 - 2.12.3.1 MUESTRA ALEATORIA SIMPLE
 - 2.12.3.2 MUESTRA ALEATORIA SISTEMATICA
 - 2.12.3.3 MUESTRA ALEATORIA ESTRATIFICADA
 - 2.12.3.4 MUESTRA ALEATORIA AGRUPADA
- 2.13 ERRORES EN ENCUESTAS
 - 2.13.1 ERROR ALEATORIO

- 2.13.2 ERROR SISTEMATICO
- 2.14 NIVELES DE MEDICION
 - 2.14.1 DATOS NOMINALES
 - 2.14.2 DATOS ORDINALES
 - 2.14.3 DATOS DE INTERVALOS
 - 2.14.4 DATOS DE PROPORCION
- 2.15 ESTAPAS BASICAS DE LA INVESTIGACIÓN ESTADÍSTICA
 - 2.15.1 OBJETIVO DE LA INVESTIGACIÓN
 - 2.15.2 UNIDAD DE LA INVESTIGACIÓN
 - 2.15.3 DETERMINACION DE LA POBLACIÓN Y DE LA MUESTRA
 - 2.15.4 RECOLECCION DE LA INFORMACIÓN
 - 2.15.5 PROCESAMIENTO DE LA INFORMACIÓN
 - 2.15.6 PUBLICACION
- BIBLIOGRAFIA

MODULO III

GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

- 3.1 GRÁFICOS
 - 3.11 GRÁFICOS DE LÍNEA
 - 3.12 GRÁFICOS DE BARRAS
 - 3.13 GRÁFICOS CIRCULARES
 - 3.14 HISTOGRAMAS DE FRECUENCIAS
 - 3.15 HISTOGRAMAS DE FRECUENCIAS ACUMULADAS
 - 3.16 POLIGONOS DE FRECUENCIAS
 - 3.17 OJIVAS
 - 3.18 PICTOGRAMAS
- TALLER MODULO III
- BIBLIOGRAFIA

MODULO IV

DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIA

- 4.1 FILA DE DATOS
- 4.2 ORDENACIONES
- 4.3 TABLA DE FRECUENCIA
- 4.4 INTERVALOS DE CLASE Y LIMITES DE CLASE
- 4.5 FRONTERAS DE CLASE O LIMITES REALES
- 4.6 TAMAÑO O ANCHURA DEL INTERVALO DE CLASE
- 4.7 MARCA DE CLASE
- 4.8 FRECUENCIA RELATIVA
- 4.9 HISTOGRAMA
- 4.10 POLIGONO DE FRECUENCIA
- 4.11 OJIVAS
- 4.12 DISTRIBUCION DE FRECUENCIAS RELATIVAS
- 4.13 OJIVAS EN PORCENTAJES
- 4.14 REGALS PARA CONSTRUIR UNA DISTRIBUCION DE FRECUENCIA
- 4.15 DIAGRAMA DE PARETO
- 4.16 DIAGRAMA DE TALLO Y HOJA
- TALLER DEL MODULO IV
- BIBLIOGRAFIA

MODULO V

MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

- 5.1 MEDIA ARITMÉTICA
- 5.2 MEDIA ARITMÉTICA PONDERADA
- 5.3 MEDIA ARITMÉTICA PARA DATOS AGRUPADOS
- 5.4 MEDIANA
- 5.5 MEDIANA PARA DATOS AGRUPADOS
- 5.6 MODA
- 5.7 MODA PARA DATOS AGRUPADOS
- 5.8 RELACIONES EMPÍRICAS ENTRE LA MEDIA LA MODA Y LA MEDIANA
- 5.9 COMPARACION ENTRE LA MEDIA, LA MEDIAN AY LA MODA
- 5.10 MEDIA GEOMÉTRICA
- 5.11 MEDIA ARMONICA
- 5.12 MEDIDAS DE POSICIONAMIENTO
- TALLER MODULO V
- BIBLIOGRAFIA

MODULO VI

MEDIDAS DE DISPERSIÓN

- 6.1 RANGO O RECORRIDO
- 6.2 RANGO INTERCUARTÍLICO
- 6.3 RANGO SEMICUARTIL
- 6.4 RANGO PERCENTIL 10-90
- 6.5 DESVIACIÓN MEDIA PARA DATOS SIN AGRUPAR
- 6.6 DESVIACIÓN MEDIA PARA DATOS AGRUPADOS
- 6.7 DESVIACIÓN TÍPICA
- 6.8 VARIANZA
- 6.9 PROPIEDADES DE LA DESVIACIÓN TÍPICA
- 6.9.1 TEOREMADE Chebyshev
- 6.9.2 PARA DISTRIBUCIONES NORMALES
- 6.9.3 SESGO ASIMETRÍA
- 6.9.4 PARA DISTRIBUCIONES POCOSESADA
- 6.9.5 PARA LA DEFINICION
- 6.9.6 COEFICIENTE DE VARIACIÓN
- 6.10 DIAGRAM DE CAJA
- TALLER MODULO VI
- BIBLIOGRAFIA

MODULO VII

TASAS Y NUMEROS INDICES

- 7.1 TASAS
- 7.1.1 TASA GLOBAL DE PARTICIPACIÓN
- 7.1.2 TASA BRUTA DE PARTICIPACIÓN
- 7.1.3 TASA DE DESEMPLEO
- 7.1.4 TASA DE OCUPACIÓN
- 7.1.5 TASA DE SUBEMPLEO

- 7.1.6 TASA DE DESERCIÓN ESCOLAR
- 7.1.7 TASA DE MORTALIDAD
- 7.1.8 TASA DE NATALIDAD
- 7.2 NUMEROS INDICES
 - 7.2.1 ÍNDICE SIMPLE
 - 7.2.2 ÍNDICE DE PRECIOS AGREGADOS
 - 7.2.3 ÍNDICE DE PRECIOS AGREGADOS PONDERADOS
 - 7.2.3.1 ÍNDICE DE Laspeyres
 - 7.2.3.2 ÍNDICE DE PAASCHE
 - 7.2.3.3 ÍNDICE IDEAL DE FISHER
- 7.3 CAMBIO DE LA BASE DE UN NUMERO ÍNDICE
- 7.4 OTROS INDICES
 - 7.4.1 ÍNDICE DEL PRECIO AL CONSUMIDOR
 - 7.4.2 ÍNDICE DOW JONES
- TALLER MODULO VII
- BIBLIOGRAFIA

MODULO VIII

REGRESIÓN LINEAL Y CORRELACIÓN

- 8.1 REGRESION LINEAL
- 8.2 DIGRAMA DE DISPERSIÓN
- 8.3 AJUSTE POR MINIMOS CUADRADOS
- 8.4 RECTA DE REGRESIÓN POR MINIMOS CUADRADOS
- 8.5 APLICACIONES A SERIES DE TIEMPO
- 8.6 ERROR TIPICO DE ESTIMACIÓN
- 8.7 VARIACION TOTAL
- 8.8 VARIACION NO EXPLICADA
- 8.9 VARIACION EXPLICADA
- 8.10 COEFICIENTE DE DETERMINACIÓN
- 8.11 COEFICIENTE DE CORRELACIÓN
- TALLER MODULO VIII
- BIBLIOGRAFIA

Estadística 2

MODULO I

ANALISIS COMBINATORIO

- 1.1 FACTORIAL DE UN NUMERO
- 1.2 PRINCIPIO FUNDAMENTAL
- 1.3 DIAGRAMA DE ARBOL
- 1.4 PERMUTACIONES
- 1.5 COMBINACIONES
- TALLER MODULO I
- BIBLIOGRAFIA

MODULO II

PROBABILIDADES

- 2.1 GENERALIDADES
- 2.2 ESPACIO MUESTRAL
- 2.3 AXIOMAS DE LA PROBABILIDAD
- 2.4 CALCULO DE LA PROBABILIDAD DE UN EVENTO
 - 2.4.1 ENFOQUE CLASICO
 - 2.4.2 ENFOQUE DE FRECUENCIA RELATIVA
 - 2.4.3 ENFOQUE SUBJETIVO
- 2.5 PROBABILIDAD DE APUESTAS CON VENTAJAS
- 2.6 LEYES DE LAS PROBABILIDADES
 - 2.6.1 REGLA DE LA SUMA
 - 2.6.2 REGLA DE LA MULTIPLICACION
- 2.7 PROBABILIDAD CONDICIONAL
- 2.8 ARBOL DE PROBABILIDADES
- 2.9 TEOREMA DE BAYES
- 2.10. PROCESOS ESTOCASTICOS
- TALLER MODULO II
- BIBLIOGRAFIA

MODULO III

DISTRIBUCIONES PROBABILISTICAS

- 3.1 INTRODUCCION
- 3.2 VARIABLES ALEATORIAS
- 3.3 ESPERANZA MATEMATICA
- 3.4 DISTRIBUCIONES PROBABILISTICAS
 - 3.4.1 DISTRIBUCION BINOMIAL
 - 3.4.1.1 TABLAS BINOMIALES
 - 3.4.1.2 TABLAS BINOMIALES ACUMULADAS
 - 3.4.2 DISTRIBUCION DE POISON
 - 3.4.2.1 TABLAS DE POISSON
 - 3.4.3 DISTRIBUCION HIPERGEOMETRICA
 - 3.4.4 DISTRIBUCION MULTINOMIAL
 - 3.4.5 DISTRIBUCION UNIFORME
 - 3.4.6 DISTRIBUCION EXPONENCIAL
 - 3.4.6.1 DETERMINACION DE PROBABILIDADES
- TALLER DEL MODULO III
- BIBLIOGRAFIA
- ANEXOS

MODULO IV

DISTRIBUCION NORMAL

- 4.1 NATURALEZA DE LA DISTRIBUCION NORMAL
- 4.2 VARIABLE TIPIFICADA O ESTANDARIZADA
- 4.3 CALCULO DE UN VALOR DE X A PARTIR DE UNA PROBABILIDAD CONOCIDA
- 4.4 APROXIMACION DE LA DISTRIBUCION NORMAL A LA DISTRIBUCION BINOMIAL
- TALLER MODULO V
- BIBLIOGRAFIA
- ANEXO

MODULO I

INTRODUCCIÓN A LA ESTADÍSTICA

A medida que aumenta la complejidad de nuestro mundo y nos internamos por los senderos reales y virtuales del nuevo milenio, se hace más difícil tomar decisiones informada e inteligentes. Con frecuencia, estas decisiones han de tomarse con un conocimiento imperfecto de la situación y un grado considerable de incertidumbre, sin embargo, las soluciones pertinentes son esenciales para nuestro bienestar e incluso para nuestra supervivencia. Estamos expuestos a la presión constante de problemas económicos galopantes y angustiantes, como una inflación dinámicamente creciente en casi todos los países subdesarrollados y tercermundistas, un sistema fiscal engorroso, coercitivo e injusto y oscilaciones excesivas del ciclo económico.

Todo nuestro tejido socioeconómico esta amenazado por una contaminación ambiental exponencialmente creciente, por una deuda pública opresiva y criminal, por un índice de delincuencia que se incrementa sin cesar día a día como consecuencia de la perdida de valores morales y por unos intereses impredecibles que coadyuvan a incrementar la ya casi infinita brecha entre los países desarrollados y los países pobres de Asia, Latinoamérica y África y sirven de caldo de cultivo para brotes de violencia cargadas de racismo, xenofobia y lucha de clases.

Quienes crean que estas condiciones son características del estilo de vida actual, bien le cabría recordar que problemas análogos contribuyeron a la caída del imperio romano mas que la invasión de las hordas bárbaras del Norte. Nuestro periodo de éxito en este planeta, relativamente, breve no es ninguna garantía de supervivencia futura. A menos que se encuentren soluciones viables a estos apremiantes problemas, podríamos acompañar en el olvido al dinosaurio, como ya lo hicieron los antiguos romanos.

En razón de lo anteriormente expuesto, es necesario contar con herramientas altamente confiables que nos permitan tomar decisiones acertadas y eficaces para poder resolver los problemas prioritarios que podrían enmarcarse de acuerdo al criterio 80/20 (el 80% de todos los problemas se deben al 20% de las causas.) .De ahí que sea fundamental que todos los futuros profesionales que pretendan dirigir correctamente los destinos de la humanidad, aprendan y se sirvan de los métodos estadísticos para minimizar la probabilidad de error en la toma de decisiones en esta era llamada del conocimiento, que actualmente cuentan con todas ayudas de última generación que a través de excelentes software permiten agilizar todo el trabajo estadístico.

Es altamente recomendable que a la par con la formación humanística que se imparte en nuestra universidad, se actualice las técnicas pedagógicas y se introduzcan en los contenidos programáticos y curriculares de los diferentes programas, la obligación que los docentes y estudiantes utilicen los diferentes software que se consiguen en el mercado, que le permitan estar actualizados con las tecnologías de puntas.

1.1 IMPORTANCIA DE LA ESTADÍSTICA

Todos los campos de la investigación científica seria se pueden beneficiar del análisis estadístico ya que las técnicas estadísticas se pueden utilizar en casi todos los aspectos de la vida. Se diseñan encuestas para recopilar información previa al día de elecciones y así predecir el resultado de las mismas. Se seleccionan al azar consumidores para obtener información con el fin de predecir la preferencia con respecto a ciertos productos y/o servicios.

Los responsables de la toma de decisiones sobre la política económica, asesores presidenciales, ministeriales y de otros altos cargos públicos, tienen en la estadística una herramienta muy valiosa. Los economistas consideran varios índices de la situación económica durante cierto periodo y utilizan la información para predecir la situación económica futura. Únicamente con la ayuda del análisis estadístico pueden tomarse decisiones inteligentes en relación con los tipos tributarios, programas sociales, gastos de defensas, políticas laborales, inversiones prioritarias..

Es fundamental para los empresarios, en su búsqueda incansable del beneficio, donde las actividades de control total de calidad, minimización de costos, combinación de productos - existencias y multitud de aspectos empresariales se pueden gestionar con eficacia mediante procedimientos estadísticos constatados. Los ingenieros muestrean las características de calidad de un producto, juntos con otras variables controladas del proceso para facilitar la identificación de las variables que están más relacionadas con dicha calidad.

En la investigación de mercados, la estadística representa una ayuda inestimable para determinar si es probable que un nuevo producto y/o servicio tenga éxito. Su utilidad es evidente también para los asesores financieros que han de evaluar las oportunidades de inversión a través de las bolsas de valores. Contadores, directores de personal y fabricantes se benefician igualmente del análisis estadístico.

Incluso los investigadores médicos, sicólogos, siquiátras y muchos profesionales del sector de la salud y del comportamiento, que preocupados por la eficacia de nuevos medicamentos, realizan experimentos para determinar su efecto bajo ciertas condiciones ambientales controladas en los humanos y en los animales para la determinación del método apropiado para curar ciertas enfermedades, encuentran en la estadística un aliado imprescindible.

En termino generales la estadística se puede utilizar para mejorar el rendimiento en el trabajo y en muchos aspectos de la vida diaria ya que es una guía universal para lo desconocido

1.2 HISTORIA DE LA ESTADISTICA

Las ciencias al evolucionar pierden sus rasgos primitivos, se transforman, se dividen y aún cambian de nombre. La estadística ha seguido igual proceso y para comprender su estado actual necesitamos conocer algo de su historia. Formalmente se considera fundador de la estadística a Godofredo Achenwall (1719 – 1772) profesor y economista alemán quien siendo docente de la universidad de Leipzig, escribió el descubrimiento de una nueva ciencia que llamo estadística (palabra derivada de Staat que significa gobierno) y que definió como el conocimiento profundo de la situación respectiva y comparativa de cada estado. Achenwall y sus seguidores estructuraron los métodos estadísticos que se orientaron a investigar, medir y comparar las riquezas de las naciones.. No obstante lo anterior no significa que antes de los estudios de Achenwall, los estados no hubiesen efectuados inventarios de sus riquezas; estos inventarios o censos (palabra derivada del latín censere que significa valuar o tasar) se realizaron desde la antigüedad. Se sabe que 2000 a 3500 años antes de Cristo, los chinos y los egipcios efectuaron censos que eran simples inventarios elementales y que desde los

comienzos de la civilización han existido formas sencillas de estadística, pues ya se utilizaban representaciones gráficas y otros símbolos en pieles, rocas, palos de madera y paredes de cuevas para contar el número de personas, animales o cosas. Hacia el año 3000 AC. Los babilonios usaban pequeñas tablillas de arcilla para recopilar datos sobre la producción agrícola y sobre los géneros vendidos o cambiados mediante trueque. En el siglo XXXI a.C., mucho antes de construir las pirámides, los egipcios analizaban los datos de la población y la renta del país. Los libros bíblicos de Números y Crónicas incluyen, en algunas partes, trabajos de estadística. El primero contiene dos censos de la población de Israel y el segundo describe el bienestar material de las diversas tribus judías. En China existían registros numéricos similares con anterioridad al año 2000 a.C. Los griegos clásicos realizaban censos cuya información se utilizaba hacia el 594 a.C. para cobrar impuestos.

El Imperio romano fue el primer gobierno que recopiló una gran cantidad de datos sobre la población, superficie y renta de todos los territorios bajo su control. Durante la edad media sólo se realizaron algunos censos exhaustivos en Europa. Los reyes carolingios Pipino el Breve y Carlomagno ordenaron hacer estudios minuciosos de las propiedades de la Iglesia en los años 758 y 762 respectivamente. Después de la conquista normanda de Inglaterra en 1066, el rey Guillermo I de Inglaterra encargó la realización de un censo. La información obtenida con este censo, llevado a cabo en 1086, se recoge en el Domesday Book. El registro de nacimientos y defunciones comenzó en Inglaterra a principios del siglo XVI, y en 1662 apareció el primer estudio estadístico notable de población, titulado *Observations on the London Bills of Mortality* (Comentarios sobre las partidas de defunción en Londres). Un estudio similar sobre la tasa de mortalidad en la ciudad de Breslau, en Alemania, realizado en 1691, fue utilizado por el astrónomo inglés Edmund Halley como base para la primera tabla de mortalidad.¹ En el siglo XIX, con la generalización del método científico para estudiar todos los fenómenos de las ciencias naturales y sociales, los investigadores aceptaron la necesidad de reducir la información a valores numéricos para evitar la ambigüedad de las descripciones verbales.

Desde su creación, la estadística se ha enriquecido continuamente con los aportes de matemáticos, filósofos y científicos de todas las disciplinas.

En nuestros días, la estadística se ha convertido en un método efectivo para describir con exactitud los valores de datos económicos, políticos, sociales, psicológicos, biológicos o físicos, y sirve como herramienta para relacionar y analizar dichos datos. El trabajo del experto estadístico no consiste ya sólo en reunir y tabular los datos, sino sobre todo en el proceso de "interpretación" de esa información. El desarrollo de la teoría de la probabilidad ha aumentado el alcance de las aplicaciones de la estadística. Muchos conjuntos de datos se pueden aproximar, con gran exactitud, utilizando determinadas distribuciones probabilísticas; los resultados de éstas se pueden utilizar para analizar datos estadísticos. La probabilidad es útil para comprobar la fiabilidad de las inferencias estadísticas y para predecir el tipo y la cantidad de datos necesarios en un determinado estudio estadístico.

1.3 LA ESTADÍSTICA Y SUS METODOS

De acuerdo a un punto de vista aceptado ampliamente, la Estadística, se define mejor como la rama de las matemáticas que se ocupa de facilitar la toma de decisiones acertadas frente a una incertidumbre y por lo tanto, desarrolla y utiliza técnicas para la

¹ Estadística," Enciclopedia Microsoft® Encarta® 2000. © 1993-1999 Microsoft Corporation

recolección cuidadosa, presentación efectiva y el análisis correcto de la información numérica.

Esta definición incorpora claramente a la estadística descriptiva y a la estadística inductiva o inferencial. Conjuntamente, las ramas ayudan a quienes toman decisiones a extraer la máxima utilidad a partir de información limitada; por una parte, las tablas, gráficos, resúmenes resaltan los modelos que de otra forma quedarían ocultos en datos desorganizados; a la vez que las deducciones correctas proporcionan estimaciones razonables de cosas desconocidas, juntos con probabilidades indicadas claramente de que sean correctas o falsas.

La materia prima de la estadística consiste en conjuntos de números obtenidos al contar o medir elementos. Al recopilar datos estadísticos se ha de tener especial cuidado para garantizar que la información sea completa y correcta.

El primer problema para los estadísticos reside en determinar qué información y en qué cantidad se ha de reunir. En realidad, la dificultad al compilar un censo está en obtener el número de habitantes de forma completa y exacta; de la misma manera que un físico que quiere contar el número de colisiones por segundo entre las moléculas de un gas debe empezar determinando con precisión la naturaleza de los objetos a contar.

Los estadísticos se enfrentan a un complejo problema cuando, por ejemplo, toman una muestra para un sondeo de opinión o una encuesta electoral. El seleccionar una muestra capaz de representar con exactitud las preferencias del total de la población no es tarea fácil.

Para establecer una ley física, biológica o social, el estadístico debe comenzar con un conjunto de datos y modificarlo basándose en la experiencia. Por ejemplo, en los primeros estudios sobre crecimiento de la población, los cambios en el número de habitantes se predecían calculando la diferencia entre el número de nacimientos y el de fallecimientos en un determinado lapso. Los expertos en estudios de población comprobaron que la tasa de crecimiento depende sólo del número de nacimientos, sin que el número de defunciones tenga importancia. Por tanto, el futuro crecimiento de la población se empezó a calcular basándose en el número anual de nacimientos por cada 1.000 habitantes. Sin embargo, pronto se dieron cuenta que las predicciones obtenidas utilizando este método no daban resultados correctos. Los estadísticos comprobaron que hay otros factores que limitan el crecimiento de la población. Dado que el número de posibles nacimientos depende del número de mujeres, y no del total de la población, y dado que las mujeres sólo tienen hijos durante parte de su vida, el dato más importante que se ha de utilizar para predecir la población es el número de niños nacidos vivos por cada 1.000 mujeres en edad de procrear. El valor obtenido utilizando este dato mejora al combinarlo con el dato del porcentaje de mujeres sin descendencia. Por tanto, la diferencia entre nacimientos y fallecimientos sólo es útil para indicar el crecimiento de población en un determinado periodo de tiempo del pasado, el número de nacimientos por cada 1.000 habitantes sólo expresa la tasa de crecimiento en el mismo periodo, y sólo el número de nacimientos por cada 1.000 mujeres en edad de procrear sirve para predecir el número de habitantes en el futuro.

La estadística descriptiva analiza, estudia y describe a la totalidad de individuos de una población. Su finalidad es obtener información, analizarla, elaborarla y simplificarla lo necesario para que pueda ser interpretada cómoda y rápidamente y, por tanto, pueda utilizarse eficazmente para el fin que se desee.

La estadística descriptiva trabaja con todos los individuos de la población. La estadística inferencial, sin embargo, trabaja con muestras, subconjuntos formados por algunos individuos de la población. A partir del estudio de la muestra se pretende inferir aspectos

relevantes de toda la población. Cómo se selecciona la muestra, cómo se realiza la inferencia, y qué grado de confianza se puede tener en ella son aspectos fundamentales de la estadística inferencial, para cuyo estudio se requiere un alto nivel de conocimientos de estadística, probabilidad y matemáticas.

Tiene especial importancia como herramienta la estadística aplicada a la economía que formalmente llamamos econometría ²

1.4 LA ESTADÍSTICA Y LA INFORMÁTICA

Vivimos en la llamada era del conocimiento, de la globalización, del Internet, donde los conocimientos se vuelven obsoleto en un abrir y cerrar de ojos. La diversidad y abundancia de información que trae hoy cualquier periódico dominical es mucho más grande que la podía obtener un ciudadano normal del de siglo XVII en toda su vida. Tenemos derechos y necesidad de conocer toda esta información y de acceder a ella de forma resumida y confiable y es aquí donde la estadística juega unos de sus roles importantes.

La estadística en combinación con la Informática permite manejar de manera eficiente, confiable y relativamente fácil grandes volúmenes de información y obtener resultados que se han de someter al análisis e interpretación de los profesionales.

Actualmente existen muchos paquetes estadísticos que agilizan todo el trabajo y entre los más importantes tenemos:

SPSS . : Gestión de datos, análisis estadístico, gráficos y presentación de resultados.

STAGRAPHS : Paquete de análisis interactivo y sistema gráfico

SAS : Planificación, análisis estadístico, gráficos y presentación de resultados.

Excel : análisis estadístico, gráficos y presentación de resultados.

STATISTICA : Planificación, análisis estadístico, gráficos y presentación de resultados

MINITAB : Planificación, análisis estadístico, gráficos y presentación de resultados

ARIMA : Diseño de experimentos

EViews : Análisis econométrico y estadístico, gráficos y presentación de resultados

1.5 REFLEXION

" Our lives begin to end the day we become silent about things that matter "

Martin Luther King

" La soñada igualdad se aleja y sistema neoliberal procura ahondar las desigualdades. El darwinismo neoliberal globalizado permite que 225 ricos posean tanto como 2500 millones de pobres, 3 billonarios, el PIB de los 48 países más pobres del universo " ³ ¿ Es justo? ¿ Usted que piensa?

² Econometría, rama de la economía que utiliza métodos y modelos matemáticos. El cálculo, la probabilidad, la estadística, la programación lineal y la teoría de juegos, así como otras áreas de las matemáticas, se utilizan para analizar, interpretar y predecir diversos sistemas y variables económicas, como el precio, las reacciones del mercado, el coste de producción, la tendencia de los negocios y la política económica

³ Fernando Castello ,Utopía a la vista, www.arrakis.es/~trazeg/castello.html

La pobreza extrema, por debajo del límite de subsistencia, para millones de personas. Pobreza en forma de hambre permanente que se transforma en azote bíblico en momento como el presente; pobreza de capacidad y de gestión que afecta a la inmensa mayoría, analfabeta en más de dos tercios de las mujeres y más de la mitad de los hombres de los países del tercer mundo en la llamada era del conocimiento. El narcotráfico enfermedad social de los países ricos y desgracia de los países pobres, el hambre, la deuda externa, la malaria de siempre, el SIDA de la última década, la escasez de agua potable y de energía, el analfabetismo, la guerra y la destrucción se han convertido en imagen habitual y nos hemos insensibilizados.

Parafraseando, como dijo el expresidente español Felipe González ⁴, a Joseph Ki-Zerbo, de Burkina Faso, afectado de malaria, venerable en su vejez de luchador por un futuro mejor para su continente, decía en las palabras finales de una de sus intervenciones “ la juventud africana se encuentra ante un pasado mudo, un presente ciego y un futuro sordo “ así nos hemos quedados nosotros en todos los países subdesarrollados, masticando un silencio cómplice y cobarde.

Ya se fue el milenio, considerado durante mucho tiempo sinónimo de futuro y desde ahora en adelante, nuestro presente. La globalización vuela y llega a los rincones más recónditos del planeta ignorando la independencia de los pueblos y la diversidad de sus regímenes políticos, vivimos una nueva colonización donde los actores principales son las empresas y conglomerados de grupos de industriales y financieros privados que intentan dominar el mundo. Nunca antes los dueños del poder y de la tierra habían sido tan poco numerosos y sin embargo tan poderosos. Estos grupos se sitúan en el triángulo formado por los Estados Unidos, Europa y Japón, donde la mitad de ellos tienen su base en los Estados Unidos.

La concentración del capital y el poder se ha acelerado enormemente bajo el influjo de las revoluciones tecnológicas de la información. La globalización no intenta conquistar países sino mercados. La preocupación de este moderno poder no es la conquistar territorios como los fueron las grandes invasiones en la colonia, sino la toma de sus riquezas. ; lo que lleva consigo destrucciones impresionantes, donde industrias enteras son brutalmente desmanteladas en todas las regiones, paros masivos, contratos-basuras, desempleo, sobreexplotación de hombres, mujeres y niños, miseria, etc.

La globalización es también pillaje planetario, los grandes grupos saquean el medio ambiente, sacan provecho de las riquezas de la naturaleza que son patrimonio de humanidad y lo hacen sin escrúpulos ni limitaciones, acompañado de una criminalidad financiera y bancaria, por la que pasan sumas que superan el billón de dólar anuales, es decir, más que el PIB de la tercera parte de la humanidad.

La mercantilización generalizada de palabras y cosas, cuerpos y espíritus, de la naturaleza y la cultura provoca mayor desigualdad mientras la producción mundial de productos alimenticios básicos cubren más del 110% de las necesidades, 30 millones de personas continúan muriendo de hambre cada año y más de 800 millones están famélicos.

A principios de la década del 60, el 20% de la población del mundo, los más ricos, tenían unos ingresos 30 veces superiores que el 20 % de los más pobres. Hoy en día los ingresos de los ricos son 82 veces superiores. De los 6.000 millones de habitantes del planeta, solamente 500 millones viven con holgura, el resto, los 5,500 millones malviven en la necesidad.⁵ ¿ Usted amigo lector cree que esto es justo?

⁴ Felipe Gonzalez Africa : El silencio de los tambores,
www.arrakis.es/~trazeg/gonzalez.html

⁵ El año 2000, WWW.arrakis.es/~trazeg/anno2000.html

Se perdieron los valores, las estructuras sociales y políticas; se desarrollan zonas sin derechos, entidades caóticas e ingobernables que escapan a todo tipo de legalidad, sumergidas en un estado de barbarie donde los grupos de saqueadores son los únicos capacitados para imponer la ley chantajeando a la población, carteles del narcotráfico y redes mafiosas, especulación financiera, corrupción a todo nivel, contaminación ambiental, fanáticos religiosos y étnicos, efecto invernadero, desertización y proliferación nuclear entre otras.

¿ Serán consecuencia lógica o ilógica o realmente entrópica del neoliberalismo implementados en el triángulo del poder arriba mencionado? ¿ Que piensa usted amigo estudiante y futuro profesional?

Aunque alegremente se pregona el triunfo de la democracia y la libertad en un planeta que casi se ha librado de regímenes autoritarios, la censura y la manipulación vuelven paradójicamente con mas fuerza. Nuevos y seductores “ líderes “ proponen mundos maravillosos, mágicos pero alejados de la realidad distrayendo a los viejos y convenciendo a los jóvenes para que abandonen toda acción cívica y reivindicativa. Amigos en esta nueva era de alienación, de la cultura global, de la informática, de los mensajes planetarios. , La comunicación juega un papel ideológico importante que puede amordazar y liberar el pensamiento.

Si Usted, amigo lector es capaz de resolver problemas y tomar decisiones acertadas, tendrá una excelente posición en el campo empresarial, si a la vez que toma decisiones inteligentes, resuelve problemas, alguien estará dispuesto a pagarle con generosidad. En este mundo se suele pagar mas a quienes formulan preguntas adecuadas para lograr los objetivos fundamentales que a quienes toman la responsabilidad para lograrlos. Las respuestas suelen ser muy evidentes una vez que se han hecho las preguntas correctas. El análisis estadístico demostrará ser de gran utilidad en la formación adecuada de esas preguntas.

Los empresarios saben que los complejos problemas con que nos enfrentamos en el mundo actual exigen soluciones cuantitativas. Si usted no estuviera en condiciones de aplicar la estadística y otros métodos cuantitativos a los numerosos problemas corrientes que si duda se le presentaran, se encontrara en fuerte desventaja en el mercado empresarial.

Quienes aspiren a ocupar puestos de dirección, trabajar independientes o desempeñar cualquier profesión del sector industrial advertirán que una comprensión básica de la estadística no solo multiplica sus oportunidades de trabajo sino que renueva las probabilidades de promoción debido a las mejoras del rendimiento en el trabajo.

Tenga presente que en el mercado actual los empresarios se resisten a contratar analfabetas estadísticos por lo tanto si sus aspiraciones profesionales se encaminan a la industria privada, al sector oficial o al desempeño de cualquier actividad lucrativa, se encontrara mucho mejor respaldado por su experiencia académica si adquiere una base sólida en los fundamentos del análisis estadístico “ **Amigo lector no se olvide de la primera parte de la reflexión y luchemos por la utopía de un mundo mejor.**”

Cada vez que usted toma decisiones esta aplicando la estadística, ya que tomar decisiones es inherente a todo ser viviente, por lo tanto es de aplicación universal. Tomarla bien o mal depende no solamente de los soporte cuantitativos y cualitativos sino también de la formación moral y ética, ya que con la estadística también se puede engañar y manipular.

1. *Journal of Statistics Education*. Excelente revista (¡gratuita!) editada por la American Statistical Association sobre educación estadística (a todos los niveles)
2. Homepage de la American Statistical Association. La mayor asociación de estadísticos, editora de *Journal of Agricultural, Biological, and Environmental Statistics*, *Journal of the American Statistical Association*, *Journal of Statistics Education* y *The American Statistician* entre otras revistas.
3. *Environmental and Ecological Statistics*
4. *Community Ecology*
5. *Journal of Agricultural, Biological, and Environmental Statistics*
6. *Bulletin of the Ecological Society of America* (gratuita; contiene artículos de ecología estadística)
7. *Journal of Statistical Software* (gratuita)
8. *InterStat (Statistics on the Internet)* (gratuita)
9. Probability and Statistics Journals on the Web

ESTADISTICA ON LINE

1. Aula Virtual de Bioestadística, Universidad Complutense
2. Curso de bioestadística de la Universidad de Málaga
3. Apuntes de Bioestadística. Unidad de Bioestadística Clínica del Hospital Ramón y Cajal
4. Lecciones de Estadística, 5campus.org (análisis multivariante...)
5. Curso de Bioestadística de la Universidad Nacional de Misiones (Argentina)
6. Curso de estadística (para ingenieros) de una universidad mexicana
7. Cursos de estadística de la Universidad de California, Los Angeles
8. Cursos de estadística de la Universidad de Michigan
9. Electronic Statistics Textbook
10. A New View of Statistics
11. HyperStat Statistics Textbook
12. Statistics at Square One
13. Statistics Every Writer Should Know
14. Introductory Statistics: Concepts, Models, and Applications
15. Multivariate Statistics: Concepts, Models, and Applications
16. A complete guide to nonlinear regression
17. Ordination Methods for Ecologists
18. Annotated Bibliography of Canonical Correspondence Analysis and related constrained ordination methods 1986-1993
19. Multivariate Statistics: an Introduction

20. A glossary of ordination-related terms
21. Glossary of Statistical Terms and Medical Citations for Statistical Issues
22. Glossary of over 30 statistical terms
23. EVSC 503 Applied Statistics for the Environmental Sciences
24. <http://s9000.furman.edu/mellonj/spss1.htm>
25. <http://www.indiana.edu/~statmath/stat/spss/win/index.html>
26. <http://www.utexas.edu/cc/stat/tutorials/spss/SPSS1/Outline1.html>
27. <http://web.uccs.edu/lbecker/SPSS/content.htm>
28. <http://core.ecu.edu/psyc/wuenschk/SPSS/SPSS-Data.htm>
29. <http://www.tulane.edu/~panda2/Analysis2/ahome.html>
30. <http://www.shef.ac.uk/~scharr/spss/index2.htm>
31. <http://calcnet.mth.cmich.edu/org/spss/index.html>
32. <http://calcnet.mth.cmich.edu/org/spss/toc.htm>
33. <http://www.public.asu.edu/~pythagor/spssworkbook.htm>
34. <http://lib.stat.cmu.edu/>
35. <http://www.stat.ufl.edu/vlib/statistics.html>
36. <http://www.statserv.com/software.html>
37. <http://www.maths.uq.edu.au/~gks/webguide/>
38. <http://www.statistics.com/>
39. <http://www.helsinki.fi/~jpuranen/links.html#stc>
40. <http://www.maths.uq.edu.au/~gks/webguide/free.html>
41. <http://nhssbig.inhs.uiuc.edu/>
42. <http://www.okstate.edu/artsci/botany/ordinate/software.htm>
43. <http://life.bio.sunysb.edu/ee/biometry/>
44. <http://life.bio.sunysb.edu/morph/software.html>
45. <http://pbil.univ-lyon1.fr/ADE-4/ADE-4.html>
46. http://ourworld.compuserve.com/homepages/Rainer_Wuerlaender/statsoft.htm
47. <http://www.stat.auckland.ac.nz/~mja/Programs.htm>
48. <http://it.stlawu.edu/~rlock/maa99/>
49. <http://it.stlawu.edu/~rlock/tise98/java.html>
50. <http://www.stat.vt.edu/~sundar/java/applets/>
51. <http://www.kuleuven.ac.be/ucs/java/index.htm>
52. <http://noppa5.pc.helsinki.fi/koe/>

53. <http://www2.kenyon.edu/people/hartlaub/MellonProject/mellon.html>
Demostraciones Java para el aprendizaje de la estadística
54. *Electronic Textbook (UCLA)*, programa *on-line* de representación y cálculo de funciones de densidad y de distribución (normal, F , ji-cuadrado, números aleatorios...). Equivalente a un libro de tablas

BIBLIOGRAFÍA

1. Montgomery Douglas y Runger George.(1996), Probabilidad y Estadística aplicada a la Ingeniería., McGraw-Hill, Mexico
2. Montgomery Douglas y Hines William.(1995), Probabilidad y Estadística aplicada a la Ingeniería. y Administración, segunda edición ,CECSA, México
3. Mendenhall William, Wackerly Dennis y Scheaffer Richard (1994), Estadística Matemáticas con Aplicaciones , segunda edición, Grupo Editorial Iberoamerica. M, México
4. Govinden Portus Lincuyan.(1998), Introducción a la Estadística,. McGraw-Hill, Santafé de Bogotá
5. Webster Allen L.(1998), Estadística aplicada a la Empresa y a la Economía, segunda edición, McGraw-Hill, Madrid
6. Kohler Heinz.(1996), Estadística para Negocios y Economía, primera edición ,CECSA, México
7. Martinez Bencardino Ciro (1995), Estadística , sexta edición ,ECOE EDICIONES Santafé de Bogotá.
8. Alvarez C Ricardo (1994), Estadística Fundamental Aplicada, primera edición ,PUBLIADCO, Cali
9. Estadística," Enciclopedia Microsoft® Encarta® 2000. © 1993-1999 Microsoft Corporation.
10. Stockburger David W (1996) Introductory Statistics: Concepts, models an applications, , <http://www.psychstat.smsu.edu/sbk00.htm>
11. Mendoza Duran Carlos. (1995)Probabilidad y Estadística, <http://w3.mor.itesm.mx/~cmendoza/ma835/ma83500.html>
12. Valdés Fernando ,Comprensión y uso de la estadística, <http://www.cortland.edu/flteach/stats/glos-sp.html>
13. Hurtado Minotta Enrique A, Reflexiones para el Currículo, <http://www.geocities.com/soho/atrium/7521/tesis.html>
14. Academic Freedom , www.hrw.org/wr2k/issues-01.htm
15. Gonzalez Felipe, Africa : El silencio de los tambores, www.arrakis.es/~trazeg/gonzalez.html.
16. El año 2000, WWW.arrakis.es/~trazeg/anno2000.html
17. Mendenhall, W.; D.D. Wackerly y R.L. Scheaffer. *Estadística Matemática con Aplicaciones*. Grupo Editorial Iberoamérica. México.
18. Freund, John E. y Gary A. Simon. *Estadística elemental*. Prentice-Hall Hispanoamericana, SA. México, 1994. (8ª edición.)
19. Spiegel, M.R. *Estadística*. McGraw-Hill. México. (Serie Schaum.)
20. <http://www.unl.edu.ar/fave/sei/encuestas/index.html>.
21. Wonnacott, Thomas H. y Ronald J. Wonnacott (1998) *Introducción a la estadística*. Limusa/IPN. México.

MODULO II

DEFINICIONES Y CONCEPTOS BÁSICOS

2.1 ESTADISTICA: Se define como la rama de las matemáticas que se ocupa de facilitar la toma de decisiones acertadas frente a una incertidumbre y por lo tanto, desarrolla y utiliza técnicas para la recolección cuidadosa, presentación efectiva y el análisis correcto de la información numérica. La estadística la podemos agrupar en dos grandes ramas, la descriptiva o deductiva y la analítica o inferencia estadística.

2.1.1 ESTADISTICA DESCRIPTIVA: Es aquella que recopila, analiza, estudia y describe a la totalidad de individuos de una población. Su finalidad es obtener información, analizarla, elaborarla y simplificarla lo necesario para que pueda ser interpretada cómoda y rápidamente y por lo tanto, pueda utilizarse eficazmente para el fin que se desee. La estadística descriptiva también se puede definir como la rama de la estadística que se ocupa del desarrollo y utilización de técnicas para la presentación eficaz de información numérica con el objeto de poner de relieve los modelos que de otra forma quedarían ocultos en un conjunto de datos.

2.1.2 ESTADISTICA ANALITICA: Conocida como inferencia estadística, se define como la rama de la estadística que se encarga del desarrollo y utilización de técnicas probabilística para analizar correctamente o sacar deducciones de informaciones numéricas. Mientras la estadística descriptiva trabaja con todos los individuos de la población, la estadística inferencial, trabaja con muestras, (subconjuntos formados por algunos individuos de la población. A partir del estudio de la muestra se pretende inferir aspectos relevantes de toda la población.

Cómo se selecciona la muestra, cómo se realiza la inferencia, y qué grado de confianza se puede tener en ella son aspectos fundamentales de la estadística inferencial, para cuyo estudio se requiere un alto nivel de conocimientos de estadística, probabilidad y matemáticas.

A veces se deduce una verdad general, a partir de particularidades y en otras ocasiones se obtienen conclusiones particulares a partir de un conocimiento general. **Obtener conclusiones acerca de un todo desconocido a partir de una parte conocida es el razonamiento inductivo** y funciona por ejemplo cuando un ingeniero de producción concluye con un 95% de confianza de que es verdad contra un 5% de estar equivocado, que el porcentaje promedio de desperdicio de un proceso productivo es del 3% anual obtenido a partir de un muestreo de la producción. **Por otra parte al obtener deducciones sobre una parte desconocida partiendo de un todo conocido se llama razonamiento deductivo.** El razonamiento deductivo y el inductivo son complementarios por lo tanto ante que los estadísticos puedan generalizar en forma segura de la parte al todo, deben estudiar como es que la parte ha sido generada.

2.2 POBLACION: Es el conjunto de todas las observaciones de interés para el investigador, o el conjunto de todos los elementos o eventos que tienen características

similares. La población puede ser finita o infinita. Es finita cuando todos sus elementos se pueden contar con exactitud, en caso contrario es infinita.

2.3 PARAMETRO: Es cualquier medida descriptiva de la población completa de observaciones que tienen interés para el investigador por ejemplo el ingreso promedio de los docentes universitarios de las universidades colombianas.

2.4 MUESTRA: Es la porción representativa de la población, que se selecciona para un estudio porque la población es demasiado grande para analizarla en totalidad. En otras palabras la muestra es un subconjunto de la población seleccionada por medios científicos.

2.5 ESTADISTICO: Es cualquier medida descriptiva de la muestra y sirve para estimar el parámetro de la población. El estadístico es a la muestra lo que el parámetro es a la población. Por ejemplo el ingreso promedio de los docentes universitario de la Usaca es el estadístico cuando la Usaca es una muestra de las universidades colombianas.

2.6 VARIABLES: Es una característica de la muestra o de la población que se analiza en un estudio estadístico. Una variable puede ser cualitativa o cuantitativa.

2.6.1 VARIABLE CUALITATIVA: Es aquella que se puede expresar normalmente por medio de palabra y no de números, por ejemplo, el estado civil, la nacionalidad, el sexo, la profesión, la raza, el color de la piel de los profesores de la Usaca. Las variables cualitativas pueden ser **binomiales o multinomiales**. Se pueden hacer observaciones solo en dos categorías sobre una variable **cualitativa binomial**, por ejemplo, hombre o mujer, bueno o malo, rico o pobre, ausente o presente, empleado o desempleado. Sobre una variable **cualitativa multinomial** se pueden hacer observaciones en mas de dos categorías, por ejemplo, en puestos de trabajo, colores, idiomas, estratos, nacionalidades, religiones, etc.

2.6.2 VARIABLE CUANTITATIVA: Es aquella que se expresa numéricamente, por ejemplo, las exportaciones de café, las ventas de acero, el ingreso per cápita, la producción de autos, el decomiso de cocaína, las hectáreas fumigadas, etc. **Las variables cuantitativas pueden ser discretas o continuas.**

2.6.2.1 VARIABLE CONTINUA: Es aquella que toma cualquier valor dentro de un intervalo dado. Por muy cerca que estén dos observaciones siempre es posible hacer otra medición que caigan dentro de esa dos. Los valores de una variable continua provienen de las mediciones y de los pesajes.

2.6.2.2 VARIABLE DISCRETA: Es aquella que solo puede tomar determinados valores por lo general, números enteros, por ejemplo, el numero de hijos de una familia, numero de empleados de una empresa, numero de vacas en una hacienda, numero de carros fabricados, etc.

2.7 UNIDAD ELEMENTAL: Son las personas u objetos que poseen las características que interesan en una investigación estadística. Por ejemplo si alguien esta interesado en la filiación política de los estudiantes de un curso, rápidamente identificaría a los estudiantes de ese curso como unidades elementales, pero si quiere saber el estado su rendimiento en estadística, las notas pueden ser tomadas como unidades elementales a ser investigadas.

2.8 DATO: Es cualquier observación individual de una característica(variable) específica, susceptible de ser comparada. Cualquier conjunto de observaciones de una o mas particularidades de interés, para una o mas unidades elementales, se denomina conjunto de datos. **Un conjunto de datos es univariado, bivariado o multivariado si contiene una, dos, o mas de dos variables**

En el cuadro No 1 que aparece a continuación se muestra una base de datos donde en donde se pueden observar los diferentes componentes (unidad elemental, tipos de variables , datos , muestra, etc).

CUADRO No 1
BASE DE DATOS DE LOS EMPLEADOS DE LA EMPRESA
Metalconsulting Ingenieria Ltda

UNIDAD ELEMENTAL	VARIABLES CUANTITATIVAS				VARIABLES CUALITATIVAS				VARIABLES DISCRETAS			
CODI GO	EDAD	ESC OLA RID	INGRESOS	PROFESIO N	RAZA	RELIGI ON	POLIT IC	ECIVIL	NU OS	VIVIE NOA	ANTI LAB ORA O	SEX O
1	45	7	\$350,000	NINGUNO	BLANC	MUSU	LIBER	VIUDO	4	NO	20,0	HOM
2	25	17	\$700,000	INGENIER	BLANC	CATO	LIBER	SOLT	2	SI	5,00	MUJ
3	30	17	\$500,000	CONTADO	BLANC	PROT	LIBER	SOLT	3	NO	6,00	HOM
4	18	16	\$400,000	PROFESO	NEGRA	MUSU	CONS	SOLT	2	NO	3,00	HOM
5	25	16	\$450,000	ABOGADO	AMARIL	BUDIS	COMU	SOLT	1	SI	5,00	MUJ
6	28	17	\$850,000	MEDICO	NEGRA	CATO	OTRA	CASA	3	NO	4,00	HOM
7	26	17	\$600,000	INGENIER	AMARIL	INDUI	CONS	CASA	2	SI	4,00	HOM
8	27	16	\$450,000	PROFESO	COBRIZ	BUDIS	LIBER	UNION	1	SI	8,00	MUJ
9	52	10	\$350,000	CONTADO	BLANC	MUSU	COMU	CASA	0	SI	20,0	MUJ
10	45	8	\$500,000	OTROS	AMARIL	BUDIS	CONS	UNION	0	NO	20,0	HOM
11	44	12	\$700,000	OTROS	COBRIZ	INDUI	COMU	SEPA	5	SI	15,0	HOM
12	46	9	\$100,000	OTROS	COBRIZ	INDUI	SOCIA	CASA	7	NO	15,0	HOM
13	26	16	\$400,000	CONTADO	COBRIZ	INDUI	OTRA	UNION	4	NO	5,00	HOM

REFERENCIA

MUESTRA DE INGRESOS

POBLACION POR RAZA

POBLACION POR ANTIGUEDAD

EAHM

DATO

2.9 EXPERIMENTO: Es la recolección de datos provenientes de unidades elementales que se efectúa ejerciendo control sobre algunos o todos los factores que pueden hacerlos diferentes entre sí, afectando por lo tanto, la característica de interés en la observación.

2.10 ENCUESTA: Encuesta o estudio de observaciones es la recopilación de datos provenientes de unidades elementales que se ejecutan sin controlar los factores que los hacen diferentes entre sí y que pueden afectar las características de interés en la observación. **Existen dos tipos de encuestas, completas (censo) y parciales**

2.10.1 CENSO: Es una encuesta completa en la que se hacen observaciones sobre una o mas características de interés para toda unidad elemental que exista. Un censo produce siempre un conjunto de datos que consta de al menos una población estadística, pero

posiblemente contiene varias. Existen varios procedimientos para llevar a cabo un censo. Una posibilidad es la **observación directa** de algunas actividades en curso, donde el encuestador registra, por ejemplo los pesos netos de los bultos de café cuando son llenados por una máquina, o las referencias y marcas de los computadores vendidos en un almacén. Un censo también se puede hacer también mediante una **entrevista personal o telefónica** en la que el investigador lee preguntas de una lista cuidadosamente elaborada y anota las respuestas verbales que recibe. Otra forma sería un censo por **autonumeración** como es el caso en que habiendo leído un conjunto de instrucciones, algunas personas responden por escrito cuestionarios que recibieron por correo normal, correo electrónico, por fax, o en la esquina de casa. Es frecuente que estos mismos procedimientos se apliquen a encuestas parciales.

2.10.2 ENCUESTA MUESTRAL: Es un estudio parcial en el que se hacen observaciones sobre una o más características de interés para solo un subconjunto de todas las unidades elementales.

2.11 RAZONES PARA HACER UN MUESTREO: hay muchas y variadas razones para realizar un muestreo y de una u otras formas todas están relacionadas con el tiempo, el presupuesto, la confiabilidad y calidad de la información. Dentro de estas razones listaremos algunas:

- a) **El costo de recopilar y procesar la información es menor cuanto menos unidades elementales se tomen.** Esta es una consideración crucial siempre que el número de unidades elementales pertinentes sea grande. Obsérvese que las empresas comerciales interesadas en conocer las preferencias de los consumidores con relación a productos nuevos o ya conocidos nunca hacen encuestas entre todos los consumidores, sino solo a un pequeño porcentaje de los mismos. Las empresas incluso resuelven interrogantes sobre sus operaciones internas por el método de muestreo, ya que un censo sería muy costoso y difícil de manejar. Considérese un banco que desea averiguar el porcentaje de errores cometidos mensualmente al abonar intereses en unos 4 millones de cuentas de ahorros, o al facturar a unos 6 millones de cuentas de créditos. El costo a pagar en empleados administrativos que hagan un censo de todas las cuentas será enorme y no se justifica.
- b) **A veces un censo es físicamente imposible de realizar cuando el número de unidades elementales es muy grande o cuando son inaccesibles.** En tales casos situaciones el muestreo es inevitable o cuando es prácticamente imposible ponerse en comunicación con algunas unidades elementales, como sería el caso de aviones siniestrados en el mar o en regiones montañosas remotas o de personas con domicilios desconocidos.
- c) **Un censo no tiene sentido cuando produce información que llega demasiado tarde;** por ejemplo, una encuesta de opinión política llevada a cabo antes de unas elecciones. Un censo de millones de habitantes tardaría demasiado en dar resultados, en cambio un muestreo es lo único que puede proporcionar con oportunidad una información deseada.
- d) **El muestreo puede proporcionar datos mas precisos que un censo.** Aunque esto suene paradójico, es cierto, ya que se necesitan menos trabajadores de estadística y se les puede capacitar mejor y supervisarlos de modo más eficiente; por lo tanto para un costo dado se recibe información de mayor calidad.
- e) **Un censo no tiene sentido y es infinitamente costoso cuando adquirir la información deseada destruye las unidades elementales de interés.** Por

ejemplo medir la vida útil de las baterías o la calidad de los bombillos producidos por una fábrica. Si se probaran todas las unidades elementales de interés se gastaría toda la producción y las respuestas a las preguntas originales serían inútiles.

2.12. TIPOS DE MUESTRAS: Teniendo en cuenta la frecuencia con que los ejecutivos, gerentes, economistas, ingenieros e investigadores, utilizan las encuestas muestrales, es importante comprender y analizar el significado de muestreo y tipos de muestreos. **Se obtienen diferentes tipos de muestras según sea el método de selección de las unidades elementales para la observación. Entre los diferentes tipos tenemos las muestras por conveniencias, de juicios y aleatorias.**

2.12.1 MUESTRAS DE CONVENIENCIAS: Cuando la conveniencia sea la consideración fundamental y solo se escojan para observación las unidades elementales mas fácilmente accesibles, el subconjunto resultante de todas ellas o de una población estadística asociada constituye una muestra por conveniencia. Es poco probable que este tipo de muestra sea representativo de una población, en el sentido de que se pueda obtener inferencias válidas. Este procedimiento asegura todo lo contrario. Imagínese que a las primeras 20 personas que sale de una fábrica se le pregunta acerca de sus salarios y se obtiene así un promedio de \$ 500.000 mensuales. Es difícil que se tenga confianza en este resultado ya que la selección estuvo basada por entero en la conveniencia personal, en donde no se tuvo en cuenta en averiguar si era lo representativo de la fuerza laboral de la empresa considerada como un todo. Otros ejemplos son el de un senador que juzga las actitudes de los electores que con base en el correo recibido toma una muestra de conveniencia, al igual que una asistente que pide por teléfono la opinión de los electores, sin tener en cuenta la de aquellos que no contestaron el teléfono, los que no tienen ese servicio o que lo tienen y no aparecen en la guía telefónica.

2.12.2 MUESTRAS DE JUICIOS: Son aquellas donde el juicio personal, presumiblemente basado en la experiencia previa, juega un papel importante en la selección de las unidades elementales para la observación. Por lo tanto se cree que el juicio experto es capaz de obtener una muestra representativa del todo. Dicho subconjunto de una población asociada se denomina muestra de juicio. Sin embargo, formular dicho juicio puede ser casi imposible, en especial cuando las unidades elementales son heterogéneas y la muestra deseada pequeña. Un buen ejemplo de juicio experto es la construcción mensual del **índice de precio al consumidor (IPC)** donde el experto decide con base en su juicio personal, entre prácticamente miles de millones de precios, cuales han de muestrearse y que ponderación han de asignárseles. Determinar el IPC requiere decisiones complejas relativas a que tiendas y en que zonas geográficas han de hacerse las encuestas, en que días, y de que productos. Un precio cobrado a muchos clientes en una tienda popular es más importante que uno cobrado a pocos clientes en una tienda casi vacía; mas personas compran los sábados que los lunes, por lo tanto aprovechan las ofertas de fin de semanas; las los frijoles, el arroz, la carne, las frutas parecen más importantes que las de los refrescos, el té, los fósforos y el cine. En todas estas cuestiones y en mas se aplica un juicio experto, cuando este falla, como es posible que ocurra, la muestra termina siendo no representativa del todo asociado.

2.12.3 MUESTRAS ALEATORIAS: Son las más importantes ya que evitan el problema de la falta de representatividad. Están formadas por un subconjunto de todas las unidades elementales o de una población asociada de sus características, que se escoge por un

proceso aleatorio que dará a cada unidad o población asociada una posibilidad positiva y conocida de ser seleccionada, aunque no necesariamente igual. Si se ejecuta en forma correcta, el proceso de selección aleatoria no permite discernir al investigador que unidades particulares de la población entran en la muestra. Como consecuencia de ello dicha muestra tiende a llevar al máximo las oportunidades de hacer deducciones válidas sobre la totalidad de la que proviene. **Las muestras aleatorias las podemos clasificar en varios tipos a saber: aleatoria simple, aleatoria sistemática, aleatoria estratificada, aleatoria agrupada**

2.12.3.1 MUESTRA ALEATORIA SIMPLE: Es un subconjunto de una población, escogida de tal modo que todo subconjunto posible del mismo tamaño tiene una oportunidad igual de ser seleccionada. Este procedimiento requiere que cada unidad individual tenga una oportunidad igual de selección. El procedimiento más común en la práctica de seleccionar una muestra aleatoria simple consiste en el uso de las **tablas de números aleatorios** que consiste en una lista de números generada por un proceso aleatorio de modo que cada dígito posible tenga igual probabilidad de preceder o seguir a cualquier otro.

2.12.3.2 MUESTRA ALEATORIA SISTEMÁTICA: Es un subconjunto de una población escogida al seleccionar al azar uno de los primeros k elementos, incluyendo todo elemento K -ésimo de ahí en adelante. Al utilizar este procedimiento K se determina al dividir el tamaño de la población N entre el tamaño de una muestra n . Supóngase que queremos seleccionar una muestra de 5 empresas donde se desea incluir cada vigésima empresa, entre las 100 empresas más grandes del país listada y enumeradas de acuerdo a sus utilidades en el último año. Lo primero que hacemos es dividir N/n ($k = 100/5 = 20$) para hallar k y luego procedemos a sacar aleatoriamente un número entre 00 y 19 de un recipiente que contenga los dichos números o usamos una tabla de números aleatorios, para hallar el punto de inicio, es decir el número de la primera empresa seleccionada y a partir de ahí hallar el resto de números. Suponga el primer número seleccionado fue 05 entonces la muestra quedaría conformada por las empresas codificadas con los números 05, 25, 45, 65 y 85. Si la selección inicial hubiese sido 02 o 18 las muestras hubiesen sido 02, 22, 42, 62, 82 o 18, 38, 58, 78 y 98 respectivamente.

2.12.3.3 MUESTRA ALEATORIA ESTRATIFICADA: Es un subconjunto de una población escogida al tomar muestras aleatorias separadas (simples o sistemáticas) de cada estrato de la población. Cuando la población a ser muestreada contiene dos o más subgrupos o estratos mutuamente exclusivos y claramente distinguibles, que difieren mucho uno de otro con respecto a alguna característica de interés a la vez que sus elementos son más bien homogéneos podemos seleccionar una muestra aleatoria estratificada, donde los tamaños de las muestras separadas varían de acuerdo con la importancia de los estratos. Si supiéramos que 10 de las 100 empresas enumeradas contabilizaron el 70% de las ventas generales, mientras que las otras 90 facturaron el 30% restante y si las ventas fueran la característica de interés para nosotros, quizás desearíamos asegurarnos que en nuestro muestreo no se excluya a las 10 empresas gigantes como podría pasar si se tomara una muestra aleatoria simple o sistemática. Podríamos dividir el listado en dos grandes estratos (10 gigantes y 90 pequeñas) y luego crear la muestra al seleccionar compañías de cada uno de los grupos. Para un 10% del total de la muestra, podríamos seleccionar 7 empresas del estrato gigante y 3 del estrato pequeño esperando que estas 10 compañías constituyan más de la mitad de todas las

ventas. El muestreo aleatorio estratificado ha adquirido mucha importancia para los encuestadores que desean predecir los resultados de las elecciones gubernamentales.

2.12.3.4 MUESTRA ALEATORIA AGRUPADA: En ocasiones cuando la población a muestrear se divide en forma natural en grupos, con base en la accesibilidad física se toma una muestra aleatoria agrupada, que esta conformada por un subconjunto de la población, escogido al tomar censos separados en un subconjunto de grupos geográficamente distintos escogidos al azar. Alguien que deseara muestrear los residentes o las tiendas de una ciudad, podría dividir la ciudad en manzanas, seleccionar al azar unas cuantas (por cualquiera de los métodos anteriores) y luego entrevistar a cada residente o propietario de tienda ubicado dentro del perímetro escogido. Debido a la proximidad geográfica de los entrevistados, este procedimiento ahorraría tiempo y gastos considerables de transportes, en comparación con el muestreo aleatorio simple que abarcará toda una ciudad en las que las unidades elementales de interés estarían ubicadas en una multitud de lugares. El procedimiento descrito recibe también el nombre de muestreo de grupo de una sola etapa. En ocasiones este muestreo es sustituido por el llamado de grupo de etapas múltiples, que mas complejo. Un ejemplo de este último podría ser una encuesta domiciliaria a nivel nacional dirigida como sigue: primero se escoge al azar un subconjunto de departamentos (grupos primarios), enseguida un subconjunto de ciudades dentro de los departamentos previamente seleccionados (grupos secundarios) y en tercer lugar un subconjunto de manzanas (grupos terciarios) en las ciudades de los grupos secundarios. Nótese que las encuestas gubernamentales siempre se realizan en las manzanas de los grupos terciarios.

2.13 ERRORES EN ENCUESTAS: Como hemos visto se pueden recopilar datos al tomar un censo o realizar varias formas de muestreo, de ahí que sea inevitable que los datos de todas las encuestas estén sujetos a errores que pueden surgir de innumerables y a veces inesperadas fuentes. En el mejor de los casos, los errores ocultan la verdad solo ligeramente y en el peor pueden reducir el valor de una encuesta y darle un sentido negativo, no hay algo mas desafortunado que saber algo que no es cierto. Los errores se pueden generar durante la etapa de planeación de una encuesta, pero es mas probable que se den en las últimas etapas, cuando se registran y procesan los datos. Sería trabajo inoficioso enumerar todas las formas en que pueden presentarse errores en las encuestas; sin embargo debemos estar consciente del problema y por ahora veremos dos categorías amplias de error que son: el error aleatorio y el error sistemático o sesgo.

2.13.1 ERROR ALEATORIO: Llamado también error de oportunidad o error muestral, es igual a la diferencia entre el valor de una variable obtenido al tomar una muestra aleatoria simple y el valor que resulta de efectuar un censo o del promedio de todas las muestras aleatorias posibles del mismo tamaño. Este tipo de error esta asociado solo con encuestas muestrales y resulta de la etapa en que se determinan las unidades de interés de la población que han incluirse en la muestra. Este error puede ser positivo o negativo, pequeño o grande, pero siempre es posible reducirlo al incrementar el tamaño de la muestra o número de muestras aleatorias tomadas y es cero en un censo. Lo mas importante es que el tamaño de este error puede ser estimado y muchas veces se reporta junto con los datos observados.

2.13.2 ERROR SISTEMATICO: Llamado sesgo o error no muestral es igual a la diferencia entre el valor de una variable obtenida al tomar un censo o al promediar los resultados de todas las muestras aleatorias posibles de un cierto tamaño y el valor

verdadero . Desafortunadamente el sesgo puede ser difícil de detectarse y su tamaño a diferencia del error muestral no se puede estimar por lo tanto los estadísticos que busquen descubrir la verdad deben estar enterados de cuales son las fuentes importantes de sesgos y hacer cuanto puedan por neutralizarla. (Se pueden provocar errores sistemáticos prácticamente desde el diseño de las encuestas. Errores denominados sesgos de selección, sesgo de respuesta o sesgo de no respuestas).

2.14 NIVELES DE MEDICION: Los datos se pueden clasificar por su nivel de medición en cuatro tipos de datos de complejidad creciente a saber : **datos nominales, ordinales, de intervalo y de razón** .

2.14.1 DATOS NOMINALES: El nivel de medición mas débil, que da una cantidad mínima de información, produce datos nominales . Estos son números que solo nombran o marcan diferencias de clases y sirve para clasificar observaciones sobre variables cualitativas en grupos mutuamente exclusivos, donde los números de cada grupo pueden contarse. Por ejemplo, el sexo de las personas es una variable que puede clasificarse en masculino o femenino , donde también se puede codificar con los valores como 0 y 1 teniendo en cuenta que los números en este caso solo sirve para indicar categorías. Es importante anotar que una medición nominal no lleva consigo ninguna indicación sobre el orden de preferencia , sino que se limita a establecer una disposición en categorías en las cuales se puede colocar cada observación.

2.14.2 DATOS ORDINALES: Son números que no solo poseen las características de los datos nominales sino que por su tamaño se ordenan y clasifican observaciones en base a su importancia, es decir, se jerarquizan a partir de algún criterio, por ejemplo los resultados de cualquier actividad se pueden clasificar como excelente, bueno, regular, malo y pésimo, los sondeos de opinión utilizan a menudo una escala ordinal , como muy de acuerdo, de acuerdo, en desacuerdo, muy en desacuerdo y sin opinión. Al igual que los datos nominales pueden utilizar números para ordenar las jerarquías.

2.14.3 DATOS DE INTERVALO: Estos son números que poseen todas las características de los datos ordinales y además están relacionados entre si por intervalos o distancias significativas porque todo los números están referidos a un punto cero arbitrario. Teniendo en cuenta esta arbitrariedad, las proporciones de dichos números no tienen sentido La suma y la resta son permisible pero no la multiplicación ni la división. Las escalas de tiempo calendario, tiempo horario y de temperatura son muy buenos ejemplos de mediciones que empiezan desde un punto cero ubicado arbitrariamente y luego utilizan una distancia unitaria , igualmente arbitraria pero consistente, para expresar intervalos entre números.

2.14.4 DATOS DE PROPORCION: El nivel de medición que produce la información mas útil es proporcionada por los datos de proporción o razón, que son números que poseen todas las características de los datos de intervalos y además tienen razones con sentido porque están referidas a un punto cero absoluto natural que denota la ausencia total de la característica que se miden. Todas las operaciones aritméticas se pueden realizar . Ejemplos son las mediciones de salarios, edad, distancias, altura, pesos, volúmenes, etc.

2.15 ETAPAS BASICAS DEL METODO ESTADÍSTICO

Los aspectos básicos para desarrollar o realizar una investigación o experimento utilizando el método estadístico, donde se parte de la observación de fenómenos, cuyas condiciones de ocurrencia, pueden ser controlados o no por los investigadores, consta como mínimo de las siguientes etapas:

2.15.1 OBJETIVO DE LA INVESTIGACIÓN.

Antes de iniciar cualquier investigación se debe tener bien definido **Que** y porque se va a investigar, **Como** se llevara a cabo dicha investigación, es decir, en que condiciones y con cuales recursos. **Cuando** y **Donde** se va realizar. La contestación adecuada al Qué, Como, Cuando y Donde; su desglose en metas, tareas y actividades menores; La obtención de los recursos físicos, financieros, bibliográficos y humanos son fundamentales para el desarrollo del cronograma de la investigación.

2.15.2 UNIDAD DE INVESTIGACIÓN

Es el elemento de la población que origina la información y puede estar constituida por uno o varios individuos u objetos (un animal, una persona, una fabrica, un avión, etc) y denominarse simple o compleja. La unidad de investigación debe estar perfectamente identificada, y ser fácilmente mensurable.

2.15.3 DETERMINACION DE LA POBLACIÓN Y DE LA MUESTRA

Como habíamos definido anteriormente la población es el conjunto de todas las observaciones de interés para el investigador., también podemos definir la población como el conjuntos de todos los elementos que tienen características comunes. Es fundamental definir claramente la población a investigar clarificando si es finita o es infinita y dada la dificultad que implica trabajar con poblaciones grandes es necesario trabajar con subconjuntos o muestras de dicha población. Existen muchos métodos para seleccionar y calcular el tamaño de la muestra. (Este tema se desarrollará en estadística III)

2.15.4 RECOLECCION DE LA INFORMACIÓN

Una de las etapas mas importantes de la investigación estadística es la recolección de datos La información se puede recolectar por diferentes medios, entre los cuales los mas comunes son: por observación directa, por encuestas, por publicaciones y/o fuentes externas confiables que hallan realizados investigaciones estadísticas.

2.15.5 PROCESAMIENTO DE LA INFORMACIÓN

Consiste en ordenar la información, filtrarla, eliminando los posibles errores, (donde es fundamental el conocimiento de la población por parte de quien depura y filtra para poder detectar las falsedades en las respuestas), tabularla mediante la utilización de cuadros o tablas donde se resume la información de acuerdo al interés específico del investigador, y analizar la información mediante los métodos y normas estadísticos. Cabe anotar que para la presentación final hay que tener en cuenta a quien va dirigida la información por lo tanto es indispensable combinar gráficos, tablas y/o cuadros con el fin de que la información llegue con claridad y permita hacer los análisis fácilmente.

El avance tecnológico y la masificación de las computadoras hacen que estas tareas manualmente engorrosas sean realizadas fácilmente y en muy corto tiempo.

2.15.6 PUBLICACION

Es la etapa final de entrega de la información después de revisada, donde quedan consignados todo los resultados de la investigación. Estos resultados deben presentarse adecuadamente de tal forma que puedan servir para estudios posteriores.

TALLER MODULO 2

1. Visite los homepages de las principales revistas y lea como mínimo 3 artículos relacionados con su actividad
2. Lea los capítulos de introducción y generalidades que se encuentran en los cursos de estadística on line.
3. Averigüe como se diseñan las encuestas, haga un resumen de lo básico que deben contener y diseñe una encuesta de acuerdo a su actividad

Copyright © ;Ing. Enrique A Hurtado Minotta, all rights reserved

REVISTAS ELECTRONICAS

10. *Journal of Statistics Education*. Excelente revista (¡gratuita!) editada por la American Statistical Association sobre educación estadística (a todos los niveles)
11. Homepage de la American Statistical Association. La mayor asociación de estadísticos, editora de *Journal of Agricultural, Biological, and Environmental Statistics*, *Journal of the American Statistical Association*, *Journal of Statistics Education* y *The American Statistician* entre otras revistas.
12. *Environmental and Ecological Statistics*
13. *Community Ecology*
14. *Journal of Agricultural, Biological, and Environmental Statistics*
15. *Bulletin of the Ecological Society of America* (gratuita; contiene artículos de ecología estadística)
16. *Journal of Statistical Software* (gratuita)
17. *InterStat (Statistics on the Internet)* (gratuita)
18. Probability and Statistics Journals on the Web

ESTADISTICA ON LINE

55. Aula Virtual de Bioestadística, Universidad Complutense
56. Curso de bioestadística de la Universidad de Málaga
57. Apuntes de Bioestadística. Unidad de Bioestadística Clínica del Hospital Ramón y Cajal
58. Lecciones de Estadística, 5campus.org (análisis multivariante...)
59. Curso de Bioestadística de la Universidad Nacional de Misiones (Argentina)
60. Curso de estadística (para ingenieros) de una universidad mexicana
61. Cursos de estadística de la Universidad de California, Los Angeles
62. Cursos de estadística de la Universidad de Michigan
63. Electronic Statistics Textbook

64. A New View of Statistics
65. HyperStat Statistics Textbook
66. Statistics at Square One
67. Statistics Every Writer Should Know
68. Introductory Statistics: Concepts, Models, and Applications
69. Multivariate Statistics: Concepts, Models, and Applications
70. A complete guide to nonlinear regression
71. Ordination Methods for Ecologists
72. Annotated Bibliography of Canonical Correspondence Analysis and related constrained ordination methods 1986-1993
73. Multivariate Statistics: an Introduction
74. A glossary of ordination-related terms
75. Glossary of Statistical Terms and Medical Citations for Statistical Issues
76. Glossary of over 30 statistical terms
77. EVSC 503 Applied Statistics for the Environmental Sciences
78. <http://s9000.furman.edu/mellonj/spss1.htm>
79. <http://www.indiana.edu/~statmath/stat/spss/win/index.html>
80. <http://www.utexas.edu/cc/stat/tutorials/spss/SPSS1/Outline1.html>
81. <http://web.uccs.edu/lbecker/SPSS/content.htm>
82. <http://core.ecu.edu/psyc/wuenschk/SPSS/SPSS-Data.htm>
83. <http://www.tulane.edu/~panda2/Analysis2/ahome.html>
84. <http://www.shef.ac.uk/~scharr/spss/index2.htm>
85. <http://calcnet.mth.cmich.edu/org/spss/index.html>
86. <http://calcnet.mth.cmich.edu/org/spss/toc.htm>
87. <http://www.public.asu.edu/~pythagor/spssworkbook.htm>
88. <http://lib.stat.cmu.edu/>
89. <http://www.stat.ufl.edu/vlib/statistics.html>
90. <http://www.statserv.com/software.html>
91. <http://www.maths.uq.edu.au/~gks/webguide/>
92. <http://www.statistics.com/>
93. <http://www.helsinki.fi/~jpuranen/links.html#stc>
94. <http://www.maths.uq.edu.au/~gks/webguide/free.html>
95. <http://nhsbig.inhs.uiuc.edu/>
96. <http://www.okstate.edu/artsci/botany/ordinate/software.htm>
97. <http://life.bio.sunysb.edu/ee/biometry/>

98. <http://life.bio.sunysb.edu/morph/software.html>
 99. <http://pbil.univ-lyon1.fr/ADE-4/ADE-4.html>
 100. http://ourworld.compuserve.com/homepages/Rainer_Wuerlaender/statsoft.htm
 101. <http://www.stat.auckland.ac.nz/~mja/Programs.htm>
 102. <http://it.stlawu.edu/~rlock/maa99/>
 103. <http://it.stlawu.edu/~rlock/tise98/java.html>
 104. <http://www.stat.vt.edu/~sundar/java/applets/>
 105. <http://www.kuleuven.ac.be/ucs/java/index.htm>
 106. <http://noppa5.pc.helsinki.fi/koe/>
 107. <http://www2.kenyon.edu/people/hartlaub/MellonProject/mellon.html>
- Demostraciones Java para el aprendizaje de la estadística
108. *Electronic Textbook (UCLA)*, programa *on-line* de representación y cálculo de funciones de densidad y de distribución (normal, F , ji-cuadrado, números aleatorios...). Equivalente a un libro de tablas

BIBLIOGRAFÍA

22. Montgomery Douglas y Runger George.(1996), Probabilidad y Estadística aplicada a la Ingeniería., McGraw-Hill, Mexico
23. Montgomery Douglas y Hines William.(1995), Probabilidad y Estadística aplicada a la Ingeniería. y Administración, segunda edición ,CECSA, México
24. Mendenhall William, Wackerly Dennis y Scheaffer Richard (1994), Estadística Matemáticas con Aplicaciones , segunda edición, Grupo Editorial Iberoamerica. M, México
25. Govinden Portus Lincoyan.(1998), Introducción a la Estadística., McGraw-Hill, Santafé de Bogotá
26. Webster Allen L.(1998), Estadística aplicada a la Empresa y a la Economía, segunda edición, McGraw-Hill, Madrid
27. Kohler Heinz.(1996), Estadística para Negocios y Economía, primera edición ,CECSA, México
28. Martinez Bencardino Ciro (1995), Estadística , sexta edición ,ECOE EDICIONES Santafé de Bogotá.
29. Alvarez C Ricardo (1994), Estadística Fundamental Aplicada, primera edición ,PUBLIADCO, Cali
30. Estadística," Enciclopedia Microsoft® Encarta® 2000. © 1993-1999 Microsoft Corporation.
31. Stockburger David W (1996) Introductory Statistics: Concepts, models an applications, , <http://www.psychstat.smsu.edu/sbk00.htm>
32. Mendoza Duran Carlos. (1995)Probabilidad y Estadística, <http://w3.mor.itesm.mx/~cmendoza/ma835/ma83500.html>

33. Valdés Fernando ,Comprensión y uso de la estadística,
<http://www.cortland.edu/flteach/stats/glos-sp.html>
34. Hurtado Minotta Enrique A, Reflexiones para el Currículo,
<http://www.geocities.com/soho/atrium/7521/tesis.html>
35. Academic Freedom , www.hrw.org/wr2k/issues-01.htm
36. Gonzalez Felipe, Africa : El silencio de los tambores,
www.arrakis.es/~trazeg/gonzalez.html.
37. El año 2000, WWW.arrakis.es/~trazeg/anno2000.html
38. Mendenhall, W.; D.D. Wackerly y R.L. Scheaffer. *Estadística Matemática con Aplicaciones*. Grupo Editorial Iberoamérica. México.
39. Freund, John E. y Gary A. Simon. *Estadística elemental*. Prentice-Hall Hispanoamericana, SA. México, 1994. (8ª edición.)
40. Spiegel, M.R. *Estadística*. McGraw-Hill. México. (Serie Schaum.)
41. <http://www.unl.edu.ar/fave/sei/encuestas/index.html>.
42. Wonnacott, Thomas H. y Ronald J. Wonnacott (1998) *Introducción a la estadística*. Limusa/IPN. México.

MODULO III

GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

La mejor forma de visualizar de un solo golpe la información de un conjunto de observaciones o datos, que conforman una población , ya sea que estén organizados en tablas y cuadros , es mediante las representaciones gráficos.

Estas representaciones tienen la gran ventaja, de que no se necesita mucha formación para entender e interpretar la información que en ellos se consignan , por lo tanto llega con la misma facilidad al pueblo común y corriente , lo mismo que a los profesionales de cualquier rama del saber.

La entrega de la información en gráficos , diagramas o dibujos es un verdadero arte funcional, que no solamente sirve para presentar datos, eventos u observaciones sino también para expresar ideas que se quieren resaltar o destacar.

Al preparar un grafico , el estadístico se manifiesta como un artista , que aporta su imaginación y su temperamento para comunicar un mensaje que su auditorio debe asimilar.

Entre los gráficos mas importantes tenemos, los gráficos de líneas, gráficos de barras, gráficos circulares, gráficos, gráficos de área, histogramas, ojivas y pictogramas.

Actualmente hay infinidades de paquetes estadísticos que en abrir y cerrar de ojos ejecutan rutinas y subrutinas que elaborar con gran rapidez cualquier representación grafica.

3.1 GRAFICOS

Un grafico o diagrama es un dibujo complementario a una tabla o cuadro que permite observar las tendencias de un fenómeno en estudio y facilita el análisis estadístico de las variables relacionadas.

Todo grafico , al igual que todo cuadro, debe estar compuesta por las siguientes partes como mínimo:

- **Título o nombre:** Este debe ser claro y conciso , de tal forma que responda a las preguntas , sobre lo que se relaciona , cuando, como y donde se hicieron las observaciones.
- **Cuerpo :** El cuerpo es el grafico en si , cuya elección debe considerar los diferentes tipos de variables a relacionar, el publico a quien va dirigido y el diseño artístico del grafico.
- **Nota de pie de grafico:** Aquí se presentan aclaraciones respecto al grafico , las escalas de los ejes o se otorgan créditos a las fuentes respectivas..

3.1.1 GRAFICOS DE LINEAS:

Usado principalmente para mostrar el comportamiento de variables cuantitativas a través de tiempo. Esta conformado por la unión de segmentos rectilíneos, que resaltan las variaciones de las variables. Generalmente la variable independiente siempre va en el eje de la abscisa y la variable dependiente en el eje de la ordenada.

EJEMPLO 1

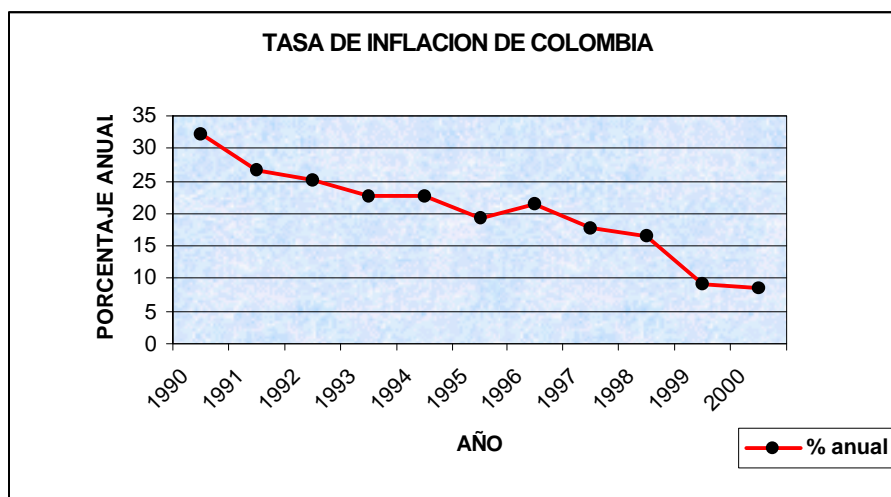
Utilizando un grafico de líneas . graficar la información del cuadro 3.1

CUADRO 3.1
TASA DE INFLACIÓN EN COLOMBIA
PERIODO 1990 - 2000

Año	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
% anual	32.36	26.82	25.13	22.60	22.59	19.46	21.63	17.68	16.70	9.23	8.75

Fuente : Dane
DESARROLLO

GRAFICO 3.1
TASA DE INFLACIÓN ANUAL DE COLOMBIA
PERIODO 1990 - 2000



Como se puede observar del grafico 3.1, la tasa de inflación colombiana desde la ultima década del siglo XX, viene mostrando una disminución continua , partiendo de un 32.36% en 1990 hasta un 8.75% en el año 2000., consecuencia de la política económica del país

EJEMPLO 2

Utilizando la información del cuadro 3.2 mediante graficas de líneas muestre :

1. La tendencia del promedio de la tasa representativa para el periodo 1993 – 2001
2. Compare la tendencia de la tasa representativa para el mes de enero y el promedio anual.
3. La tendencia para los meses de enero, junio, diciembre y el promedio , use líneas compuestas o apiladas

CUADRO 3.2

COLOMBIA, TASA REPRESENTATIVA DEL MERCADO * PERIODO 1993 - 2001

Pesos por dólar

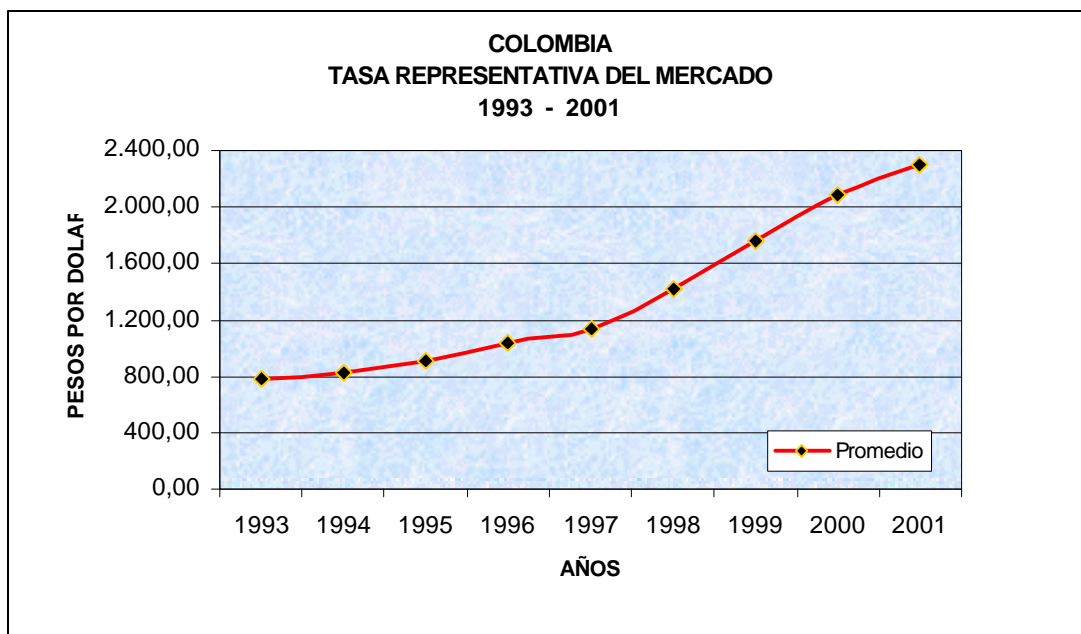
Mes	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
Enero	745,52	816,15	846,63	1.011,19	1.027,06	1.323,16	1.570,01	1.922,46	2.240,80
Febrero	749,08	817,67	850,90	1.029,64	1.074,24	1.346,12	1.567,07	1.950,64	2.257,45
Marzo	764,38	819,76	865,83	1.044,98	1.062,16	1.357,10	1.550,15	1.956,26	2.310,57
Abril	771,79	829,87	873,39	1.050,93	1.060,55	1.360,65	1.574,67	1.986,77	2.346,73
Mayo	779,71	841,40	876,95	1.066,24	1.075,18	1.386,28	1.641,33	2.055,88	2.324,98
Junio	784,24	830,94	874,86	1.071,96	1.082,37	1.386,61	1.693,99	2.119,54	2.298,85
Julio	795,08	819,06	893,22	1.064,10	1.102,40	1.371,54	1.818,63	2.160,34	2.298,27
Agosto	804,61	814,82	935,10	1.044,84	1.132,70	1.390,46	1.876,93	2.187,63	2.301,23
Septiembre	809,66	830,06	964,17	1.040,84	1.222,49	1.520,52	1.975,64	2.214,02	2.332,19
Octubre	814,45	839,32	984,96	1.015,78	1.262,89	1.587,38	1.978,71	2.174,77	2.310,02
Noviembre	814,08	830,03	1.000,58	998,18	1.294,56	1.562,71	1.944,64	2.136,74	2.308,59
Diciembre	803,53	829,19	988,18	1.000,55	1.296,87	1.523,64	1.889,20	2.185,84	2.291,18
Promedio	786,34	826,52	912,90	1.036,60	1.141,12	1.426,35	1.756,75	2.087,57	2.301,74

- Se refiere a la tasa promedio, calculada considerando únicamente los días hábiles

DESARROLLO

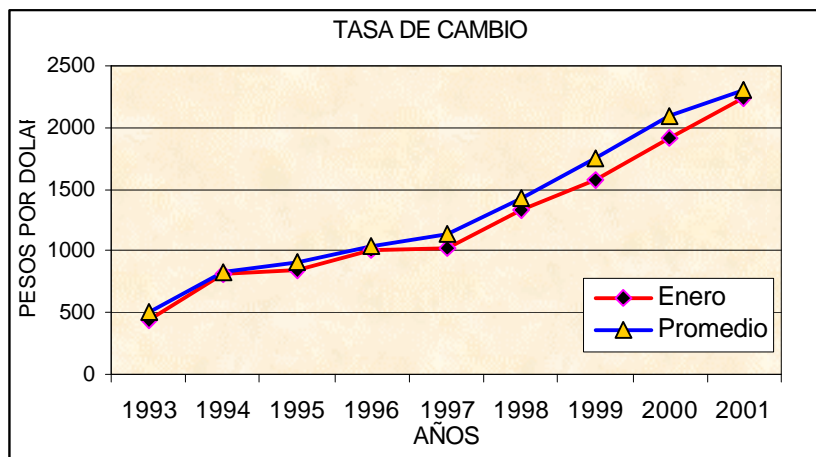
1. En grafico 3.2 observamos el crecimiento gradual de la tasa representativa a través del periodo en consideración, pasando 786.34 pesos por dólar en 1993 a 2301.34 en el 2001 lo que representa un incremento porcentual de 192.72 % respecto a 1993.

GRAFICO 3.2 COLOMBIA, TASA REPRESENTATIVA DEL MERCADO * PERIODO 1993 - 2001



- 2 La grafica 3.3 muestra el comportamiento de la tasa representativa durante el periodo en consideración para el promedio anual y el mes de enero de cada año. Nótese que el crecimiento para los meses de enero es de 200.57%, un 7.85% ligeramente superior al incremento del promedio anual .

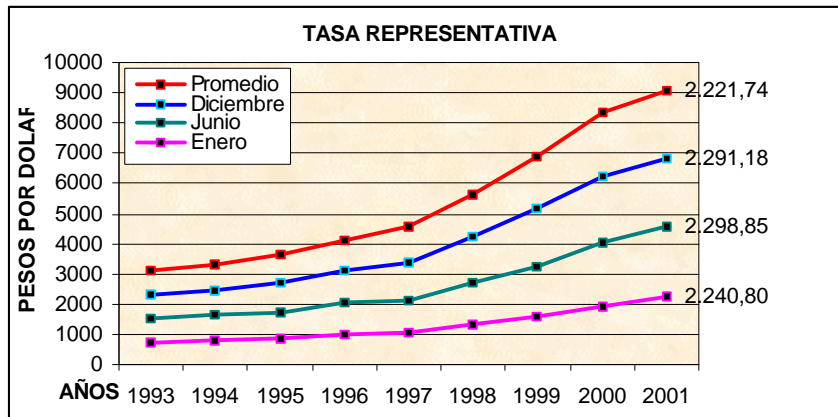
GRAFICO 3.3
COLOMBIA, TASA REPRESENTATIVA DEL MERCADO *
PERIODO 1993 - 2001



2. En el grafico 3.4 se muestra la tendencia de los meses a través del periodo en consideración; obsérvese que aquí se presenta la tendencia del aporte de cada valor a lo largo del tiempo..

GRAFICO 3.4

COLOMBIA, TASA REPRESENTATIVA DEL MERCADO *
PERIODO 1993 - 2001



3.1. 2 GRÁFICOS DE BARRAS

Esta constituido por barras rectangulares de igual anchura, con separaciones iguales entre si. La dimensión mayor de los rectángulos debe ser proporcional a la variable dependiente y la dimensión menor se escoge con el criterio de que los rectángulos no queden juntos, pegados o traslapados. Se utilizan generalmente para mostrar, comparar y resaltar las diferencias entre eventos sucesivos en un conjunto de datos y/o frecuencias de variables cualitativas o comportamiento en el tiempo , cuando el numero de observaciones o datos es reducido.

Pueden ser de barras horizontales, barras verticales, barras compuestas horizontales o verticales y barras apiladas. Todas estas barras pueden ser en valores absolutos o en valores relativos o porcentuales.

Cabe anotar que al comparar varias poblaciones entre si , cuando los tamaños de las poblaciones son diferentes, es conveniente utilizar las frecuencias relativas, ya que en otro caso podrían resultar engañosas.

EJEMPLO 3

A partir de la información consignada en el cuadro 3.3 elaborar los siguientes gráficos:

1. Un grafico de barras compuestas
2. Un grafico de barras apiladas en %
3. Un grafico de barras apiladas en valores absolutos
4. Un grafico de barras simples para la facultad de medicina

CUADRO 3.3
ESTUDIANTES MATRICULADOS
UNIVERSIDAD ABC
PERIODO 1996 - 2000

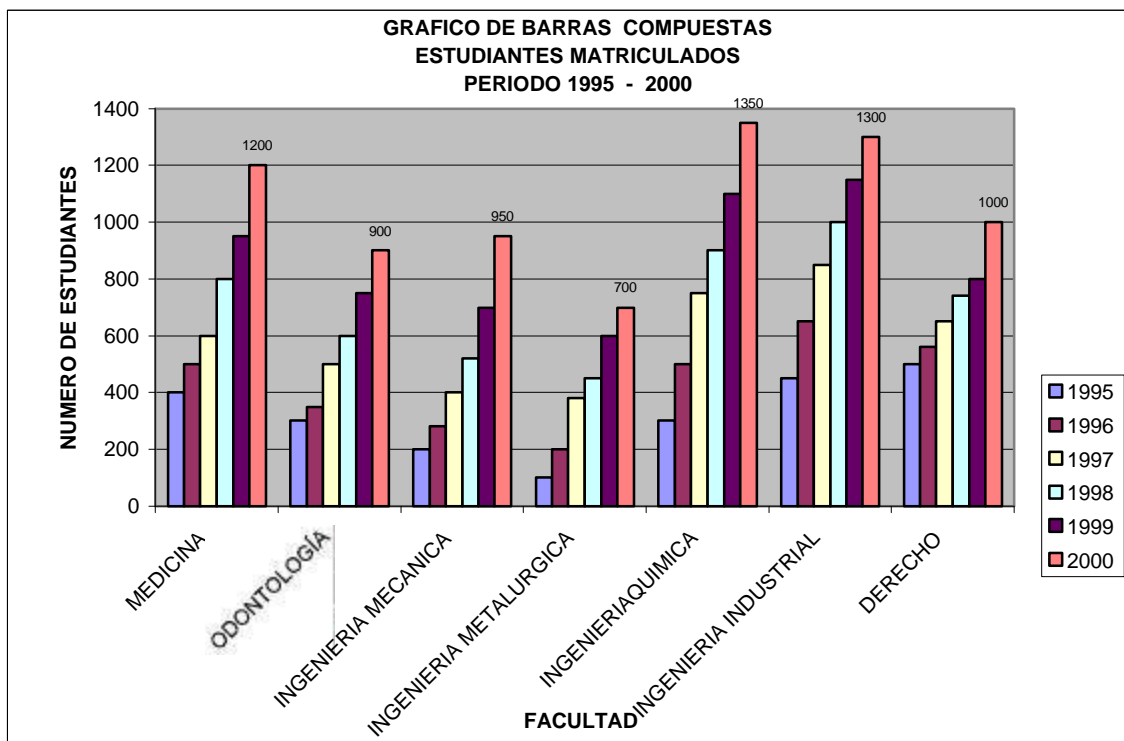
Año	1995	1996	1997	1998	1999	2000	TOTALES
MEDICINA	400	500	600	800	950	1200	4450
ODONTOLOGÍA	300	350	500	600	750	900	3400
INGENIERIA MECANICA	200	280	400	520	700	950	3050
INGENIERIA METALURGICA	100	200	380	450	600	700	2430
INGENIERIAQUIMICA	300	500	750	900	1100	1350	4900
INGENIERIA INDUSTRIAL	450	650	850	1000	1150	1300	5400
DERECHO	500	560	650	740	800	1000	4250
TOTALES	2250	3040	4130	5010	6050	7400	27880

DESARROLLO

Todos los gráficos de este ejemplo se elaboraron utilizando el software de Excel.

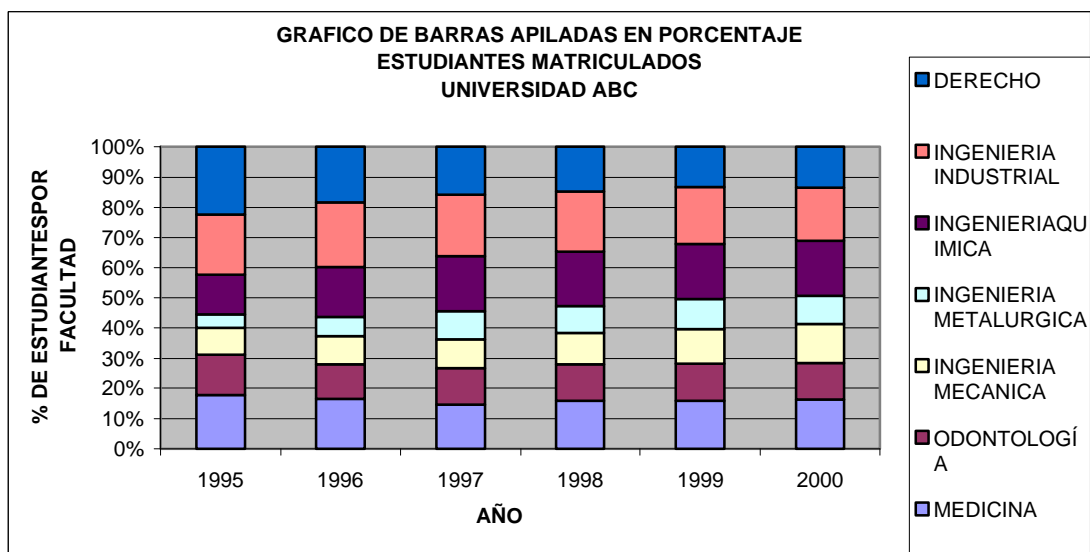
1. En el grafico 3.5 se muestran y se comparan el numero de estudiantes matriculados en cada facultad por año.

GRAFICO 3.5
ESTUDIANTES MATRICULADOS
UNIVERSIDAD ABC
PERIODO 1996 - 2000



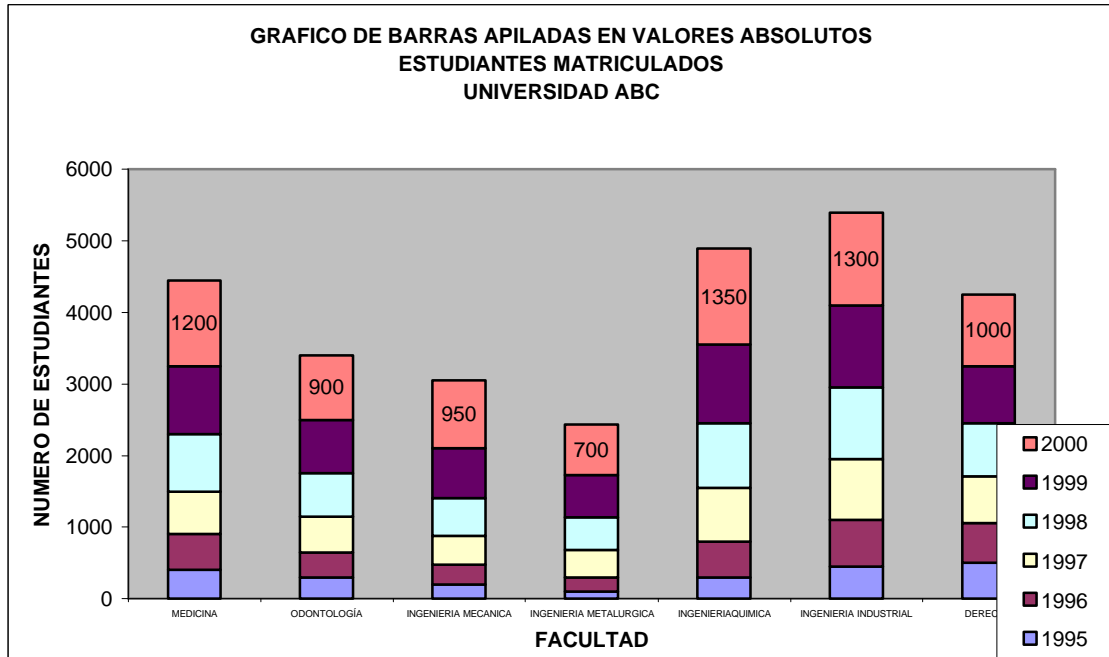
2. En el grafico 3.6 se muestran en barras apiladas los porcentajes correspondiente al numero de estudiantes matriculados en cada facultad por año. Nótese que el porcentaje en cada barra o rectángulo apilado es siempre el 100%.

ESTUDIANTES MATRICULADOS
GRAFICO 3.6
UNIVERSIDAD ABC
PERIODO 1996 - 2000



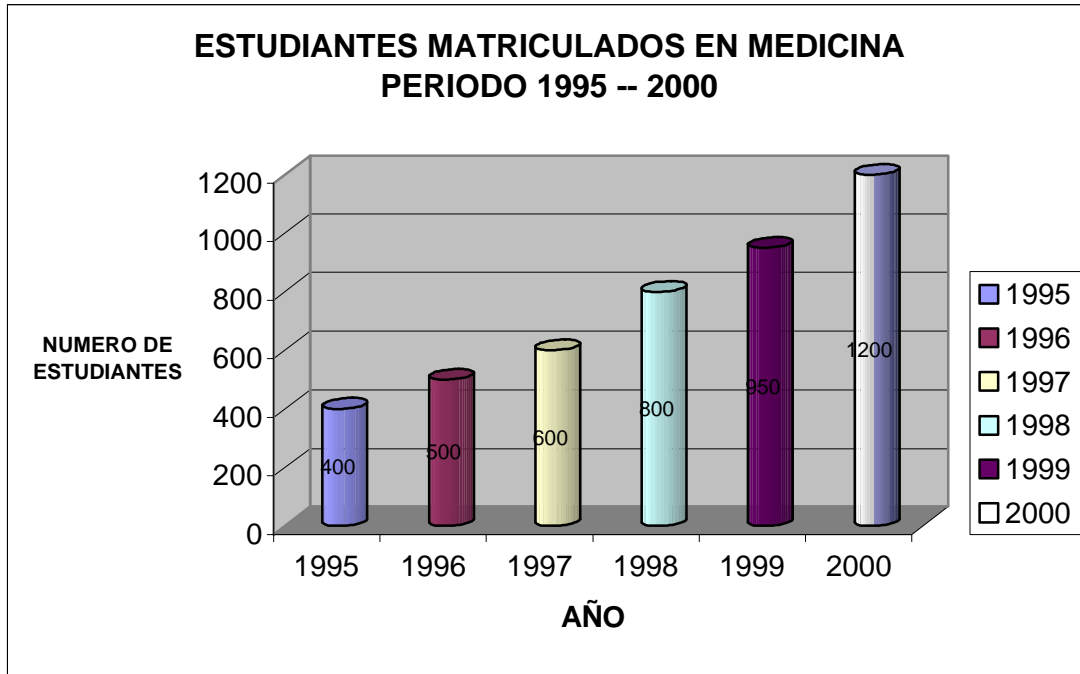
3. En el grafico 3.7 se muestra en barras apiladas en valores absolutos el numero de estudiantes por facultad para el periodo en consideración.

**GRAFICO 3.7
ESTUDIANTES MATRICULADOS
UNIVERSIDAD ABC
PERIODO 1996 - 2000**



5. En el grafico 3.8 se muestran en barras circulares simples el numero de estudiantes matriculados en la facultad de medicina por año.

**GRAFICO 3.8
ESTUDIANTES MATRICULADOS
FACULTAD DE MEDICINA
PERIODO 1996 - 2000**



3.1. 3 GRAFICOS CIRCULARES

También llamados de sectores , tortas o pasteles, por su forma de circunferencia dividida en sectores por medio de radios que dan la impresión de un torta partida en porciones. Estos gráficos pueden ser cerrados o explosionados o abiertos.

Se usan para representar variables cualitativas en valores absolutos o en porcentajes. Para su construcción se sigue el siguiente procedimiento.

- Exprese cada categoría o clase en porcentaje respecto al total de la información
- Convierta cada porcentaje a grados multiplicándolo por 3.6 ya que el 1% equivale a 3.6 grados.
- Escoja un diámetro de tal forma que facilite la visualización de la información.
- Represente en el círculo cada una de las categoría de acuerdo a su magnitud en grados.
- Identifique cada sector con el nombre de la categoría o clase y/o el porcentaje
- Identifique artísticamente cada sector y bautice el grafico.

EJEMPLO 4

Utilizando la información del cuadro 3.3 construir :

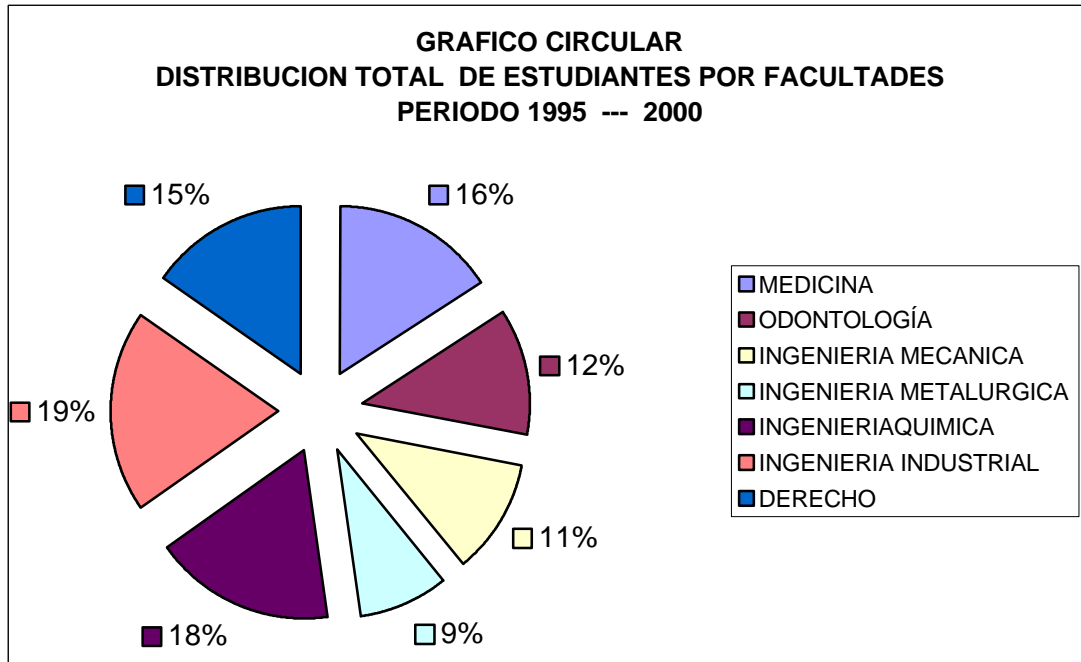
1. Un grafico circular abierto que muestre la distribución porcentual de los estudiantes por facultad para el periodo 1995 - 2000
2. Un grafico circular tridimensional que muestre lo pedido en 1
3. Un grafico circular abierto que muestre la distribución de los estudiantes por el numero de ellos matriculados en cada facultad
4. Un grafico circular cerrado que muestre la distribución porcentual de los estudiantes por facultad para el periodo 1995 - 2000

DESARROLLO

Todos los gráficos de este ejemplo fueron elaborados con Excel

1. En este gráfico podemos observar que los estudiantes matriculados en la facultad de ingeniería industrial representa el 19% del total de estudiantes matriculados en el periodo analizado.

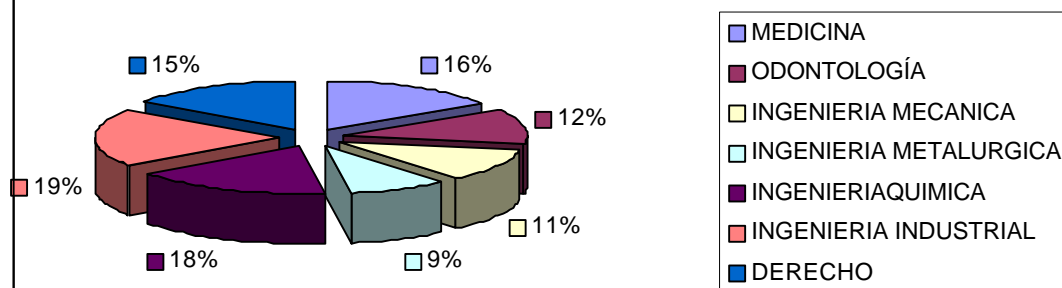
GRAFICO 3.9



2. Este gráfico 3.10 tridimensional muestra la misma información que el anterior, lo que lo hace interesante es que es un cuadro muy agradable a la vista. Nótese que la facultad con menor participación es la de ingeniería metalúrgica con solo el 9%.

GRAFICO 3.10

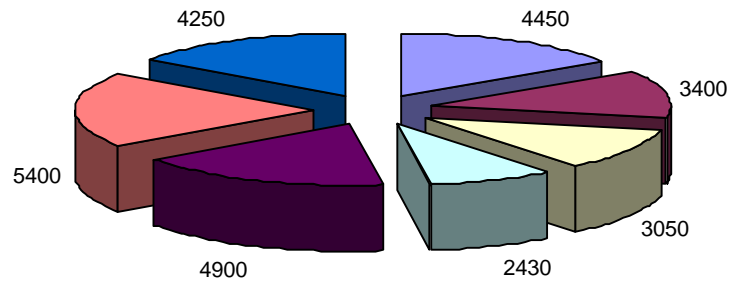
GRAFICO CIRCULAR
DISTRIBUCION TOTAL DE ESTUDIANTES POR FACULTADES
PERIODO 1995 — 2000



3. En el grafico 3.11 se muestra el numero de estudiantes por facultad para el periodo 1995 – 2000

GRAFICO 3.11

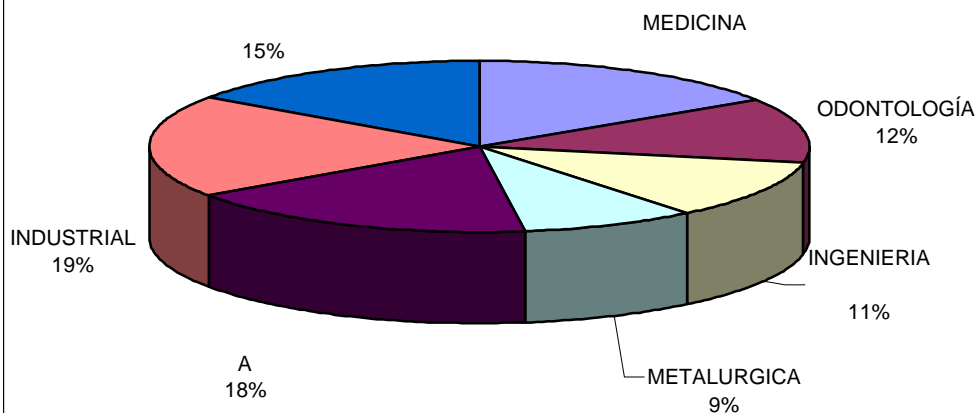
**GRAFICO CIRCULAR
DISTRIBUCION TOTAL DE ESTUDIANTES POR
FACULTADES PERIODO 1995 - 2000**



4. En grafico 3.12 se muestra el porcentaje de estudiante matriculados que conforman cada facultad.

GRAFICO 3.12

**GRAFICO CIRCULAR
FACULTADES PERIODO 1995 - 2000**



3.1.4 HISTOGRAMAS FRECUENCIAS

Los histogramas se construyen dibujando barras contiguas que tienen como base la anchura o tamaño de los intervalos y como altura las frecuencias respectivas de cada intervalo de clase. Los histogramas pueden ser en valores absolutos , valores relativos.

EJEMPLO 5

Con la información del cuadro 3.4 , construir usando Excel

1. Un histograma de 8 intervalos en valores absolutos
2. Un histograma de 8 intervalos en valores relativos
3. Un histograma ordenado (Pareto) en valores absolutos y relativos
4. Repetir 1 utilizando SPSS 11

CUADRO 3.4

PRODUCCION DE ALAMBRON DE 9.5 mm EN TONS
PERIODO 1999 - 2001

	1998	1999	2000	2001	TOTALES
ENERO	1000	800	1400	1700	4900
FEBRERO	1500	1100	1800	2500	6900
MARZO	2000	1400	2200	3300	8900
ABRIL	2500	1700	2600	4100	10900
MAYO	3000	2000	3000	4900	12900
JUNIO	3500	2300	3400	5700	14900
JULIO	4000	2600	3800	6500	16900
AGOSTO	4500	2900	4200	7300	18900
SEPTIEMBRE	5000	3200	4600	8100	20900
OCTUBRE	5500	3500	5000	8900	22900
NOVIEMBRE	6000	3800	5400	9700	24900
DICIEMBRE	6500	4100	5800	10500	26900
TOTALES	46998	31399	45200	75201	190800

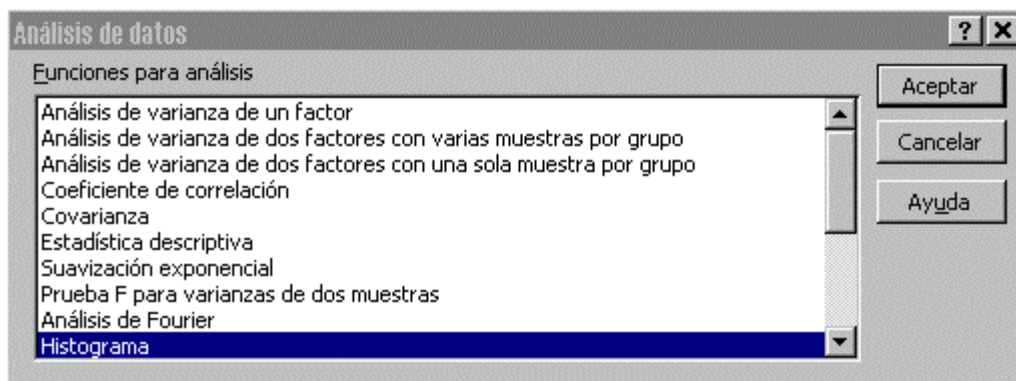
DESARROLLO

Para construir seguimos el siguiente procedimiento:

1. Digitamos o copiamos la información en la ventana de Excel, tal como se muestra en figura.

Archivo Edición Ver Insertar Formato Herramientas Datos Ventana ?							
B4 = 1000							
	A	B	C	D	E	F	G
1		PRODUCCION DE ALAMBRON DE 9.5 mm EN TONS					
2		PERIODO 1999 - 2001					
3		1998	1999	2000	2001	TOTALES	INTERVALOS
4	ENERO	1000	800	1400	1700	4900	800
5	FEBRERO	1500	1100	1800	2500	6900	2200
6	MARZO	2000	1400	2200	3300	8900	3600
7	ABRIL	2500	1700	2600	4100	10900	5000
8	MAYO	3000	2000	3000	4900	12900	6400
9	JUNIO	3500	2300	3400	5700	14900	7800
10	JULIO	4000	2600	3800	6500	16900	9200
11	AGOSTO	4500	2900	4200	7300	18900	
12	SEPTIEMBRE	5000	3200	4600	8100	20900	
13	OCTUBRE	5500	3500	5000	8900	22900	
14	NOVIEMBRE	6000	3800	5400	9700	24900	
15	DICIEMBRE	6500	4100	5800	10500	26900	
16	TOTALES	46998	31399	45200	75201	190800	

- En la ventana de excel clickeamos en herramientas, análisis de datos y aparece la siguiente ventana.



- Sombreamos histograma y damos aceptar y aparece la siguiente ventana

4. En la ventana anterior se introduce los rangos de la información (aparecen en rojo en la ventana principal) y se chulea la casillas para PARETO si queremos el histograma ordenado de mayor a menor; si no lo queremos ordenado dejamos en blanco esta casilla. Chuleamos porcentaje acumulado y crear grafico y obtenemos un histograma el cual editamos siguiendo la instrucciones del programa.

CUADRO 3.5
TABLA DE FRECUENCIA*
PRODUCCION DE ALAMBRON DE 9.5 mm EN TONS
PERIODO 1999 – 2001

TONELADAS	Frecuencia	% acumulado	TONELADAS	Frecuencia	% acumulado
800	1	2,08%	3600	13	27,08%
2200	11	25,00%	2200	11	50,00%
3600	13	52,08%	5000	11	72,92%
5000	11	75,00%	6400	5	83,33%
6400	5	85,42%	7800	3	89,58%
7800	3	91,67%	9200	2	93,75%
9200	2	95,83%	10600	2	97,92%
10600	2	100,00%	800	1	100,00%
y mayor...	0	100,00%	y mayor...	0	100,00%

CUADRO 3.6
TABLA DE FRECUENCIA*
PRODUCCION DE ALAMBRON DE 9.5 mm EN TONS
PERIODO 1999 – 2001

PRODUCCION	FRECUENCIA
800 x < 2200	1

2200	x < 3600	11
3600	x < 5000	13
5000	x < 6400	11
6400	x < 7800	5
7800	x < 9200	3
9200	x < 10600	2
10600	x < 12000	2
TOTAL		48

- Se construyó esta tabla de frecuencia a partir de la edición del histograma obtenido.

CUADRO 3.6
TABLA DE FRECUENCIA
PRODUCCION DE ALAMBRO DE 9.5 mm EN TONS
PERIODO 1999 – 2001

Clase	Frecuencia	% acumulado
800 - 2200	1	2,08%
2200 - 3600	11	25,00%
3600 - 5000	13	52,08%
5000 - 6400	11	75,00%
6400 - 7800	5	85,42%
7800 - 9200	3	91,67%
9200 - 10600	2	95,83%
10600 - 12000	2	100,00%

GRAFICO 3.13
PRODUCCION DE ALAMBRO DE 9.5 mm EN TONS
PERIODO 1999 – 2001

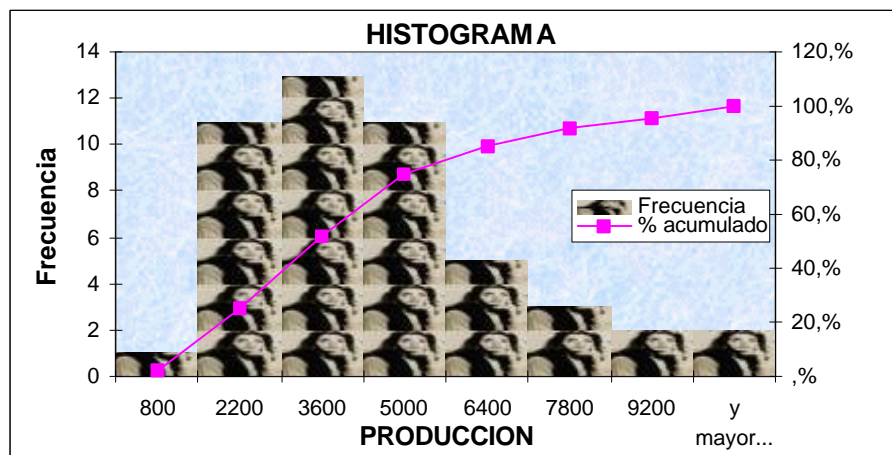
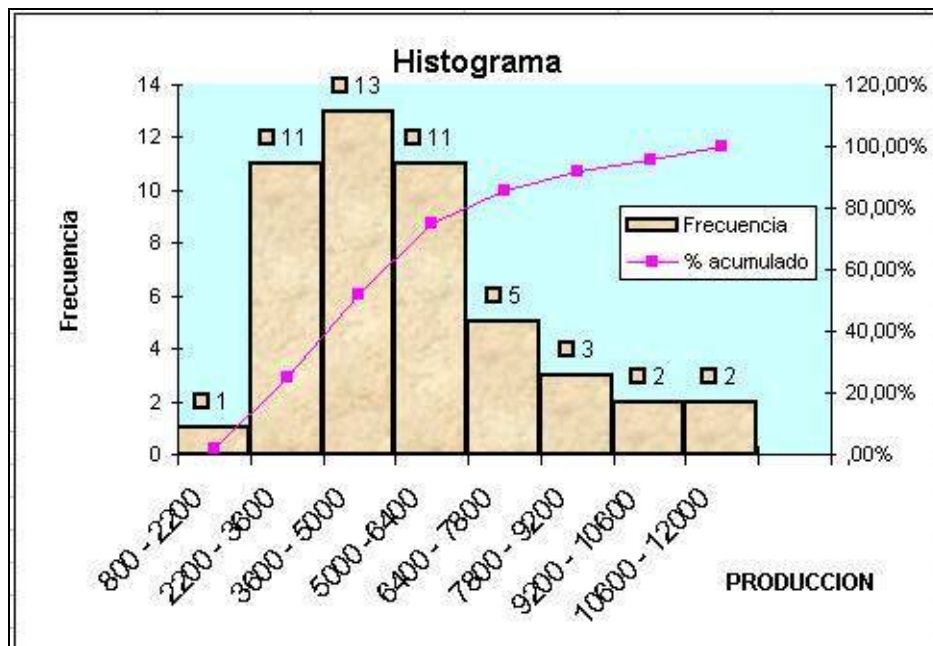
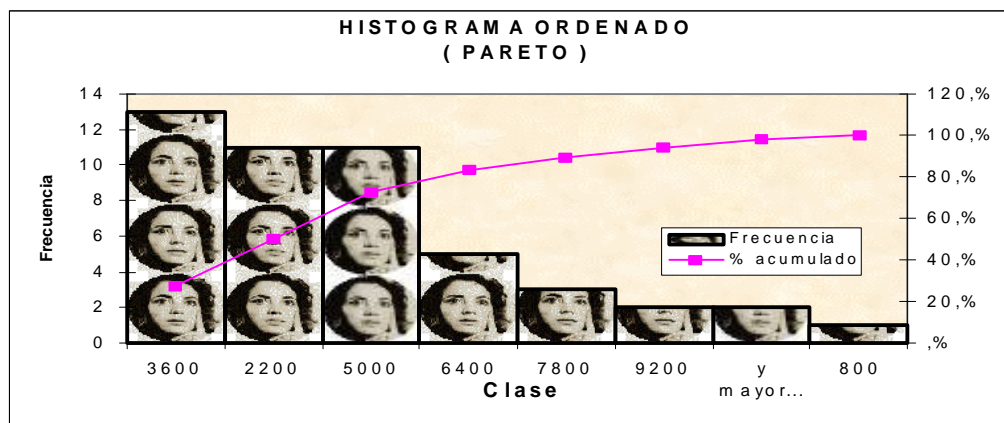


GRAFICO 3.14
PRODUCCION DE ALAMBRO DE 9.5 mm EN TONS
PERIODO 1999 – 2001



En los gráficos 3.13 y 3.14 se muestran histogramas en valores absolutos y en valores relativos ya editados de la producción de alambro. En el grafico 3.15 se muestra un histograma ordenado en valores absolutos y en valores relativos.

GRAFICO 3.14
PRODUCCION DE ALAMBRO DE 9.5 mm EN TONS
PERIODO 1999 – 2001



5. En el grafico 3.16 se muestra el histograma pedido en valores absolutos y en grafico 3.17 el mismo grafico con los ejes intercambiados. Lo importante a resaltar es como la frecuencia en los intervalos varía ligeramente debido a que SPSS trabajó con intervalo cerrado por la izquierda y abierto por la derecha . mientras que Excel trabajó con intervalos abierto por la izquierda y cerrado por la derecha. Para cualquier análisis cualquiera de las forma es correcta.

GRAFICO 3.16
PRODUCCION DE ALAMBRON DE 9.5 mm EN TONS
PERIODO 1999 – 2001

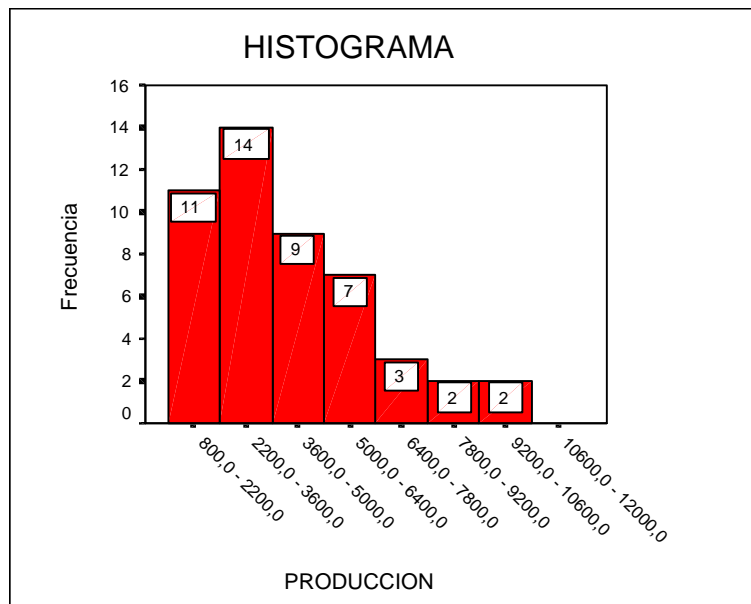
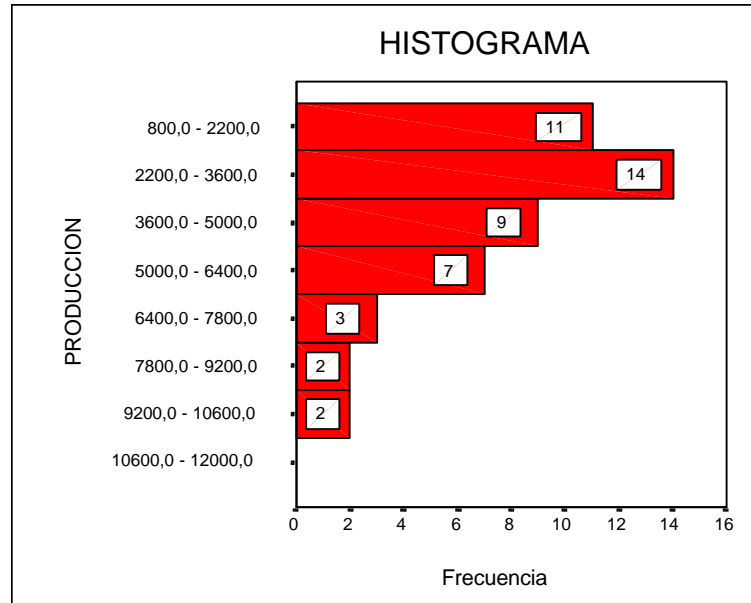


GRAFICO 3.17
PRODUCCION DE ALAMBRON DE 9.5 mm EN TONS
PERIODO 1999 – 2001



3.1.5 HISTOGRAMAS DE FRECUENCIAS ACUMULADAS

Se obtiene a partir de una distribución de frecuencias, tomando en el eje horizontal las fronteras de clase de cada intervalo de la variable y en el eje vertical las frecuencias acumuladas correspondientes a cada intervalo de clase. Puede construirse en valores absolutos o en valores relativos.

En el grafico 3.18 se muestra un histograma de frecuencias acumulada en valores relativos y 3.19 en valores absolutos.

**GRAFICO 3.18
PRODUCCION DE ALAMBRO DE 9.5 mm EN TONS
PERIODO 1999 – 2001**

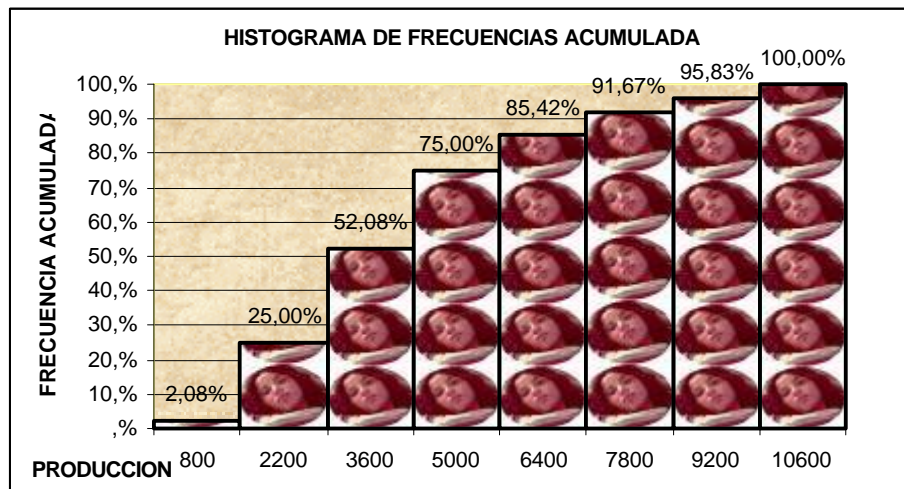
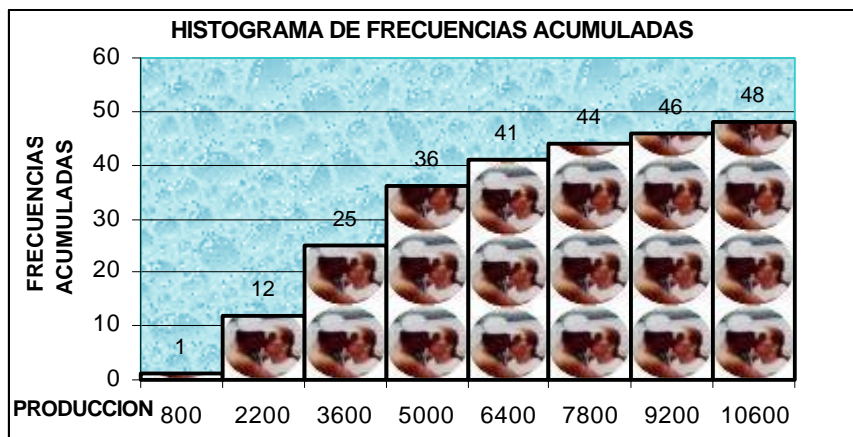


GRAFICO 3.19

**PRODUCCION DE ALAMBRO DE 9.5 mm EN TONS
PERIODO 1999 – 2001**

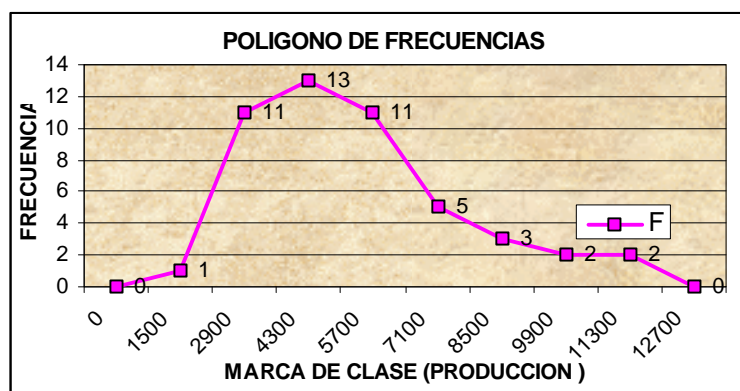


3.1.6 POLIGONOS DE FRECUENCIA

Se construyen a partir de una distribución de frecuencia , uniendo los puntos medios superiores de los rectángulos de un histograma de frecuencias absolutas o relativas. Estos puntos medios corresponden a las marcas de clase de los intervalos de clase, Los polígonos pueden ser en valores absolutos o en valores relativos.

En la grafica 3.20 se muestra el polígono de frecuencia en valores absolutos de los datos del cuadro 3.4

**GRAFICO 3.20
PRODUCCION DE ALAMBRO DE 9.5 mm EN TONS
PERIODO 1999 – 2001**



3.1.7 OJIVAS

Llamados también polígonos de frecuencias acumuladas. Se construyen a partir una distribución de frecuencia acumulada uniendo cada valor de frecuencia acumulada en eje

vertical con su respectivo valor de frontera de clase en eje horizontal. Pueden ser mayor o menor que en valores absolutos o en valores relativos.

En los gráficos 3.21 y 3.22 se muestran las ojivas en valores absolutos y valores relativos de los datos del cuadro 3.4

GRAFICO 3.21
PRODUCCION DE ALAMBRO DE 9.5 mm EN TONS
PERIODO 1999 – 2001

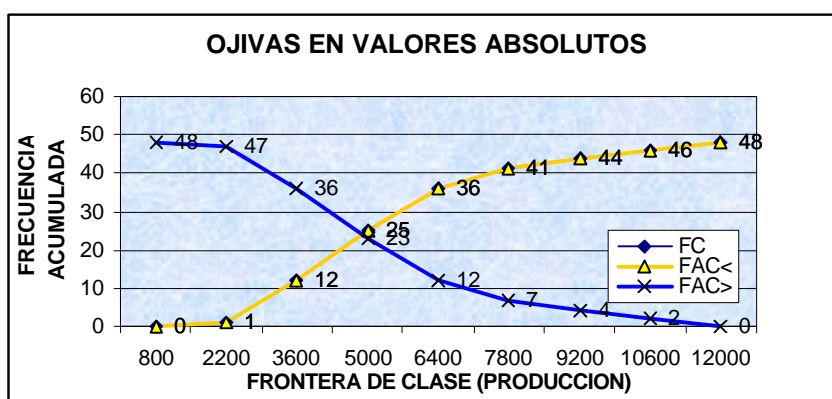
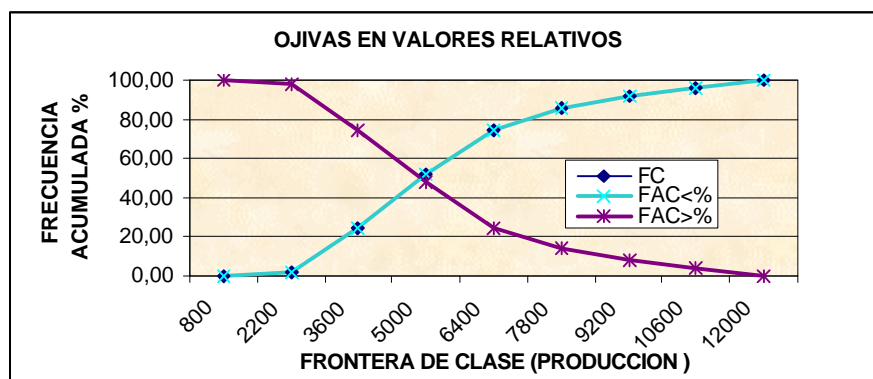


GRAFICO 3.22
PRODUCCION DE ALAMBRO DE 9.5 mm EN TONS
PERIODO 1999 – 2001



3.1.8 PICTOGRAMAS

Expresan con dibujos alusivos al tema en consideración las frecuencias de las modalidades de la variable. Estos gráficos se hacen representando a diferentes escalas un mismo dibujo. El escalamiento de los dibujos debe ser tal que el área de cada uno de ellos sea proporcional a la frecuencia de la modalidad que representa. Los pictogramas se utilizan para mostrar comparaciones impactantes, llamando de esta manera la atención del público, independiente de su nivel cultural.

Este tipo de gráfico se utiliza mucho en los medios de comunicación donde los expertos ponen en juego su creatividad e ingenio con el fin de llamar la atención del auditorio con una vistosa y llamativa presentación de los datos.

EJEMPLO 6

Utilizando un pictograma representar la población de conejos que se muestra en la tabla adjunta

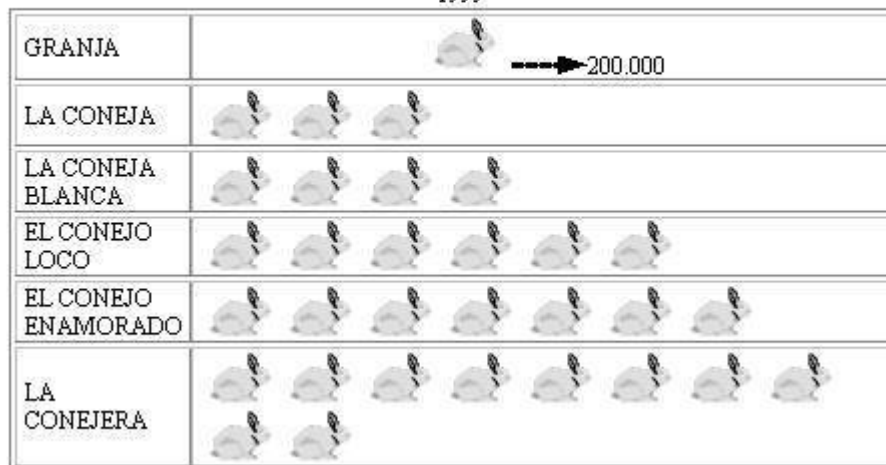
CUADRO 3.6
POBLACIÓN DE CONEJOS DE CRIADEROS
AÑO 1999

GRANJA	CANTIDAD (EN MILES)	PORCENTAJE %
LA CONEJA	600	10.00
LA CONEJA BLANCA	800	13.33
EL CONEJO LOCO	1200	20.00
EL CONEJO ENAMORADO	1400	23.33
LA CONEJERA	2000	33.34
TOTAL	6000	100.00

DESARROLLO

GRAFICO 3.22A

PICTOGRAMA
POBLACIÓN DE CONEJOS
1999



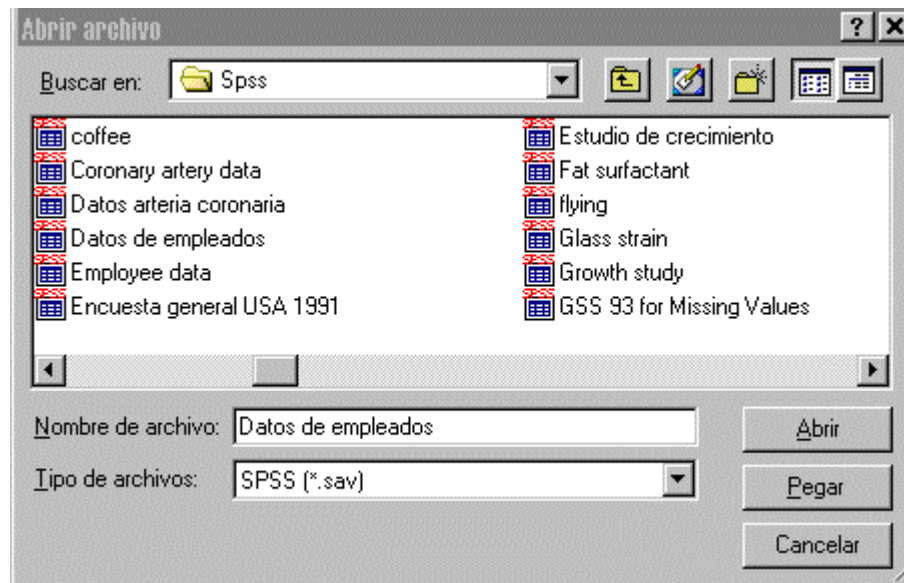
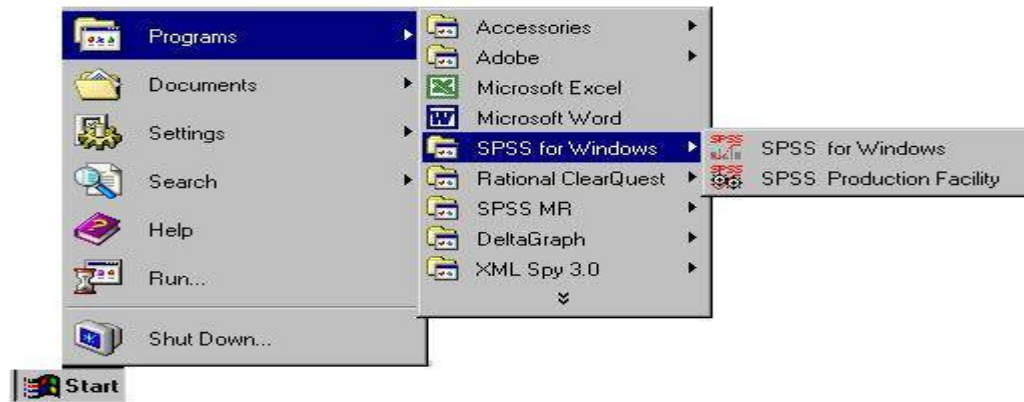
EJEMPLO 7

Teniendo en cuenta la importancia del software estadístico SPSS, en este ejemplo aprenderemos a construir gráficos de barras, de líneas, circulares e histogramas a partir del archivo **Datos de empleados** que viene con el software.

DESARROLLO

Empezaremos construyendo un grafico de barras para lo cual seguiremos el siguiente proceso:

1. Empezamos SPSS, pulsando inicio (start) , luego programa y finalmente SPSS para Windows , Aparece la siguiente pantalla de dialogo que dice **Abrir archivo**



2. Damos un clic en el archivo Datos de empleados y abrimos el archivo. Aparece la ventana del Editor de datos con 474 casos y 10 variables



Datos de empleados - Editor de datos SPSS

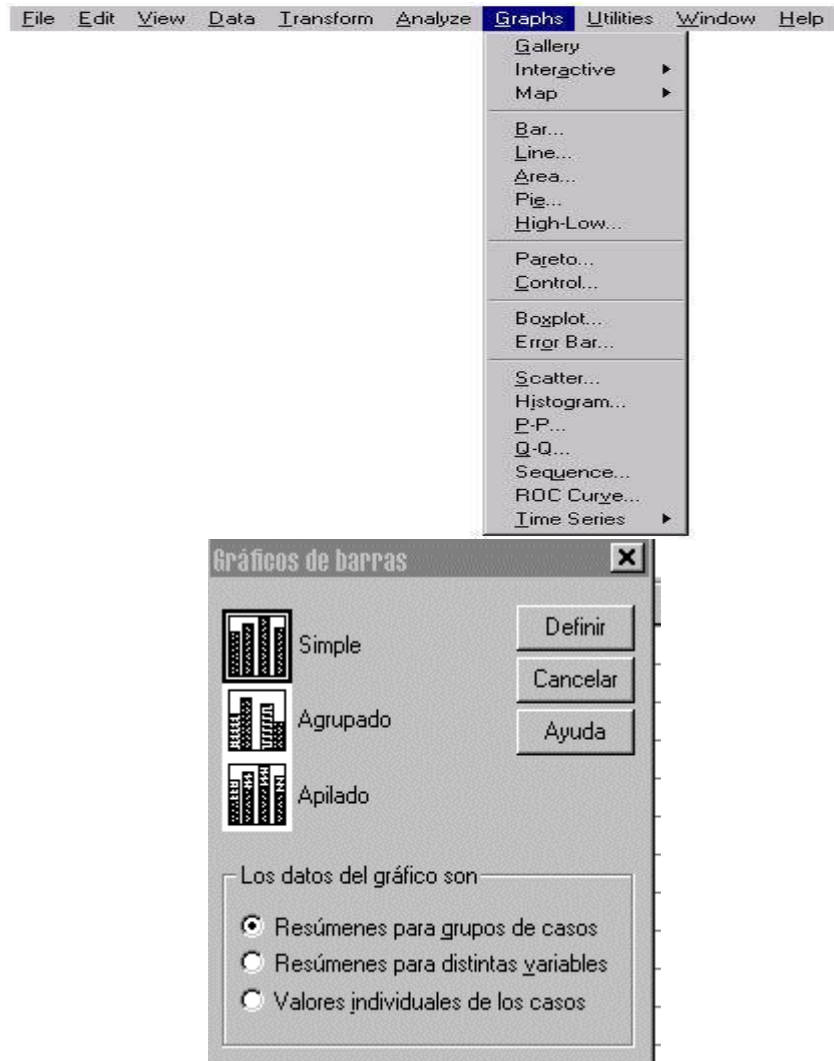
Archivo Edición Ver Datos Transformar Analizar Gráficos Utilidades Ventana ?

	Nombre	Tipo	Anchura	Decimales	Etiqueta	Valores	Perdida
1	id	Numérico	4	0	Código de emp	Ninguno	Ninguno
2	sexo	Cadena	1	0	Sexo	{h, Hombre}...	Ninguno
3	fechnac	Fecha	8	0	Fecha de naci	Ninguno	Ninguno
4	educ	Numérico	2	0	Nivel educativo	Ninguno	0
5	catlab	Numérico	1	0	Categoría labor	{1, Administrat	0
6	salario	Dólar	8	0	Salario actual	Ninguno	\$0
7	salini	Dólar	8	0	Salario inicial	Ninguno	\$0
8	tiempemp	Numérico	2	0	Meses desde	Ninguno	0
9	expprev	Numérico	6	0	Experiencia pr	Ninguno	Ninguno
10	minoría	Numérico	1	0	Clasificación é	{0, No}...	9
11							
12							
13							
14							
15							
16							
17							

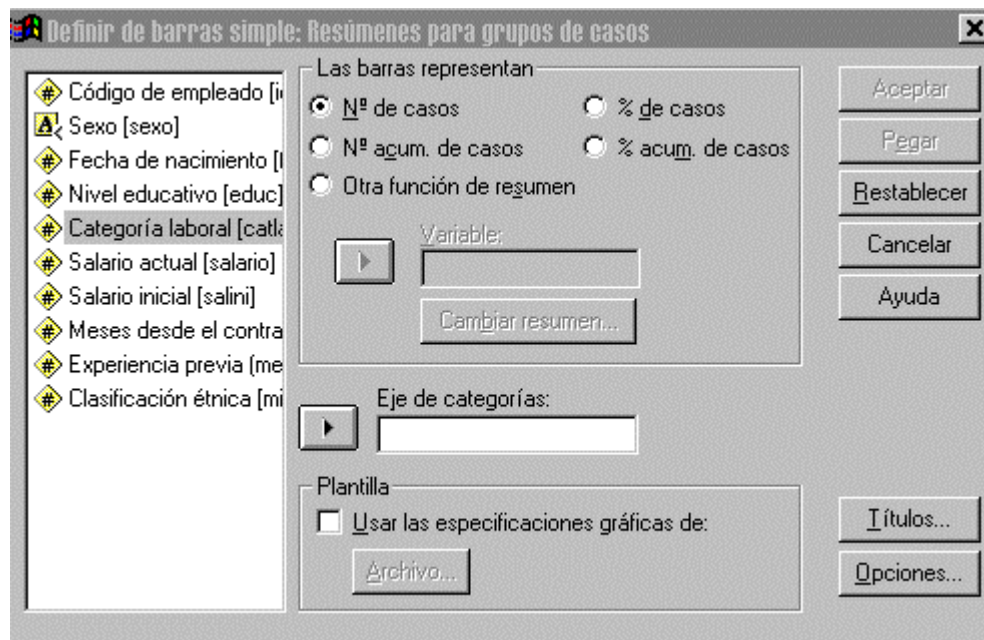
Vista de datos Vista de variables

SPSS El procesador está preparado

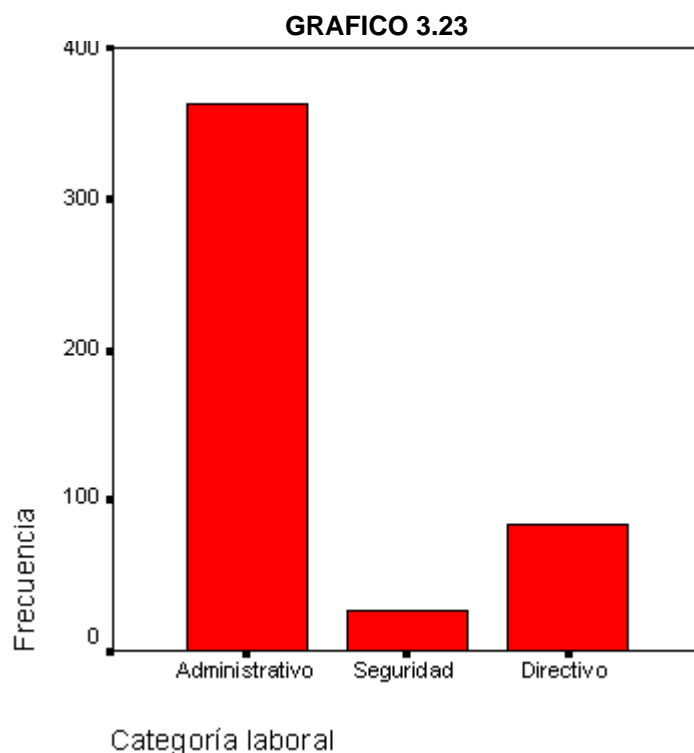
- Para obtener un grafico cualquiera, por ejemplo, de barras que muestre el numero de empleados en cada categoría ; en el menú de la ventana del Editor de datos seleccionamos **Gráficos.(Graphs)** Aparece tipos de gráficos , seleccionamos grafico de barras, y escogemos el tipo de graficas que nos interese, para este caso Simple. Pulsamos definir



4. Después de pulsar definir , aparece la siguiente ventana en donde se selecciona categoría laboral en la parte izquierda y se mueve hacia el eje de categoría clickeandola en la flecha derecha.

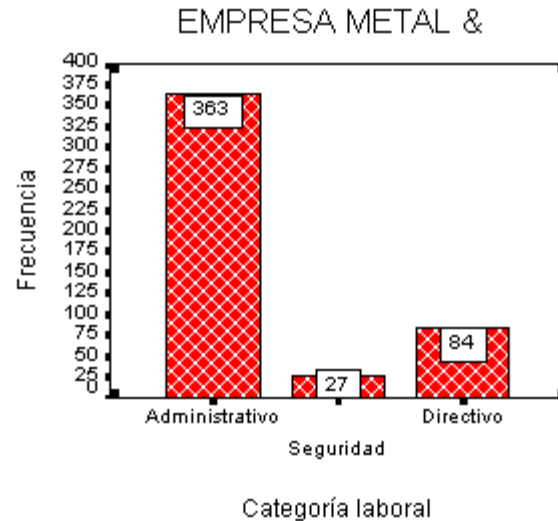


5. Finalmente damos Aceptar y obtenemos en la ventana de resultados el grafico de barras solicitado.



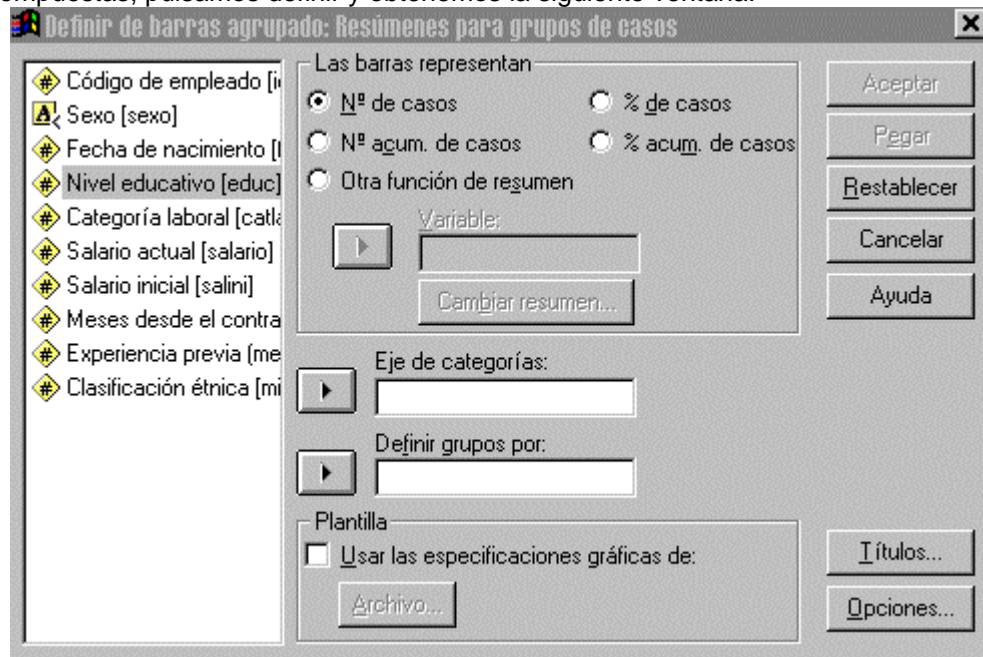
6. Este grafico obtenido lo podemos editar , haciendo doble clic sobre el grafico , que inmediatamente abre una ventana editora., en donde podemos modificar el grafico, cambiándole el nombre, el color de las barras , etc. Como se puede ver en grafico editado. En este grafico observamos que la clasificación laboral esta compuesta por 363 empleados administrativos, 84 directivos y 27 de seguridad.

GRAFICO 3.24
CLASIFICACION LABORAL



B. Para producir un grafico de barras compuesto que muestre la categoría laboral de los empleados según el sexo, procederemos así :

1. Desde la ventana del Editor de datos, seleccionamos Gráficos/Barras y chuleamos barras compuestas, pulsamos definir y obtenemos la siguiente ventana.



2. En esta ventana señalamos categoría laboral y la movemos hacia el eje de categorías clickeando en la flecha correspondiente , lo mismo hacemos con la variable sexo, la cual la movemos a la casilla definir por grupos. Damos aceptar y obtenemos el grafico pedido.

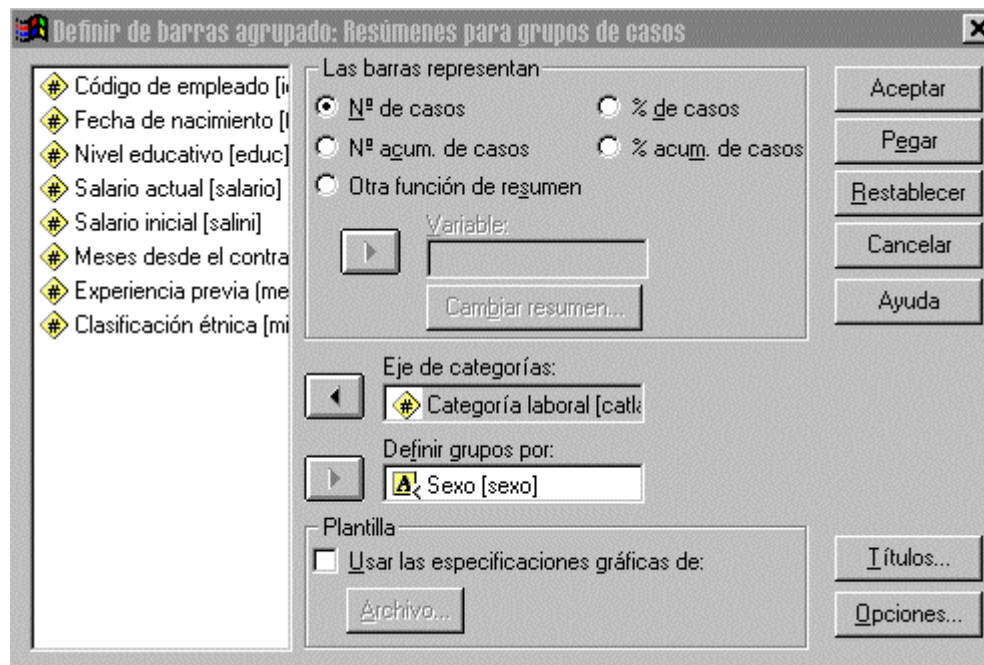
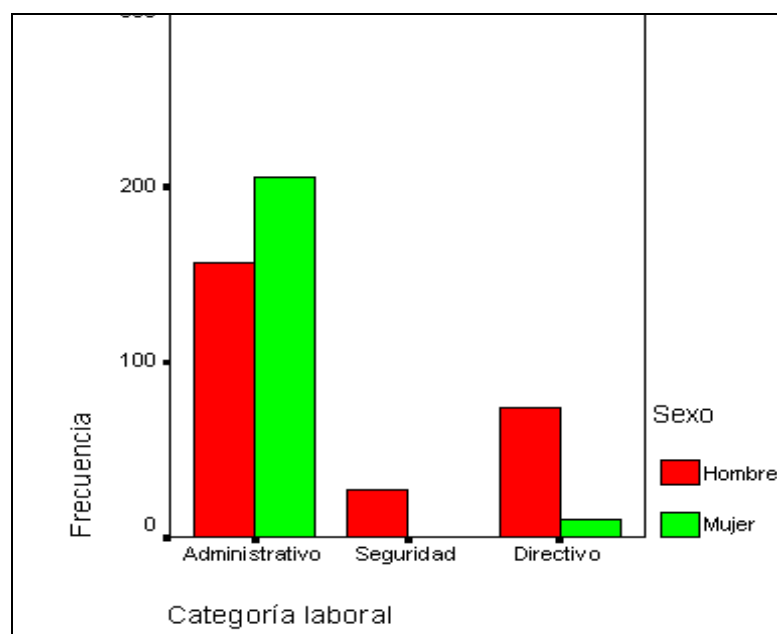
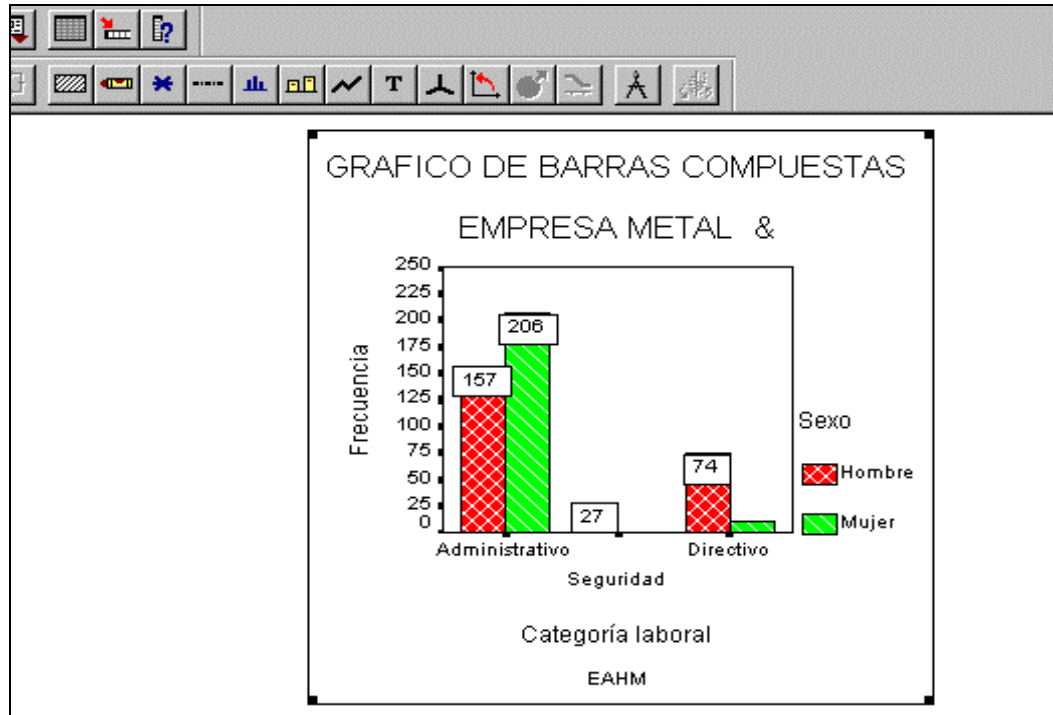


GRAFICO 3.25

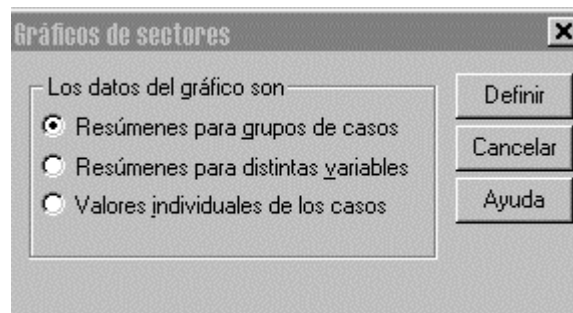


3. Damos doble clic en grafico y entramos a la ventana de edición, en donde le damos el toque final al grafico. En este grafico podemos ver claramente que el personal administrativo esta compuesto 157 mujeres y 206 hombres, el personal directivo por 74 hombres y 10 mujeres y el personal de seguridad solamente por 27 hombres.

GRAFICO 3.26



- C. Para producir un grafico circular que muestre el porcentaje de empleados perteneciente a cada categoría laboral, seguimos el siguiente proceso:
- Desde la ventana del Editor de datos escogemos Gráficos /sector y obtenemos el siguiente cuadro de dialogo y seleccionamos resúmenes para grupos de casos.



- Pulsamos definir y obtenemos la ventana siguiente en donde se sombrea la categoría laboral y se mueve hacia la casilla definir sector. Se selecciona % de casos en los Sectores representan.

Definir de sectores: Resúmenes para grupos de casos

Los sectores representan:

☐ N° de casos ☒ % de casos
☐ N° acum. de casos ☐ % acum. de casos
☐ Otra función de resumen

Variable:

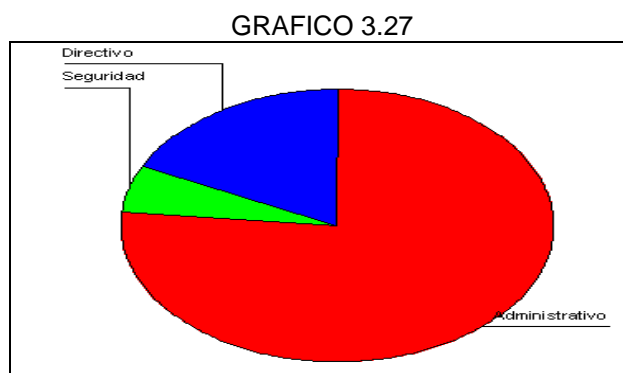
Definir sectores por:

☒ Categoría laboral [catlab]

Plantilla

☐ Usar las especificaciones gráficas de:

3. Damos aceptar y obtenemos el grafico pedido en la ventana de resultados.



4. Hacemos doble clic sobre el grafico para modificarlo, abriendo la ventana de edición en donde al seleccionar Gráficos/opciones , clickeamos % , colocamos los títulos, subtítulos, pie de pagina, cambiamos de color , configuración etc, es decir , damos el toque final al grafico. Cerramos el editor de grafico y regresamos a la ventana de resultados. En el grafico observamos que 76.6% de los empleados son administrativos, el 17.7% directivos y 5.7% de seguridad.

Opciones de sectores

Situar el primer sector a las: del reloj.

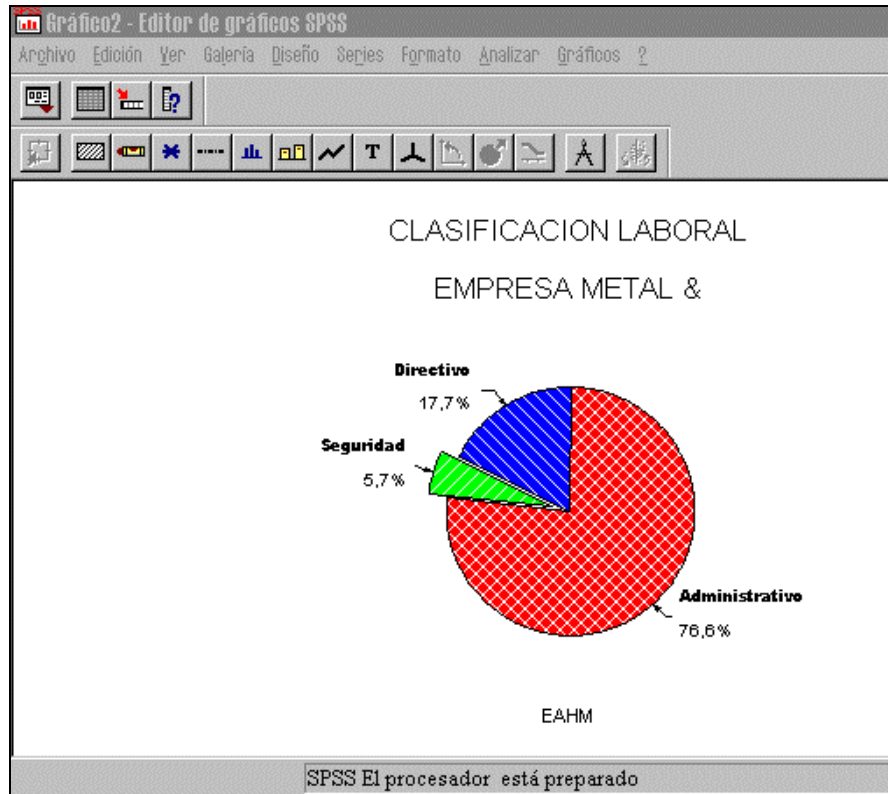
☐ Agrupar (sumar) los sectores menores que: %

Etiquetas:

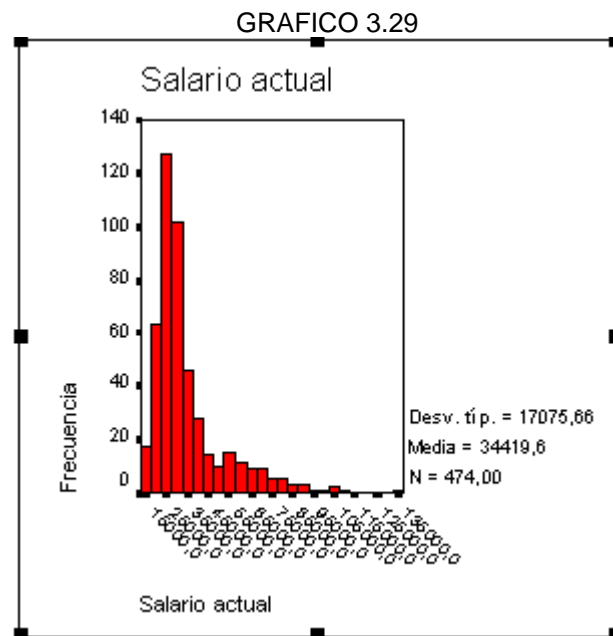
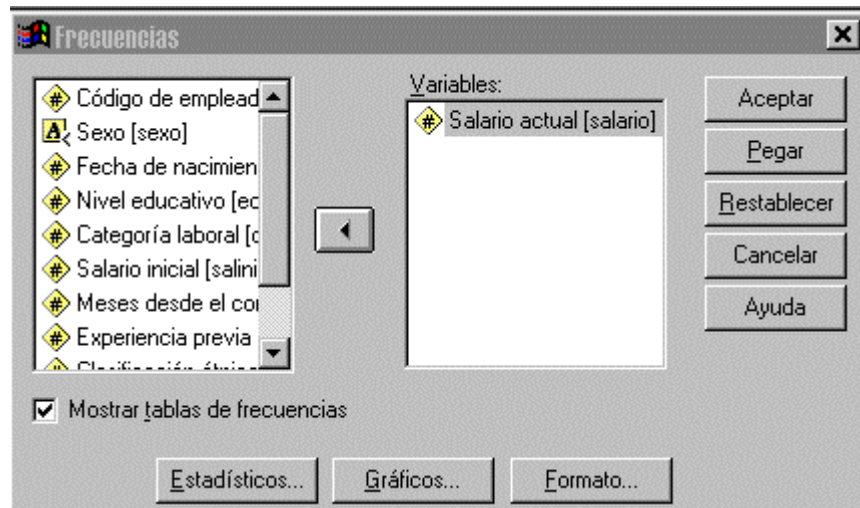
☒ Texto ☒ Valores ☒ Porcentajes



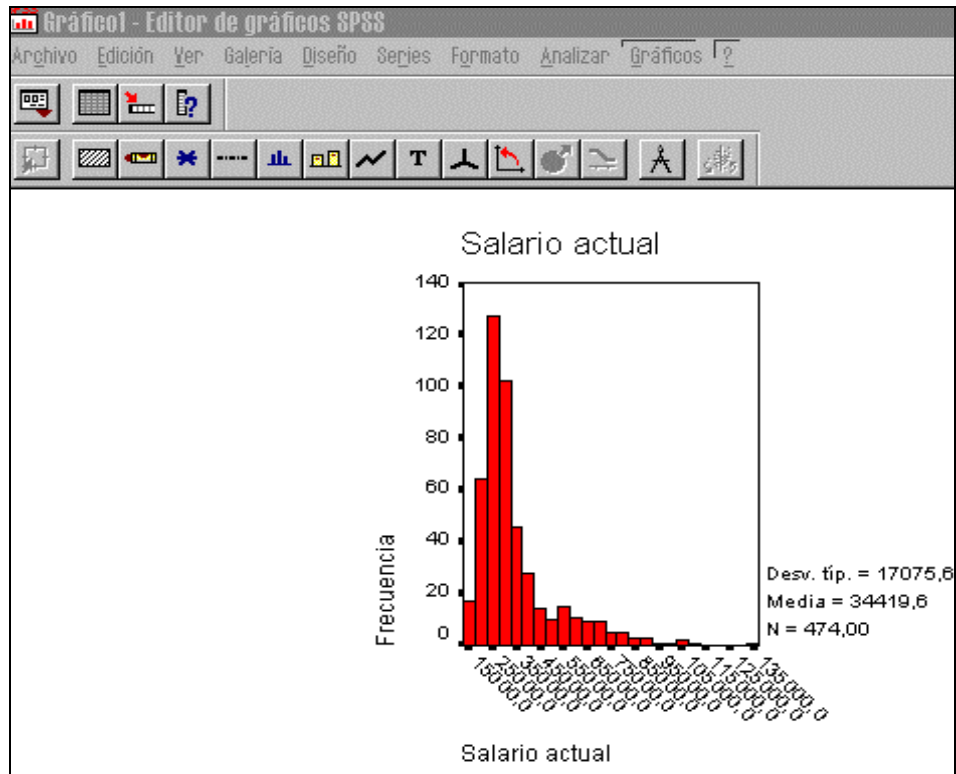
GRAFICO 3.28



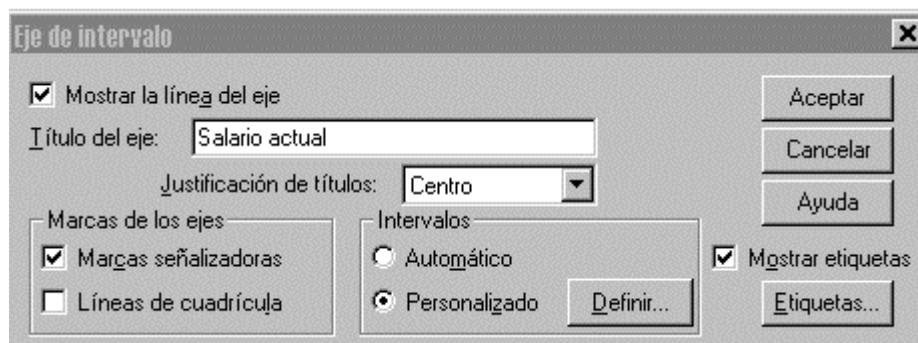
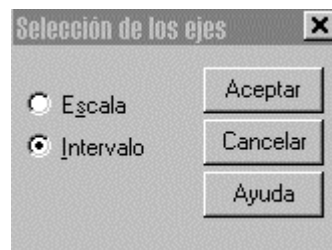
- D. Finalmente vamos a construir un histograma para la variable salario actual y seguiremos el siguiente proceso:
1. Desde la ventana del editor de datos seleccionamos estadística /frecuencia y en ventana adjunta que aparece, sombreamos salario actual y lo pasamos a la derecha; pulsamos gráficos y en esta nueva ventana clickeamos histograma y obtendremos en la ventana de resultado el histograma que se muestra abajo.



2. Hacemos doble clic sobre el histograma y entramos al editor de gráficos



3. En el editor de gráficos seleccionamos diseño y en cuadro de dialogo que se abre, señalamos intervalo que nos conduce al cuadro de dialogo eje de intervalo, señalamos intervalos personalizados como se puede ver en las figuras adjuntas.



4. En la ventana de eje de intervalo, definimos el numero de intervalos personalizados que debe tener el histograma (el histograma original tiene 25 y lo cambiamos a 10).

Damos continuar y en la ventana del eje de intervalo pulsamos etiquetas y el cuadro de dialogo podemos seleccionar marca de clase (punto medio) o rango ((para nuestro ejemplos escogemos rango. Y damos continuar y obtenemos el histograma modificado que se muestra abajo.

The image shows two overlapping dialog boxes from a software application. The top dialog, titled "Eje de intervalo: Definir intervalos personalizados", allows defining custom intervals. It has two sections: "Definición" with radio buttons for "Nº de intervalos:" (set to 10) and "Ancho del intervalo:" (set to 5000); and "Rango" with fields for "Mínimo" (15750), "Máximo" (135000), "Visualizados:" (12500), and "Visualizados:" (137500). The bottom dialog, titled "Eje de intervalo: Etiquetas", configures how labels are displayed. It includes a "Mostrar" section with radio buttons for "Todas las etiquetas" (selected) and "Cada 2 etiquetas", and a checkbox for "Marcas señalizadoras para etiquetas omitidas". The "Tipo" section has radio buttons for "Punto medio" and "Rango" (selected). Other options include "Cifras decimales:" (1), "Separador de millares" (unchecked), "Ejemplo:" (1234,0 - 1234,0), "Factor de escala:" (1), and "Orientación:" (Diagonal).

Eje de intervalo: Definir intervalos personalizados

Definición

☒ N° de intervalos: 10

☐ Ancho del intervalo: 5000

Continuar

Cancelar

Ayuda

Rango

	Mínimo	Máximo
Datos:	15750	135000
Visualizados:	12500	137500

Eje de intervalo: Etiquetas

Mostrar

☒ Todas las etiquetas

☐ Cada 2 etiquetas

☐ Marcas señalizadoras para etiquetas omitidas

Continuar

Cancelar

Ayuda

Tipo

☐ Punto medio

☒ Rango

Cifras decimales: 1

☐ Separador de millares

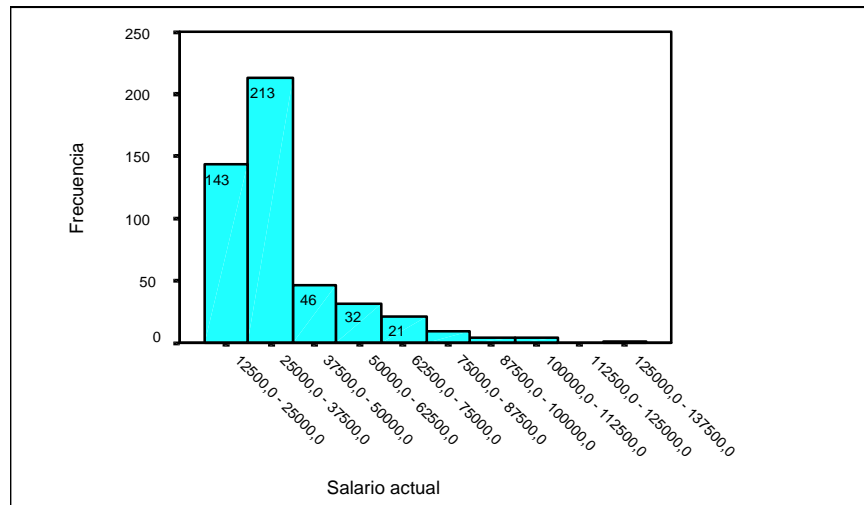
Ejemplo

1234,0 - 1234,0

Factor de escala: 1

Orientación: Diagonal

GRAFICO 3.30



5. Este grafico se puede seguir modificando aprovechando todas las posibilidad que permite este programa. Cuando se considere que el histograma es el queremos cerramos el editor de gráficos y volvemos a la pagina de resultados. Se Salva el resultado y se imprime .

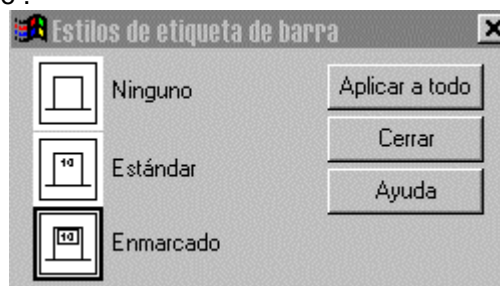
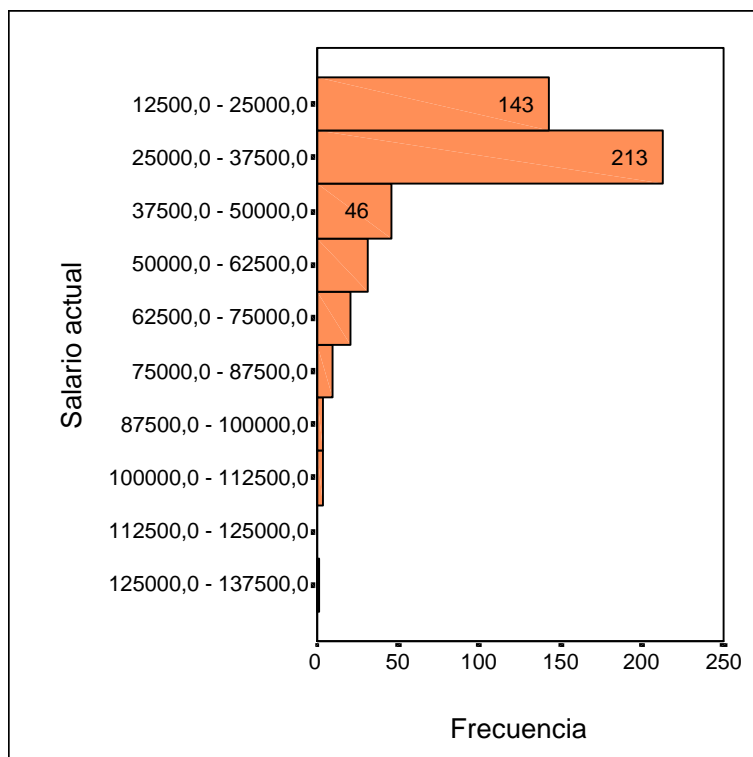


GRAFICO 3.31



Cabe anotar que hay otros puntos de partida para construir histogramas, por ejemplo partiendo del editor de datos y seleccionado gráficos/histograma o utilizando los gráficos interactivos .

TALLER MODULO III.

1. A partir de la información de cualquier base de datos, que puede conseguirse en Internet de acuerdo a su preferencia o especialidad, construya todos los gráficos estudiados de la siguiente forma:
 - Manualmente
 - Utilizando Excel
 - Utilizando SPSS
 - Minitab
 - SAS

BASES DE DATOS:

1. Political Database of the Americas ... the Western Hemisphere. Base de datos con información política de los 25 países de la hemisferia del oeste.

<http://www.georgetown.edu/pdba/>

<http://www.georgetown.edu/pdba/spanish.html>

<http://www.georgetown.edu/pdba/Elecdata/Col/colombia.html>

2.FAOSTAT es una base de datos estadísticos integrada on-line que actualmente

contiene más de 1 millón de series anuales internacionales en las siguientes materias: <http://apps.fao.org/inicio.htm>

3. DEPARTAMENTO ADMINISTRATIVO NACIONAL DE ESTADISTICA.

<http://www.dane.gov.co/Enlaces/enlaces.html>

<http://www.dane.gov.co/index.html>

[http://www.dane.gov.co/Enlaces/Organismos Estadisticos/America/america.html](http://www.dane.gov.co/Enlaces/Organismos_Estadisticos/America/america.html)

[http://www.dane.gov.co/Enlaces/Organismos Estadisticos/Europa/europa.html](http://www.dane.gov.co/Enlaces/Organismos_Estadisticos/Europa/europa.html)

[http://www.dane.gov.co/Enlaces/Organismos Estadisticos/Asia/asia.html](http://www.dane.gov.co/Enlaces/Organismos_Estadisticos/Asia/asia.html)

[http://www.dane.gov.co/Enlaces/Organismos Estadisticos/Africa/africa.html](http://www.dane.gov.co/Enlaces/Organismos_Estadisticos/Africa/africa.html)

4.. PROEXPORT COLOMBIA promueve las exportaciones colombianas. Apoya y asesora empresarios colombianos ... 091)5242015. Proexport. Quienes Somos Sobre ...

www.proexport.com.co/

<http://www.proexport.com.co/VBeContent/home.asp?Perfil=1>

5. DEPARTAMENTO NACIONAL DE PLANEACION

http://www.dnp.gov.co/03_PROD/PUBLIC/13P_MS.HTM

http://www.dnp.gov.co/03_PROD/BASES/BASES.HTM

6 BANCO DE LA REPUBLICA

<http://www.banrep.gov.co/>

http://www.banrep.gov.co/economia/ctanal1sec_ext.htm#tasa

7. ICFES El Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior **ICFES**

<http://www.icfes.gov.co/>

****SUGERENCIA:** Trate Inicialmente de resolver los ejercicios manualmente y chequee los resultados de la mayor parte de los ejercicios utilizando cualquier software estadístico, (SPSS 11, Excel , etc)

Copyright © ;Ing. Enrique A Hurtado Minotta, all rights reserved

REVISTAS ELECTRONICAS

19. [*Journal of Statistics Education*](#). Excelente revista (¡gratuita!) editada por la American Statistical Association sobre educación estadística (a todos los niveles)
20. [*Homepage de la American Statistical Association*](#). La mayor asociación de estadísticos, editora de *Journal of Agricultural, Biological, and Environmental Statistics*, *Journal of the American Statistical Association*, *Journal of Statistics Education* y *The American Statistician* entre otras revistas.
21. [*Environmental and Ecological Statistics*](#)
22. [*Community Ecology*](#)
23. [*Journal of Agricultural, Biological, and Environmental Statistics*](#)
24. [*Bulletin of the Ecological Society of America*](#) (gratuita; contiene artículos de ecología estadística)

25. [*Journal of Statistical Software*](#) (gratuita)
26. [*InterStat \(Statistics on the Internet\)*](#) (gratuita)
27. [Probability and Statistics Journals on the Web](#)

ESTADISTICA ON LINE

109. [Aula Virtual de Bioestadística, Universidad Complutense](#)
110. [Curso de bioestadística de la Universidad de Málaga](#)
111. [Apuntes de Bioestadística. Unidad de Bioestadística Clínica del Hospital Ramón y Cajal](#)
112. [Lecciones de Estadística, 5campus.org \(análisis multivariante...\)](#)
113. [Curso de Bioestadística de la Universidad Nacional de Misiones \(Argentina\)](#)
114. [Curso de estadística \(para ingenieros\) de una universidad mexicana](#)
115. [Cursos de estadística de la Universidad de California, Los Angeles](#)
116. [Cursos de estadística de la Universidad de Michigan](#)
117. [Electronic Statistics Textbook](#)
118. [A New View of Statistics](#)
119. [HyperStat Statistics Textbook](#)
120. [Statistics at Square One](#)
121. [Statistics Every Writer Should Know](#)
122. [Introductory Statistics: Concepts, Models, and Applications](#)
123. [Multivariate Statistics: Concepts, Models, and Applications](#)
124. [A complete guide to nonlinear regression](#)
125. [Ordination Methods for Ecologists](#)
126. [Annotated Bibliography of Canonical Correspondence Analysis and related constrained ordination methods 1986-1993](#)
127. [Multivariate Statistics: an Introduction](#)
128. [A glossary of ordination-related terms](#)
129. [Glossary of Statistical Terms and Medical Citations for Statistical Issues](#)
130. [Glossary of over 30 statistical terms](#)
131. [EVSC 503 Applied Statistics for the Environmental Sciences](#)
132. <http://s9000.furman.edu/mellonj/spss1.htm>
133. <http://www.indiana.edu/~statmath/stat/spss/win/index.html>
134. <http://www.utexas.edu/cc/stat/tutorials/spss/SPSS1/Outline1.html>
135. <http://web.uccs.edu/lbecker/SPSS/content.htm>

136. <http://core.ecu.edu/psyc/wuenschk/SPSS/SPSS-Data.htm>
137. <http://www.tulane.edu/~panda2/Analysis2/ahome.html>
138. <http://www.shef.ac.uk/~scharr/spss/index2.htm>
139. <http://calcnet.mth.cmich.edu/org/spss/index.html>
140. <http://calcnet.mth.cmich.edu/org/spss/toc.htm>
141. <http://www.public.asu.edu/~pythagor/spssworkbook.htm>
142. <http://lib.stat.cmu.edu/>
143. <http://www.stat.ufl.edu/vlib/statistics.html>
144. <http://www.statserv.com/software.html>
145. <http://www.maths.uq.edu.au/~gks/webguide/>
146. <http://www.statistics.com/>
147. <http://www.helsinki.fi/~jpuranen/links.html#stc>
148. <http://www.maths.uq.edu.au/~gks/webguide/free.html>
149. <http://nhsbig.inhs.uiuc.edu/>
150. <http://www.okstate.edu/artsci/botany/ordinate/software.htm>
151. <http://life.bio.sunysb.edu/ee/biometry/>
152. <http://life.bio.sunysb.edu/morph/software.html>
153. <http://pbil.univ-lyon1.fr/ADE-4/ADE-4.html>
154. http://ourworld.compuserve.com/homepages/Rainer_Wuerlaender/statsoft.htm
155. <http://www.stat.auckland.ac.nz/~mja/Programs.htm>
156. <http://it.stlawu.edu/~rlock/maa99/>
157. <http://it.stlawu.edu/~rlock/tise98/java.html>
158. <http://www.stat.vt.edu/~sundar/java/applets/>
159. <http://www.kuleuven.ac.be/ucs/java/index.htm>
160. <http://noppa5.pc.helsinki.fi/koe/>
161. <http://www2.kenyon.edu/people/hartlaub/MellonProject/mellon.html>

Demostraciones Java para el aprendizaje de la estadística

162. [Electronic Textbook](#) (UCLA), programa *on-line* de representación y cálculo de funciones de densidad y de distribución (normal, F , ji-cuadrado, números aleatorios...).
Equivalente a un libro de tablas

BIBLIOGRAFÍA

43. Montgomery Douglas y Runger George.(1996), Probabilidad y Estadística aplicada a la Ingeniería., McGraw-Hill, Mexico

44. Montgomery Douglas y Hines William.(1995), Probabilidad y Estadística aplicada a la Ingeniería. y Administración, segunda edición ,CECSA, México
45. Mendenhall William, Wackerly Dennis y Scheaffer Richard (1994), Estadística Matemáticas con Aplicaciones , segunda edición, Grupo Editorial Iberoamerica. M, México
46. Govinden Portus Lincuyan.(1998), Introducción a la Estadística,. McGraw-Hill, Santafé de Bogotá
47. Webster Allen L.(1998), Estadística aplicada a la Empresa y a la Economía, segunda edición, McGraw-Hill, Madrid
48. Kohler Heinz.(1996), Estadística para Negocios y Economía, primera edición ,CECSA, México
49. Martinez Bencardino Ciro (1995), Estadística , sexta edición ,ECOE EDICIONES Santafé de Bogotá.
50. Alvarez C Ricardo (1994), Estadística Fundamental Aplicada, primera edición ,PUBLIADCO, Cali
51. Estadística," Enciclopedia Microsoft® Encarta® 2000. © 1993-1999 Microsoft Corporation.
52. Stockburger David W (1996) Introductory Statistics: Concepts, models an applications, , <http://www.psychstat.smsu.edu/sbk00.htm>
53. Mendoza Duran Carlos. (1995)Probabilidad y Estadística, <http://w3.mor.itesm.mx/~cmendoza/ma835/ma83500.html>
54. Valdés Fernando ,Comprensión y uso de la estadística, <http://www.cortland.edu/flteach/stats/glos-sp.html>
55. Hurtado Minotta Enrique A, Reflexiones para el Currículo, <http://www.geocities.com/soho/atrium/7521/tesis.html>
56. Academic Freedom , www.hrw.org/wr2k/issues-01.htm
57. Gonzalez Felipe, Africa : El silencio de los tambores, www.arrakis.es/~trazeg/gonzalez.html.
58. El año 2000, WWW.arrakis.es/~trazeg/anno2000.html
59. Mendenhall, W.; D.D. Wackerly y R.L. Scheaffer. *Estadística Matemática con Aplicaciones*. Grupo Editorial Iberoamérica. México.
60. Freund, John E. y Gary A. Simon. *Estadística elemental*. Prentice-Hall Hispanoamericana, SA. México, 1994. (8ª edición.)
61. Spiegel, M.R. *Estadística*. McGraw-Hill. México. (Serie Schaum.)
62. <http://www.unl.edu.ar/fave/sei/encuestas/index.html>.
63. Wonnacott, Thomas H. y Ronald J. Wonnacott (1998) *Introducción a la estadística*. Limusa/IPN. México.

ehurtado@usc.edu.co

MODULO IV

DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIA

Teniendo en cuenta la necesidad de facilitar el análisis de la información obtenida mediante las encuestas y bajo la premisa de que la mayoría de los estudios implican el procesamiento de cientos de datos u observaciones se hace necesario procesar esta información a través de las famosas tablas de frecuencia en donde se facilita su manejo ya que se presenta en forma tabular y permite visualizar fácilmente toda la información. En este modelo estudiaremos la forma de construir manualmente las tablas de distribución de frecuencia, los diagramas de tallo y hoja, los histogramas en valores absolutos y porcentuales, lo mismo que las ojivas y demás gráficos que manejan frecuencias. Utilizaremos algunos software estadísticos que agilizan y permiten procesar eficientemente la información.

4.1 FILAS DE DATOS

Una fila de datos consiste en datos recopilados que no han sido organizados numéricamente; por ejemplo el ingreso salarial de los docentes universitario de la Usaca por orden alfabético.

4.2 ORDENACIONES

Una ordenación es un conjunto de datos numéricos en orden creciente o decreciente. La diferencia entre el valor mayor y el valor menor se denomina Rango de ese conjunto de datos. Por ejemplo Si el ingreso mayor entre los 1000 profesores de la Usaca es de \$ 10.000.000 y el menor \$ 250.000, el rango de los ingresos de los docente en esta universidad será de \$ 9.750.000

4.3 TABLA DE FRECUENCIA

Al resumir grandes colecciones de datos, es útil distribuirlas en clases o categorías y determinar el numero de elementos u observaciones que pertenecen a cada clase, llamada frecuencia de clase.

La distribución tabular de lo datos por clases junto con las correspondientes frecuencias de clase se denomina distribución de frecuencia o tabla de frecuencia.

El cuadro 4.1 muestra la distribución de frecuencias o tabla de frecuencia del peso nominal de una muestra de 30 paquetes de azúcar con una tolerancia de un gramo.

De esta tabla de frecuencia podemos observar que esta conformado por 5 clases o categorías, donde la primera categoría esta comprendida entre 1828 y 1902 gramos con una frecuencia de 5 paquetes. La quinta categoría esta conformada desde 2128 hasta 2202 con una frecuencia de clase de 1.

CUADRO 4.1

TABLA DE FRECUENCIA

PESO NOMINAL DE 30 PAQUETES DE AZUCAR
CON UN GRAMO DE PRECISION

PESO EN GRAMOS	NUMERO DE PAQUETES FRECUENCIA
1828 - 1902	5
1903 - 1977	11
1978 - 2052	8
2053 - 2127	5
2128 - 2202	1

4.3 INTERVALOS DE CLASE Y LIMITES DE CLASE

Un símbolo que define una clase como 1978 – 2052 en tabla frecuencia se llama intervalo de clase . Los números extremos 1978 y 2052 se llaman límite inferior y límite superior de clase respectivamente. Cuando un intervalo de clase carece de un límite inferior o superior se llama intervalo de clase abierto.

3.4 FRONTERAS DE CLASE O LIMITES REALES (FC)

Se denotan como FC y es igual a la semisuma del límite superior de una clase con el límite inferior de la siguiente . Por ejemplo las fronteras de clase del tercer intervalo de clase son 1977.5 y 2052.5 para la inferior y superior respectivamente.

$$FCI = \frac{1977 + 1978}{2} = 1977.5$$

$$FCS = \frac{2052 + 2053}{2} = 2052.5$$

4.5 TAMAÑO O ANCHURA DE UN INTERVALO DE CLASE (C)

Es la diferencia entre la frontera de clase superior e inferior. Si todos los intervalos de clase de una distribución de frecuencia tienen la misma anchura la denotaremos por C. En tal caso C es igual a la diferencia entre dos límites superiores o inferiores de clases sucesivas. De la tabla de frecuencia anterior tenemos:

$$C = FCS - FCI = 2052.5 - 1977.5 = 75$$

4.6 MARCA DE CLASE (MC)

Es el punto medio del intervalo de clase y se calcula promediando los límites superior e inferior de clase. De la tabla de frecuencia tenemos que la marca de clase del tercer intervalo es:

$$MC = \frac{LI + LS}{2} = \frac{1978 + 2052}{2} = 2015$$

4.7 FRECUENCIA RELATIVA (FR)

La frecuencia relativa de un intervalo de clase es igual a su frecuencia absoluta dividida por la frecuencia total de todos los intervalos de clases. y se expresa generalmente en % .De la tabla de frecuencia observamos que la frecuencia absoluta del tercer intervalo de clase es 8 , por lo tanto su frecuencia relativa es del 26.27%

La suma de todas las frecuencias relativas es igual a 1 al 100%.

$$FR = \left(\frac{F}{FT} \right) (100) \% = \left(\frac{8}{30} \right) (100) \% = 26.67\%$$

4.8 HISTOGRAMA

Consiste en un conjunto de rectángulos con base en el eje X, centro en las marcas de clase , longitudes iguales a los tamaños de los intervalos de clase y áreas proporcionales a la frecuencias de clase.

Si los intervalos de clase tienen todos la misma anchura, las alturas de los rectángulos son proporcionales a las frecuencias de clase, de ahí que es usual tomar las alturas iguales a las frecuencias de clase. En caso contrario deben ajustarse las alturas.

Este histograma así construido se denomina histograma en valores absolutos. Cuando se cambian los valores de la frecuencia absoluta por los respectivos valores de frecuencia relativa, el histograma se denomina histograma de frecuencias relativas o en porcentajes.

4.9 POLIGONO DE FRECUENCIA

Un polígono de frecuencia es un gráfico de líneas de las frecuencias con relación a las marcas de clase. Se obtiene conectando los puntos medios de las partes superiores de los rectángulos del histograma. Puede ser en valores absolutos o en valores relativos cuando se obtiene a partir de los histogramas en valores absolutos y en valores relativos respectivamente.

4.10 DISTRIBUCION DE FRECUENCIAS ACUMULADAS

La frecuencia total acumulada de todos los valores menores que la frontera de clase superior de un intervalo dado se denomina frecuencia acumulada hasta ese intervalo inclusive.

Una tabla de frecuencias acumuladas se denomina distribución de frecuencias acumuladas.

4.11 OJIVAS VALORES ABSOLUTOS

La gráfica que recoge las frecuencias acumuladas por debajo de cualquier frontera de clase superior respecto a dicha frontera se llama polígono de frecuencias acumuladas u ojiva.

Estas ojivas pueden ser mayor que o menor que en valores absolutos o en valores relativos

4.12 DISTRIBUCION DE FRECUENCIAS RELATIVAS

La frecuencia acumulada relativa es la frecuencia acumulada dividida por la frecuencia total. Cuando se usa la frecuencias acumuladas relativas en lugar de las frecuencias acumuladas absolutas se obtiene la tabla de frecuencias relativas

4.13. OJIVAS EN PORCENTAJES

Es la representación gráfica de las frecuencias acumuladas relativas, también se denomina polígono de frecuencias acumuladas en porcentaje y puede ser mayor que o menor que.

4.14. REGLAS GENERALES PARA CONSTRUIR UNA DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIA

Existen muchos procedimientos para construir tablas de frecuencia y aunque su uso es cada vez mas limitado, dado que todos los paquetes estadísticos hacen esta labor, queremos sugerir el siguiente procedimiento:

1. Hallar el rango de los datos
2. Dividir el rango en un numero adecuado de intervalos de clases del mismo tamaño; generalmente se suelen tomar entre 5 y 20 intervalos de clases según los datos. También hay una regla que dice que el numero de intervalos es igual a la raíz cuadrada del numero de datos cuando este no es muy grande. Si el numero de datos es muy grande trabajamos con logaritmos.

$$NIC = \sqrt{\#DATOS}$$

$$NIC = 1 + 3.22 \log(\#DATOS)$$

3. Hallar el tamaño del intervalo escogiendo como C el valor impar posterior al obtenido de la división del rango entre el numero de intervalo, en caso de que el resultado sea par.

$$C = \frac{R}{NIC}$$

4. Encontrar la frontera de clase inferior del primer intervalo usando la siguiente formula :

$$FCI_1 = V_{MENOR} - \frac{(NIC)(C) - R}{2}$$

Si el valor encontrado para la frontera de clase inferior del primer intervalo termina en entero se le resta o se le suma 0.5 , en caso contrario se deja igual.

5. Formar la tabla de frecuencia sumándole a frontera de clase inferior el valor de C, para posteriormente restarle y sumarle a cada frontera de clase 0.5 y obtener los limites superior e inferior de cada intervalo.
6. Utilizar una hoja de conteo para determinar cuantas observaciones o datos caen dentro de cada intervalo de clase, es decir , hallar la frecuencia. Para realizar el conteo se debe decidir si se trabaja con intervalos abiertos por la izquierda y cerrado por la derecha o cerrado por la izquierda y abierto por la derecha . Esto se debe hacer para evitar el doble conteo.

EJEMPLO 1

Para comprobar la eficiencia de los obreros encargados del proceso de llenado de paquetes de azúcar de peso nominal 2000 gramos , un supermercado realizo una muestra con 30 paquetes tomados al azar. Los resultados fueron los siguiente :
Se pide construir una tabla de frecuencia.

1930	1985	1954	1972	1967
2120	2025	2061	1966	1876
1909	1999	1830	1988	1880
2075	1977	1934	1898	2015
1946	2053	2047	2200	2030
1865	2005	1943	1910	2093

DESARROLLO

$$R = 2200 - 1830 = 370$$

$$NIC = \sqrt{30} = 5.47 \cong 5$$

$$C = \frac{R}{NIC} + 1 = \frac{370}{5} + 1 = 75$$

$$FCI_1 = V_{MENOR} - \frac{(NIC)(C) - R}{2} = 1830 - \frac{(5)(75) - 370}{2}$$

$$FCI_1 = 1830 - 2.5 = 1827.5$$

DATOS ORDENADOS EN ORDEN CRECIENTE

1830	1946	2015
1865	1954	2025
1876	1966	2030
1880	1967	2047
1898	1972	2053
1909	1977	2061
1910	1985	2075
1930	1988	2093
1934	1999	2120
1943	2005	2200

FORMACIÓN DE FRONTERAS DE CLASES

FCI	+C	=FCS	FRECUENCIA
1827.5	75	1902.5	
1902.5	75	1977.5	
1977.5	75	2052.5	
2052.5	75	2127.5	
2127.5	75	2202.5	

TABLA DE CONTEO

PESO	PESO												
FCI + 0.5 = LI	FCI - 0.5 = LS	CONTEO											F
1828	1902	1830		1865		1876		1880		1898			5
1903	1977	1909	1910	1930	1934	1943	1946	1954	1966	1967	1972	1977	11
1978	2052	1985	1988	1999	2005	2015	2025	2030	2047				8
2053	2127	2053		2061		2075		2093		2120			5
2128	2202	2200											1
	Total												30

CUADRO 4.2

TABLA DE FRECUENCIA

PESO NOMINAL DE 30 PAQUETES DE AZUCAR

CON UN GRAMO DE PRECISION		NUMERO DE PAQUETES
PESO EN GRAMOS		FRECUENCIA
1828 - 1902		5
1903 - 1977		11
1978 - 2052		8
2053 - 2127		5
2128 - 2202		1
TOTAL		30

EJEMPLO 2

Con los datos consignados en la tabla de frecuencia encontrada en el ejemplo anterior Calcular y/o construir lo siguiente:

- Un histograma en valores absolutos
- Un histograma en valores relativos
- Una ojiva menor que y una ojiva mayor que en valores absolutos
- Una ojiva menor que y otra mayor que en valores relativos

DESARROLLO

a)

CUADRO 4.3

TABLA DE FRECUENCIA

PESO NOMINAL DE 30 PAQUETES DE AZUCAR CON UN GRAMO DE PRECISION

LI	LS	F	FR %	MC	FCI	FCS	C	FAC<	FAC>	FAC>%	FAC<%
	1827					1827,5		0	30	100,00	0,00
1828	1902	5	16,67	1865	1827,5	1902,5	75	5	25	83,33	16,67
1903	1977	11	36,67	1940	1902,5	1977,5	75	16	14	46,67	53,33
1978	2052	8	26,67	2015	1977,5	2052,5	75	24	6	20,00	80,00
2053	2127	5	16,67	2090	2052,5	2127,5	75	29	1	3,33	96,67
2128	2202	1	3,33	2165	2127,5	2202,5	75	30	0	0,00	100,00
	TOTAL	30	100,00								

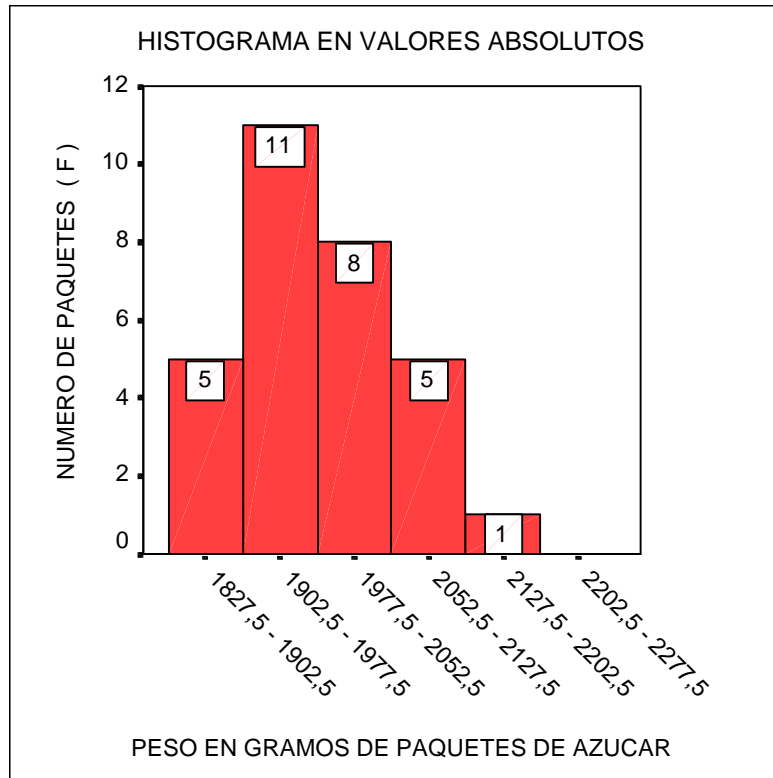


GRAFICO 4.1

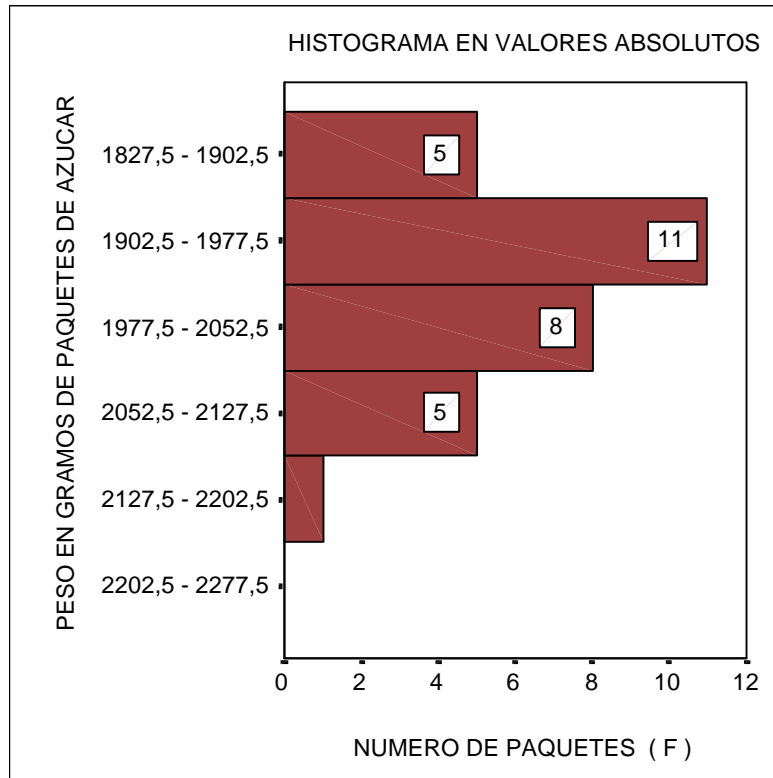


GRAFICO 4.2

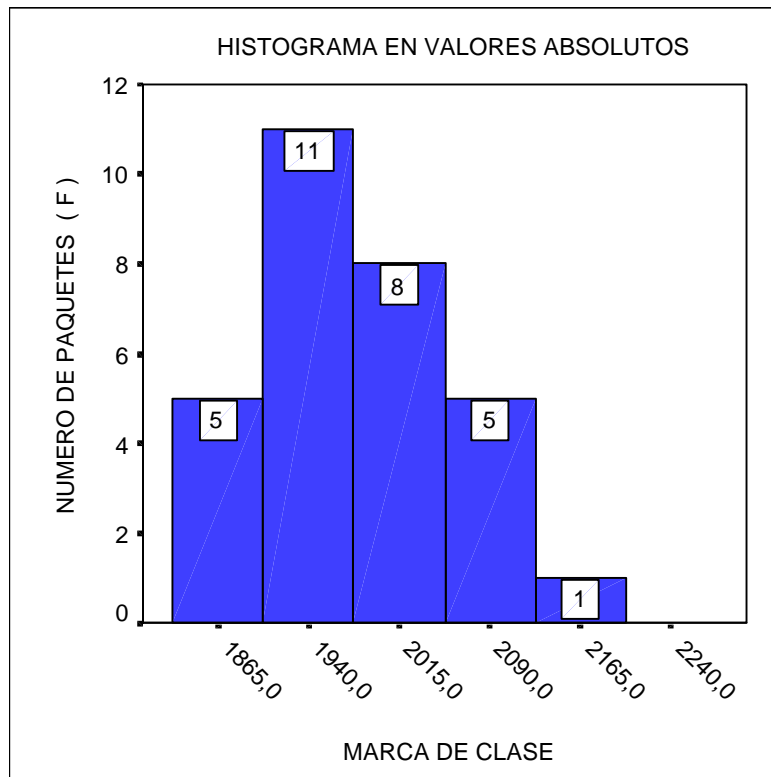


GRAFICO 4.3

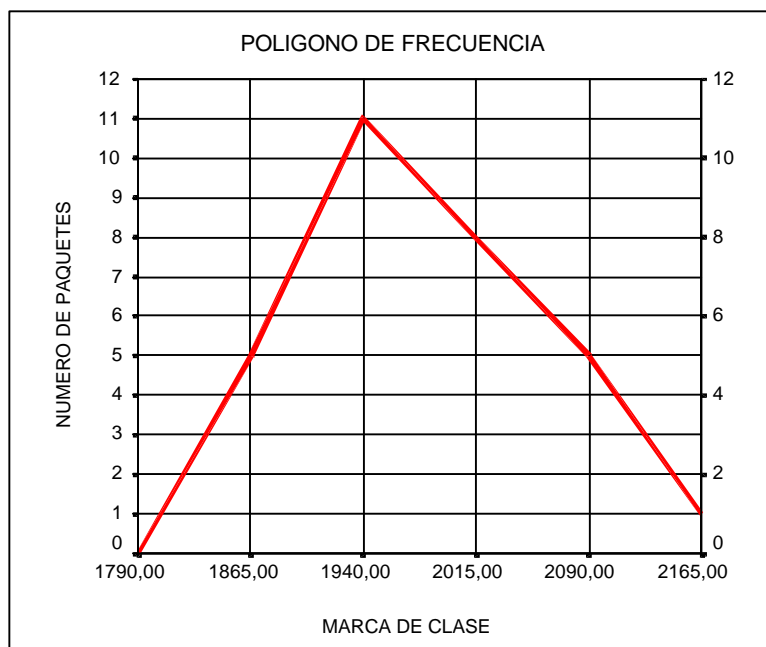


GRAFICO 4.4

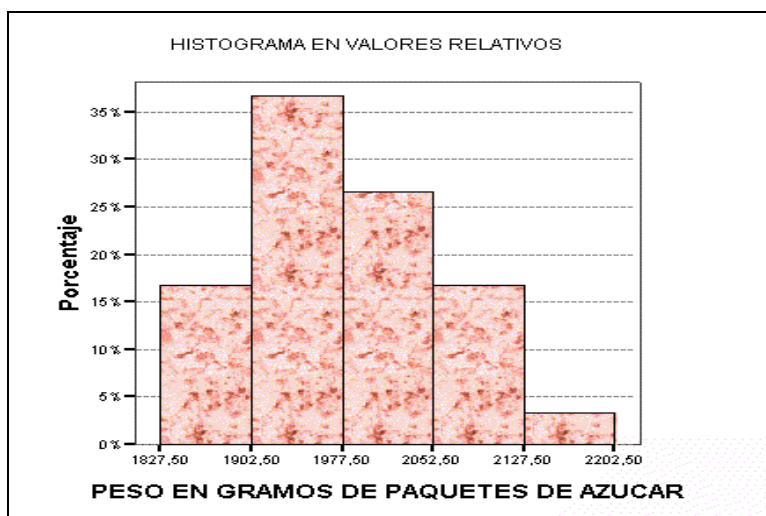


GRAFICO 4.5

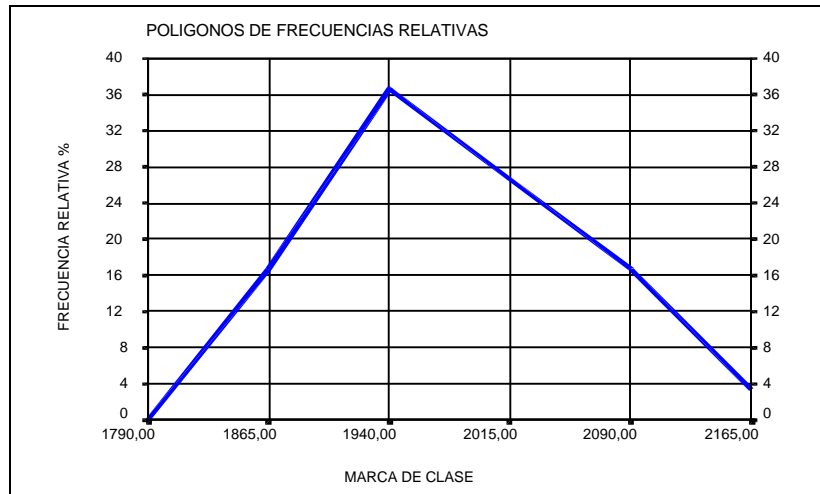


GRAFICO 4.6

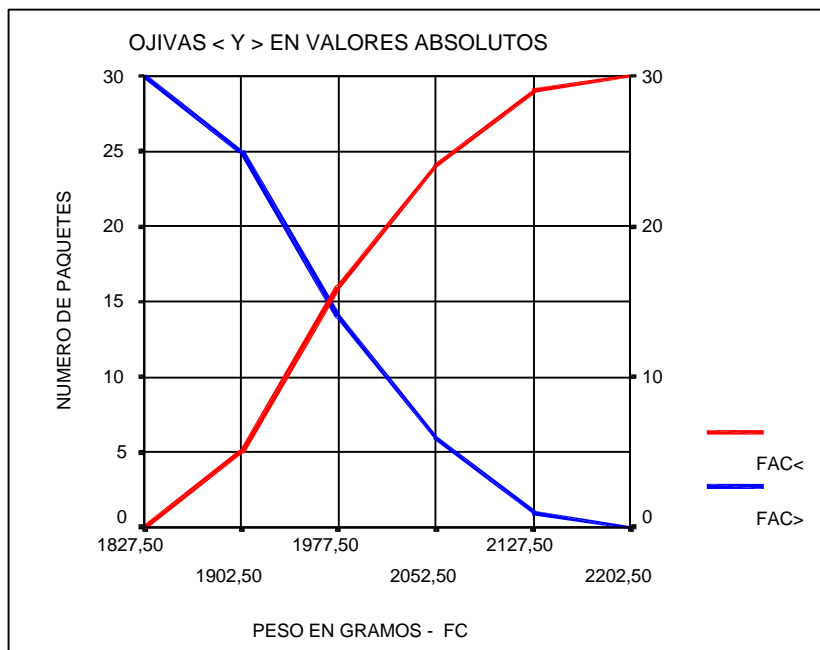


GRAFICO 4.7

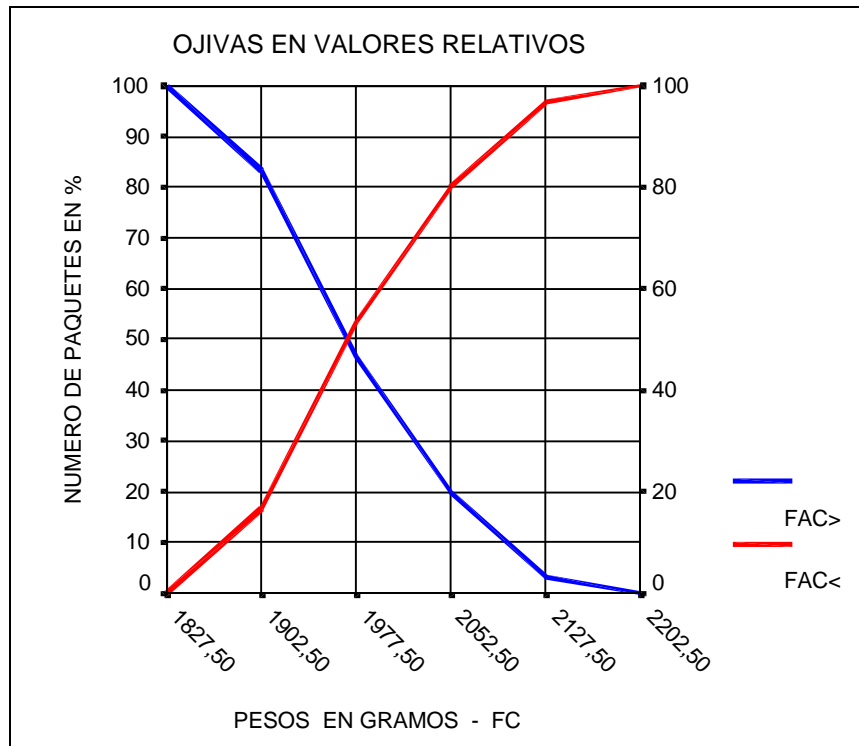


GRAFICO 4.8

4.15 DIAGRAMA DE PARETO.

Es un histograma para datos categóricos, se usa mucho en el control de calidad, ya que se pueden resaltar los diversos atributos, fallas o problemas en un producto o un proceso. Las categorías o intervalos están ordenados de modo que en la parte izquierda aparece la categoría con la mayor frecuencia, seguida por la categoría que tienen la mayor frecuencia y así sucesivamente. Este tipo de histograma lleva el nombre del economista italiano V. Pareto y en general exhibe la ley de Pareto, que dice que la mayor parte de los defectos aparece solo en unas pocas categorías.

EJEMPLO 3

Construir un diagrama de Pareto con la siguiente información sobre los defectos estructurales en las puertas de un automóvil:

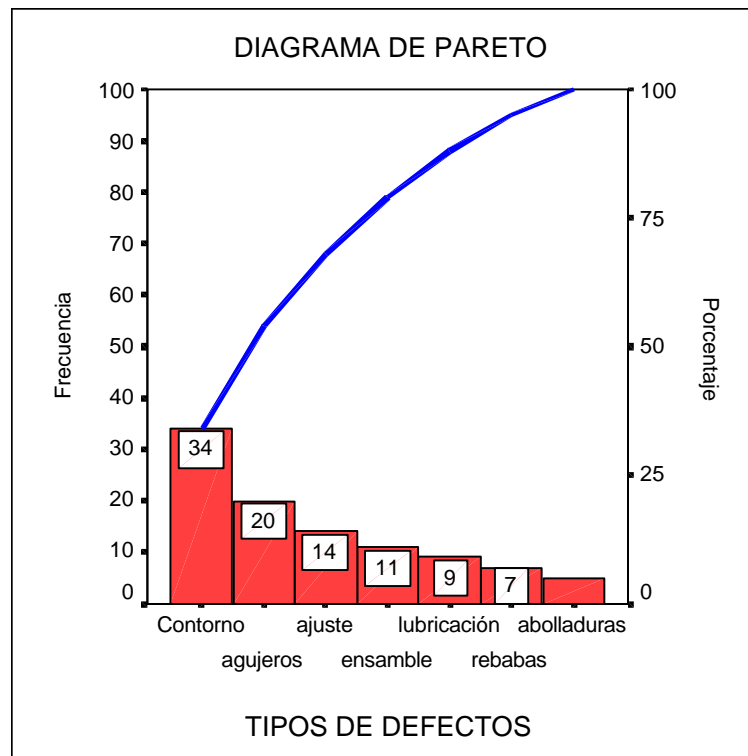
6 abolladuras, 11 partes ensambladas fuera de secuencia, 14 partes mal ajustadas, 20 faltas de agujeros, 9 partes no lubricadas, 34 partes fuera de contorno y 7 partes con rebabas.

DESARROLLO

Se construyó el diagrama de Pareto utilizando la información de los defectos después de codificarlos en el editor de datos de SSPS 11.

Tipo de defecto	Cantidad
Abolladuras	6
Ensamble	11
Ajuste	14
Agujeros	20

Lubricación	9
Contorno	34
Rebabas	7



4.16 DIAGRAMA DE TALLO Y HOJA

Se ideó por parte del estadígrafo John Turkey como alternativa al histograma. Este diseño proporciona una impresión visual rápida del número de observaciones de una clase. Para construir un diagrama de este tipo, la observación o dato se divide en dos partes: un tallo, formado por uno o más dígitos principales y una hoja, la cual contiene el resto de los dígitos. En general se debe escoger un número relativamente pequeño de tallos en comparación con el número de observaciones. Se recomienda seleccionar entre 5 y 20 tallos; estos tallos se colocan ordenados de menor a mayor en la parte izquierda del diagrama y al lado de cada tallo se ponen todas las que corresponden a los valores observados, tal como se encuentran en el conjunto de datos.

El diagrama de tallo y hoja o también llamado diagrama de árbol es uno de los mejores métodos para la caracterización de los datos porque al mismo tiempo organiza y presenta los datos en forma tabular como gráfica, con la ventaja que no se pierden las observaciones o datos originales. Si giramos 90 grados el diagrama de tallo y hoja tendremos prácticamente un histograma donde las hojas representarían las barras verticales o frecuencias. Cabe anotar que a partir de este diagrama también podemos construir una tabla de frecuencia.

EJEMPLO

Elaborar utilizando los datos de los paquetes de azúcar :

- Un diagrama de tallo y hojas con 5 intervalos y una tabla de frecuencia
- Un diagrama de tallo y hoja con 10 intervalos y una tabla de frecuencia

- c) Un diagrama de Tallo y hoja utilizando SPSS

DESARROLLO

- a) Para construir el diagrama de tallo y hoja tomamos como tallo los dos primeros dígitos y como hoja los dos restante y obtenemos el diagrama que se muestra a continuación.

**DIAGRAMA DE TALLO Y HOJA PARA EL PESO
DE PAQUETES DE AZUCAR**

TALLO	HOJA	FRECUENCIA
18	30,65,76,80,98	5
19	09,10,30,34,43,46,54,66,67,72,77,85,88,99	14
20	05,15,25,30,47,53,61,75,93	9
21	20	1
22	00	1

Para elaborar la tabla de frecuencia partimos de la información del diagrama y establecemos los intervalos con una tolerancia de un gramo y obtenemos la siguiente tabla.

**TABLA DE FRECUENCIA
PESO DE LOS PAQUETES DE AZUCAR**

PESO EN GRAMOS	FRECUENCIA
1800 - 1899	5
1900 - 1999	14
2000 - 2099	9
2100 - 2199	1
2200 - 2299	1

- b) Cuando estimamos que la información suministrada por el diagrama anterior, no es suficiente, podemos dividir cada tallo en dos partes; la inferior (**I**) conteniendo todo los datos menores que la mitad del intervalo y la superior (**S**) con todos los datos mayores o iguales a la mitad del intervalo. La tabla de frecuencia se construye de manera similar a la anterior.

**DIAGRAMA DE TALLO Y HOJA PARA EL PESO
DE PAQUETES DE AZUCAR**

TALLO	HOJA	FRECUENCIA
18I	30	1
18S	65,76,80,98	4
19I	09,10,30,34,43,46	6
19S	54,66,67,72,77,85,88,99	8
20I	05,15,25,30,47	5
20S	53,61,75,93	4
21I	20	1
21S	-	0
22I	00	1
22S	0	0

**TABLA DE FRECUENCIA
PESO DE LOS PAQUETES DE AZUCAR**

PESO EN GRAMOS	FRECUENCIA
1800 - 1849	1
1850 - 1899	4
1900 - 1949	6
1950 - 1999	8
2000 - 2049	5
2050 - 2099	4
2100 - 2149	1
2150 - 2199	0
2200 - 2249	1
2250 - 2300	0

c) Este es diagrama de tallo y hoja generado por SPSS 11

PESO EN GRAMOS DE PAQUETES DE AZUCAR		
Stem-and-Leaf Plot (DIAGRAMA DE TALLO Y HOJA)		
Frequency	Stem	Leaf
1,00	18	3
4,00	18	6 7 8 9
6,00	19	0 1 3 3 4 4
8,00	19	5 6 6 7 7 8 8 9
5,00	20	0 1 2 3 4
4,00	20	5 6 7 9
1,00	21	2
1,00	Extremes	(>=2200)

EJEMPLO 2

En la tabla adjunta se muestran los datos de 80 muestras de una aleación de aluminio – litio.

**TABLA
RESISTENCIA A LA TRACCIÓN DE 80 MUESTRAS DE UNA ALEACIÓN
ALUMINIO LITIO EN PSI**

105	201	153	186	120	170	118	149
97	175	183	174	121	250	150	135
245	151	174	199	181	171	148	158
163	157	154	115	160	172	158	169
207	178	190	193	194	135	229	146
134	180	70	167	184	133	156	123
218	131	101	171	165	208	158	133
199	228	142	163	145	158	176	110

160	154	149	88	160	168	180	141
196	221	200	186	150	181	167	143

A partir de esta información utilizando SSPS 10 construya:

- Un histograma en valores absolutos con 9 intervalos
- Un histograma en valores absolutos con 7 intervalos
- Un histograma en valores absolutos con 10 intervalos
- Un histograma en valores absolutos con 12 intervalos
- Un diagrama de tallo y hoja

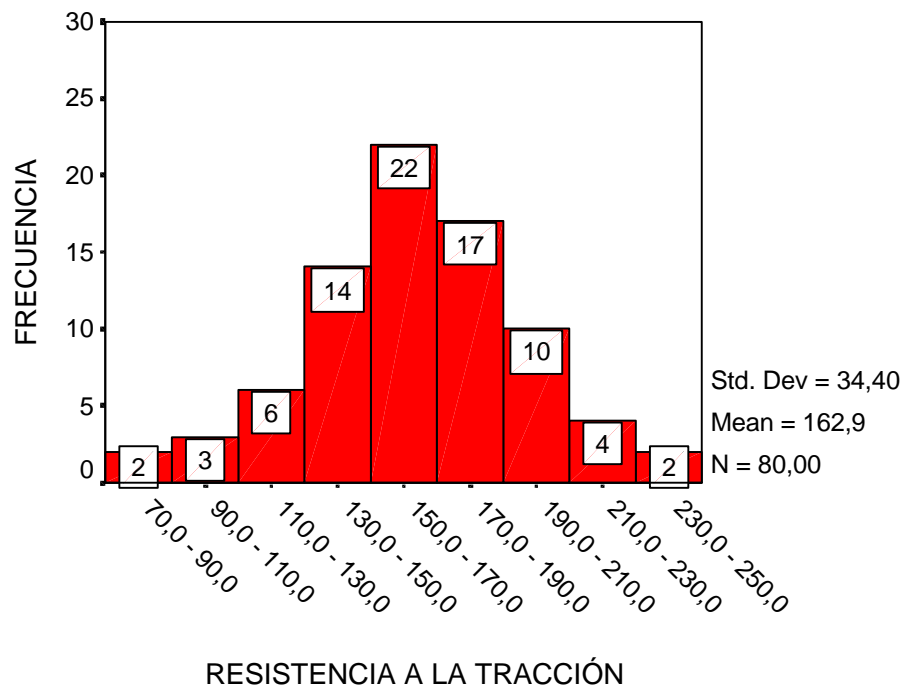
DESARROLLO

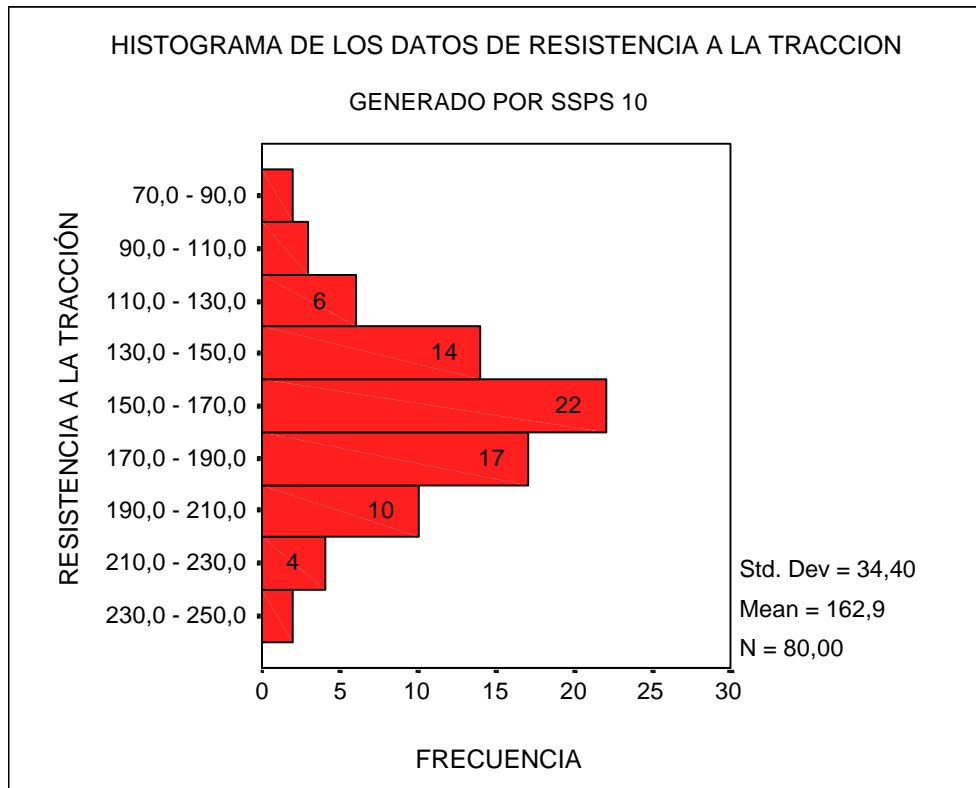
TABLA
DATOS ORDENADOS EN ORDEN CRECIENTE

70	123	145	154	163	172	183	200
88	131	146	156	163	174	184	201
97	133	148	157	165	174	186	207
101	133	149	158	167	175	186	208
105	134	149	158	167	176	190	218
110	135	150	158	168	178	193	221
115	135	150	158	169	180	194	228
118	141	151	160	170	180	196	229
120	142	153	160	171	181	199	245
121	143	154	160	171	181	199	250

HISTOGRAMA DE LOS DATOS DE RESISTENCIA A LA TRACCION

GENERADO POR SSPS 10

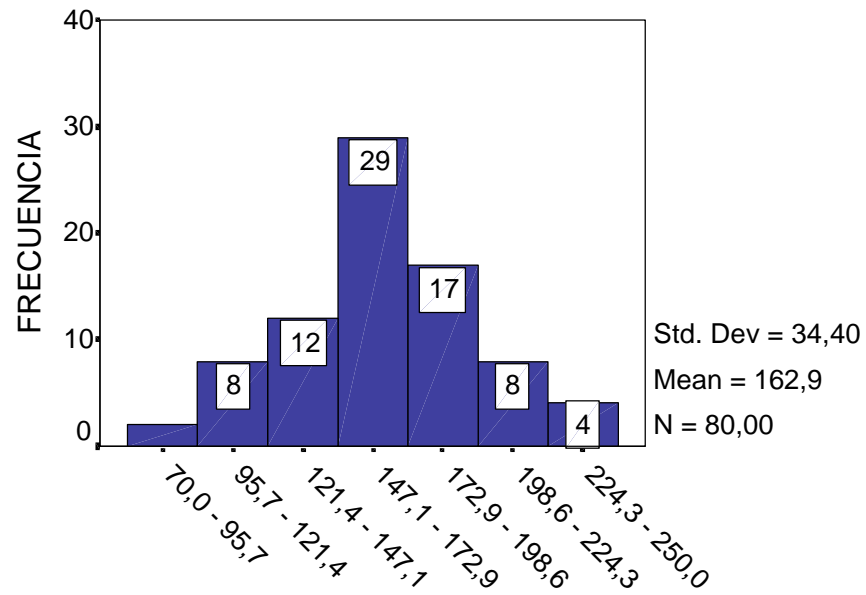




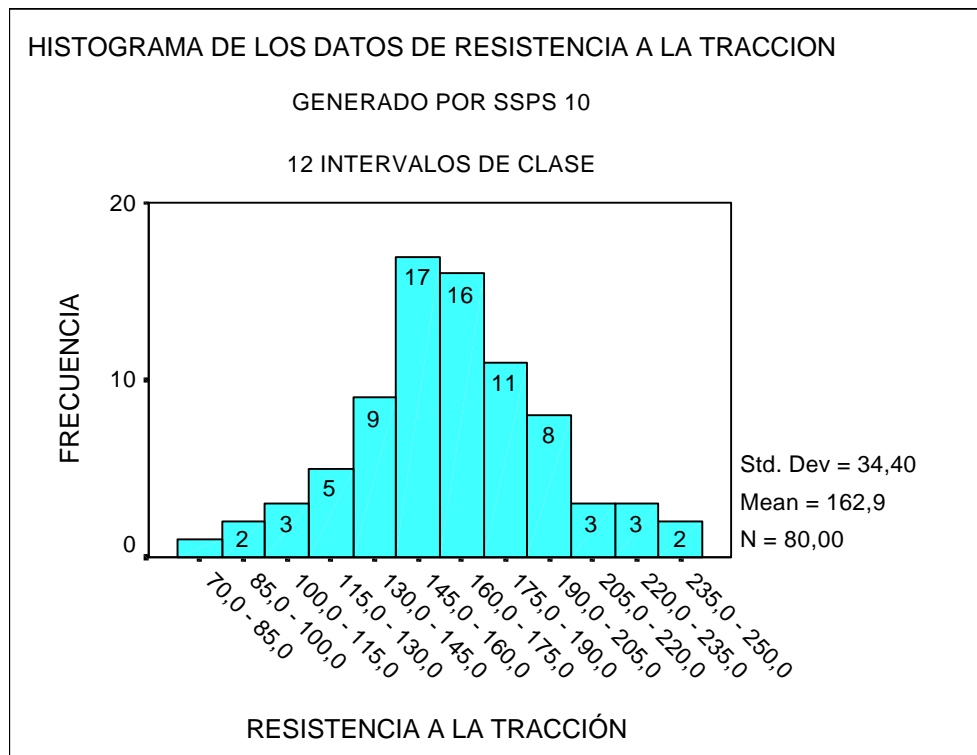
HISTOGRAMA DE LOS DATOS DE RESISTENCIA A LA TRACCIÓN

GENERADO POR SSPS 10

7 INTERVALOS DE CLASE



RESISTENCIA A LA TRACCIÓN



RESISTENCIA A LA TRACCION

Stem-and-Leaf Plot

Frequency	Stem &	Leaf
1,00	Extremes	(=<70)
2,00	0 .	89
22,00	1 .	0011122233333344444444
45,00	1 .	5555555555556666666666777777777888888888999999
8,00	2 .	00001222
2,00	Extremes	(>=245)

Stem width: 100
Each leaf: 1 case(s)

EJEMPLO 3

El cuadro adjunto muestra una distribución de frecuencia de la vida media de 400 circuitos integrados, probados en la empresa **Soy Feliz & Cia**.

CUADRO 3.

VIDA MEDIA DE CIRCUITOS INTEGRADOS

Vida media en horas	Número de circuitos integrados
------------------------	-----------------------------------

300 - 399	14
400 - 499	46
500 - 599	58
600 - 699	76
700 - 799	68
800 - 899	62
900 - 999	48
1000 - 1099	22
1100 - 1199	6

Construir y/o calcular a partir de esta información lo siguiente:

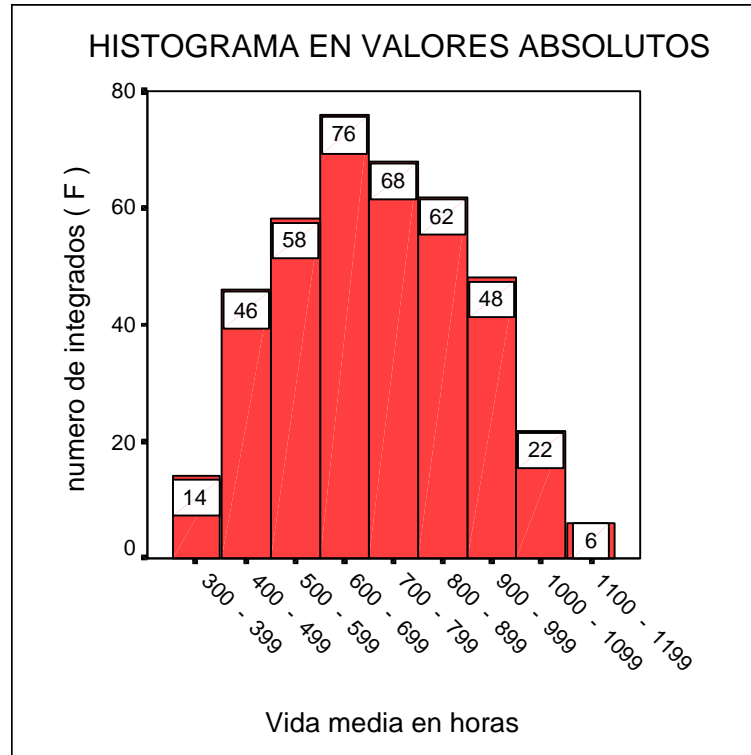
- Un histograma de frecuencia absolutas
- Un histograma de frecuencia relativas
- Las ojivas en valores absolutos
- Un histograma de frecuencias acumuladas en % menor que
- El % de circuitos integrados con vida media d 560 horas
- El numero de circuitos integrados con vida media mayor que 970 horas
- El porcentaje de circuitos integrados con vida media entre 620 y 800 horas
- El porcentaje de circuitos integrados con vida media entre 500 y 1050 horas

DESARROLLO

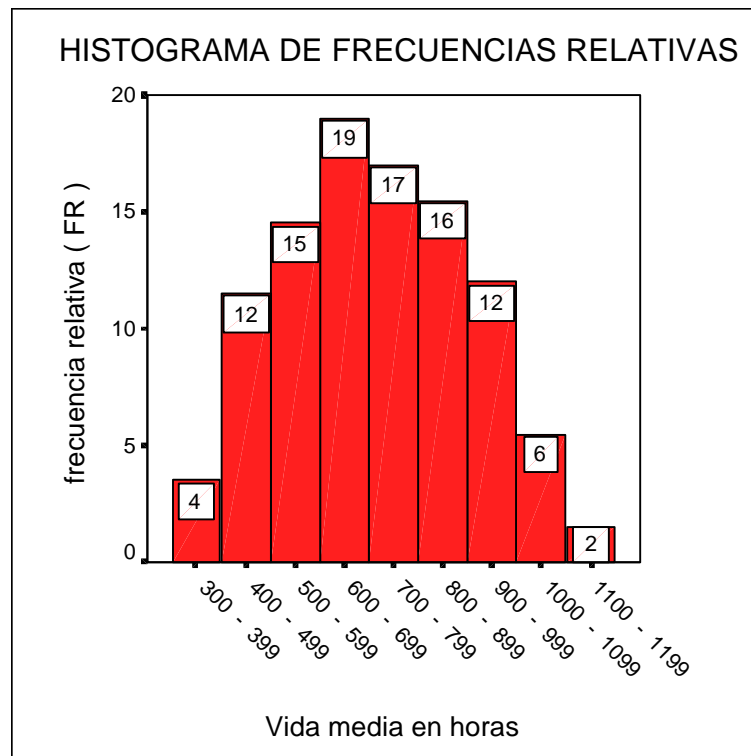
Con los datos suministrados elaboramos el siguiente cuadro para los datos de interés.

Vida media en horas	F	Fr	FC	FAC<	FAC>	FAC>%	FAC<%
		0	299.5	0	400	100	0
300 - 399	14	3.5	399.5	14	386	96.5	3.5
400 - 499	46	11.5	499.5	60	340	85.0	15.0
500 - 599	58	14.5	599.5	118	282	70.5	29.5
600 - 699	76	19.0	699.5	194	206	51.5	48.5
700 - 799	68	17.0	799.5	262	138	34.5	65.5
800 - 899	62	15.5	899.5	324	76	19.0	81.0
900 - 999	48	12.0	999.5	372	28	7.0	93.0
1000 - 1099	22	5.5	1099.5	394	6	1.5	98.5
1100 - 1199	6	1.5	1199.5	400	0	0	100

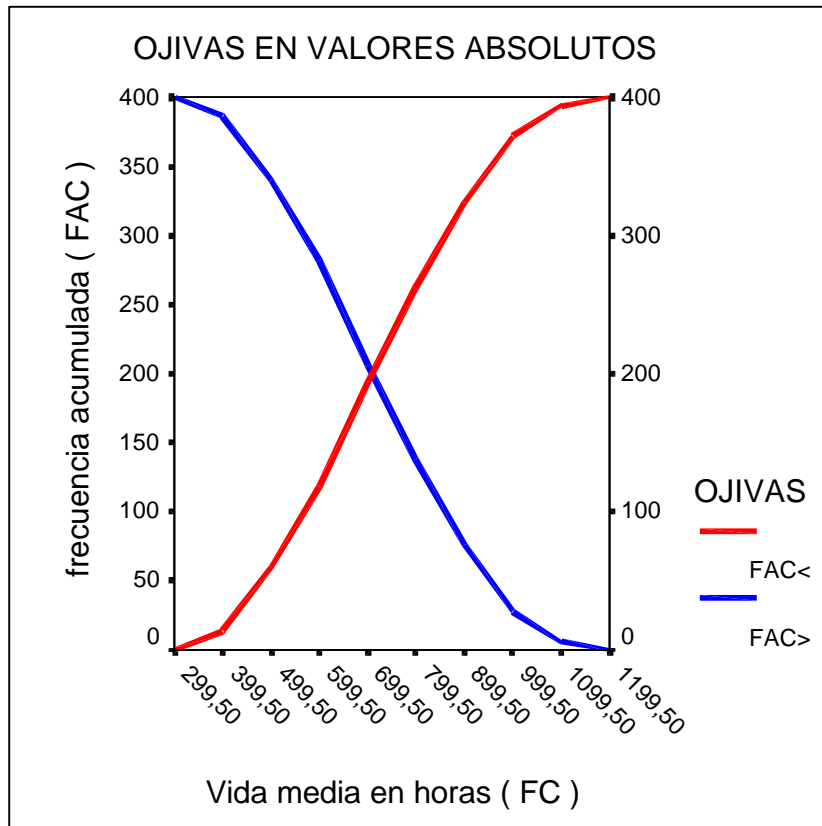
- Todos gráficos fueron realizados utilizando el software SPSS 11



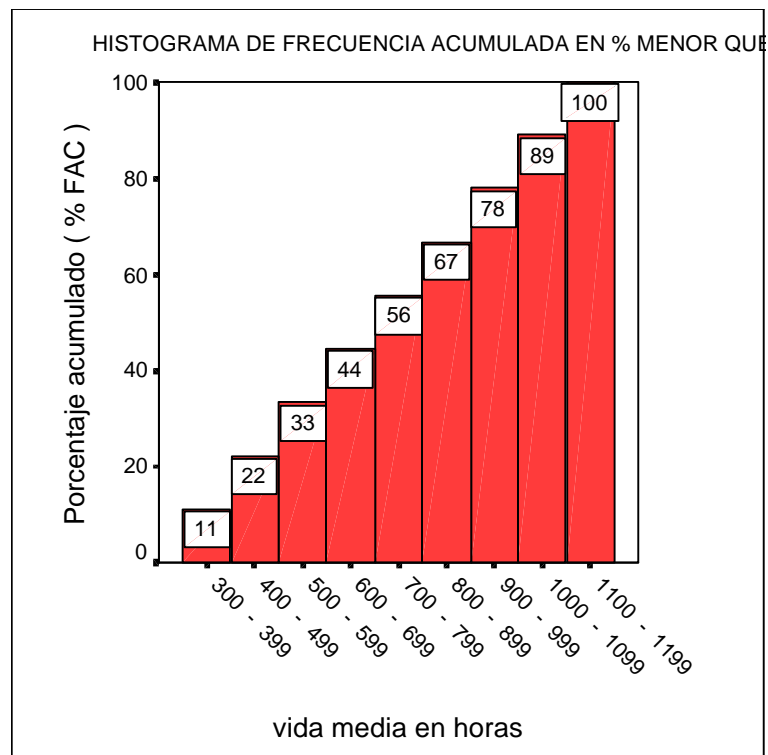
b)



c)



d)



- e) Para hallar el porcentaje de circuitos integrados con vida media menor que 560 horas , aplicamos la interpolación en las fronteras de clase y las frecuencias acumuladas menor que y obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{599.5 - 560}{599.5 - 499.5} &= \frac{118 - x}{118 - 60} \\ \frac{39.5}{100} &= \frac{118 - x}{58} \\ x &= 118 - (0.395)(58) = 95.09 \\ Q \% \text{ circuitos} &= \frac{(95.09)(100)}{400} = 23.8\%\end{aligned}$$

- d) Para encontrar el numero de circuitos integrados mayor que 970 horas , utilizamos las fronteras de clase y las frecuencias acumuladas mayor que y obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{999.5 - 970}{999.5 - 899.5} &= \frac{28 - x}{76 - 28} \\ \frac{29.5}{100} &= \frac{28 - x}{-48} \\ x &= 28 - (0.295)(-48) = 42.16 \text{ circuitos}\end{aligned}$$

- e) Para encontrar el % de circuitos integrados entre 620 y 800 horas se sigue el mismo proceso , teniendo cuidado de utilizar solamente una de las columnas de frecuencias acumuladas,; puede se cualquiera de las cuatros; utilizaremos la frecuencia acumulada menor que en porcentaje. Cabe anotar que todos esos resultados se pueden también obtener de una forma grafica a partir de las ojivas.

$$\begin{aligned}\frac{899.5 - 800}{899.5 - 799.5} &= \frac{19 - x_1}{19 - 34.5} \\ \frac{99.5}{100} &= \frac{19 - x_1}{-15.5} \\ x_1 &= 19 - (0.995)(-15.5) = 34.4\% \\ \frac{699.5 - 620}{699.5 - 599.5} &= \frac{51.5 - x_2}{51.5 - 70.5} \\ \frac{79.5}{100} &= \frac{51.5 - x_2}{-19} \\ x_2 &= 51.5 - (0.795)(-19) = 66.6\% \\ Q \% \text{ circuitos} &= x_2 - x_1 = 66.6 - 34.4 = 32.2\%\end{aligned}$$

TALLER MODULO 4 **

****SUGERENCIA:** Trate Inicialmente de resolver los ejercicios manualmente y chequee los resultados de la mayor parte de los ejercicios utilizando cualquier software estadístico, (SSPS 11, Excel , etc)

1. Supóngase que se desea hacer un estudio del comportamiento de las ventas en la fabrica de bombillos “ **El Iluminado Santiaguino** ”. Para dicho estudio se selecciono una muestra aleatoria entre las ventas de los últimos 6 meses, correspondiente a 50 días . Los valores en millones de pesos se muestran en la tabla adjunta. A partir de los datos redondeados construir y/o calcular lo siguiente:

**TABLA
VENTAS DIARIAS**

6.8	9.1	16.9	18.7	15.4
22.5	17.4	12.4	20.3	18.6
16.3	9.6	27.8	15.5	22.9
12.6	14.5	21.5	29.3	19.3
18.7	4.9	8.9	14.3	24.4
34.5	18.7	36.7	21.3	11.5
10.8	30.4	5.3	11.9	21.7
26.7	9.4	23.2	7.5	23.3
8.6	14.7	19.8	22.3	31.7
13.9	17.5	25.7	13.6	5.8

- a) Una tabla de frecuencia
 - b) Un histograma y su respectivo polígono en valores absolutos
 - c) Un histograma y su respectivo polígono en valores relativos
 - d) Una ojiva menor que y otra mayor que en valores absolutos
 - e) Calcular el % de días con ventas diarias superiores a 20 millones de pesos ?
 - f) Calcular el numero de días con ventas inferiores a 20 millones de pesos ?
 - g) Calcular el numero de días con ventas entre 8.5 y 23.5 millones de pesos ?
 - h) Calcular el % de días con ventas entre 8.5 y 23.5 millones de pesos ?
 - i) Para que % de días, el valor de las ventas fueron inferiores a \$18 millones de pesos ?
 - j) Para que numero de días el valor de las ventas fueron inferiores a 28.5 millones de pesos ?
2. En una muestra aleatoria de 50 familias tomada en el Barrio Alfonso López de la ciudad de Buenaventura, con mira a detectar el numero de hijos por grupo familiar, se encontraron los datos que se muestran en la tabla adjunta:

**TABLA
NUMERO DE HIJOS POR FAMILIA**

6	1	6	1	4
5	4	4	2	6
3	6	2	5	2
6	5	5	3	3
7	4	8	3	4
5	1	3	3	5
1	3	3	1	2
6	4	2	5	3
6	1	1	2	1
3	5	5	3	8

A partir de esta información construya y / o calcule lo siguiente:

- un Diagrama de tallo y hoja
- Una tabla de frecuencia
- Un histograma en valores absolutos y su respectivo polígono
- Las ojivas relativas
- El porcentaje de familia con menos de 3 hijos
- El porcentaje de familia con mas de 4 hijos
- El porcentaje de familia con 1 a 4 hijos

3. A partir de los datos de una muestra aleatoria de la edad de 50 estudiantes de la facultad de Administración de Empresas, que se muestra en la tabla adjunta:

**TABLA
EDAD DE LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD
DE ADMINISTRACIÓN DE EMPRESAS
USACA**

19	21	16	21	24
25	24	24	22	17
23	16	22	25	20
18	20	22	23	23
17	24	18	23	24
25	21	23	23	22
21	23	23	21	22
17	24	22	25	23
26	21	21	22	21
23	25	25	23	18

- Elaborar una tabla de frecuencia con 7 intervalos
- Construir un histograma en valores absolutos y su respectivo polígono
- Construir un histograma en valores relativos y su respectivo polígono
- Construir las ojivas en valores relativos
- Construir las ojivas en valores absolutos
- Calcular el % de estudiantes con edades mayores de 21 años

- g) Calcular el numero de estudiantes con edades inferiores a 20 años
 - h) Calcular el % de estudiantes con edades entre 18 y 20.5 años
 - i) Sacar Conclusiones
4. A partir de una muestra aleatoria del peso (en kilogramos) de 50 estudiantes de la facultad de medicina con mira analizar la tendencia se encontraron los datos que se muestran en la tabla adjunta:

TABLA
PESO (KGR) DE LOS ESTUDIANTES
DE LA FACULTAD DE MEDICINA
USACA

86	61	86	91	54
75	74	54	92	66
63	76	72	55	72
66	95	65	73	83
67	54	68	83	94
75	71	63	63	95
91	63	73	61	52
96	94	72	55	73
76	91	71	52	51
73	85	75	53	58

- a. Un diagrama de tallo y hoja
- b. Una tabla de frecuencia
- c. Construir un histograma en valores absolutos y su respectivo polígono
- d. Construir un histograma en valores relativos y su respectivo polígono
- e. Construir las ojivas en valores relativos
- f. Construir las ojivas en valores absolutos
- g. Calcular el numero de estudiantes con peso por encima del 75 kgrs
- h. Calcular peso medio de los estudiantes
- i. Calcular el numero de estudiantes con peso por debajo del 65 kgrs
- j. Calcular los pesos correspondiente al 25 , 50 y 75 % a partir de las ojivas relativas
- k. Sacar conclusiones.

5. La siguiente tabla adjunta muestra la distribución de cargas máximas en toneladas que soportan los cables producidos por cierta fabrica. Construya y/o calcule:

TABLA
CARGA MÁXIMA

Carga máxima En toneladas	Numero de Cables
9.3 - 9.7	2
9.8 - 10.2	5
10.3 - 10.7	12
10.8 - 11.2	17
11.3 - 11.7	14
11.8 - 12.2	6

12.3 - 12.7	3
12.8 - 13.2	1

- a) Un histograma en valores absolutos y su respectivo polígono
- b) Las ojivas en valores mayor que y menor que en porcentaje
- c) El numero de cables que soportan mas de 10 toneladas
- d) El numero de cable que soportan menos de 12 toneladas
- e) El porcentaje de cable que soportan entre 9.5 y 12.5 toneladas

6. En la tabla adjunta se muestra la distribución de frecuencia del salario promedio anual de los 100 empleados de una empresa metalúrgica. A partir de esta información Construya y/o calcule lo siguiente:

**TABLA
SALARIOS DE LOS EMPLEADOS**

SALARIOS \$	NUMERO DE EMPLEADOS
300.000 - 500.000	30
500.000 - 700.000	20
700.000 - 900.000	12
900.000 - 1.100.000	10
1.100.000 - 1.300.000	8
1.300.000 - 1.500.000	6
1.500.000 - 1.700.000	9
1.700.000 o MAS	5
TOTAL	100

- a) Un histograma en valores absolutos y su respectivo polígono
- b) Las ojivas relativas mayor y menor que
- c) El porcentaje de empleados con salarios superiores a \$ 800.000
- d) El porcentaje de empleados con salarios inferiores a \$ 500.000
- e) El numero de empleados con salarios entre \$ 400.000 y \$ 1.000.000

REVISTAS ELECTRONICAS

- 28. [Journal of Statistics Education](#). Excelente revista (¡gratuita!) editada por la American Statistical Association sobre educación estadística (a todos los niveles)
- 29. [Homepage de la American Statistical Association](#). La mayor asociación de estadísticos, editora de *Journal of Agricultural, Biological, and Environmental Statistics*, *Journal of the American Statistical Association*, *Journal of Statistics Education* y *The American Statistician* entre otras revistas.
- 30. [Environmental and Ecological Statistics](#)
- 31. [Community Ecology](#)

32. [*Journal of Agricultural, Biological, and Environmental Statistics*](#)
33. [*Bulletin of the Ecological Society of America*](#) (gratuita; contiene artículos de ecología estadística)
34. [*Journal of Statistical Software*](#) (gratuita)
35. [*InterStat \(Statistics on the Internet\)*](#) (gratuita)
36. [Probability and Statistics Journals on the Web](#)

ESTADISTICA ON LINE

163. [Aula Virtual de Bioestadística, Universidad Complutense](#)
164. [Curso de bioestadística de la Universidad de Málaga](#)
165. [Apuntes de Bioestadística. Unidad de Bioestadística Clínica del Hospital Ramón y Cajal](#)
166. [Lecciones de Estadística, 5campus.org \(análisis multivariante...\)](#)
167. [Curso de Bioestadística de la Universidad Nacional de Misiones \(Argentina\)](#)
168. [Curso de estadística \(para ingenieros\) de una universidad mexicana](#)
169. [Cursos de estadística de la Universidad de California, Los Angeles](#)
170. [Cursos de estadística de la Universidad de Michigan](#)
171. [Electronic Statistics Textbook](#)
172. [A New View of Statistics](#)
173. [HyperStat Statistics Textbook](#)
174. [Statistics at Square One](#)
175. [Statistics Every Writer Should Know](#)
176. [Introductory Statistics: Concepts, Models, and Applications](#)
177. [Multivariate Statistics: Concepts, Models, and Applications](#)
178. [A complete guide to nonlinear regression](#)
179. [Ordination Methods for Ecologists](#)
180. [Annotated Bibliography of Canonical Correspondence Analysis and related constrained ordination methods 1986-1993](#)
181. [Multivariate Statistics: an Introduction](#)
182. [A glossary of ordination-related terms](#)
183. [Glossary of Statistical Terms and Medical Citations for Statistical Issues](#)
184. [Glossary of over 30 statistical terms](#)
185. [EVSC 503 Applied Statistics for the Environmental Sciences](#)
186. <http://s9000.furman.edu/mellonj/spss1.htm>

187. <http://www.indiana.edu/~statmath/stat/spss/win/index.html>
188. <http://www.utexas.edu/cc/stat/tutorials/spss/SPSS1/Outline1.html>
189. <http://web.uccs.edu/lbecker/SPSS/content.htm>
190. <http://core.ecu.edu/psyc/wuenschk/SPSS/SPSS-Data.htm>
191. <http://www.tulane.edu/~panda2/Analysis2/ahome.html>
192. <http://www.shef.ac.uk/~scharr/spss/index2.htm>
193. <http://calcnnet.mth.cmich.edu/org/spss/index.html>
194. <http://calcnnet.mth.cmich.edu/org/spss/toc.htm>
195. <http://www.public.asu.edu/~pythagor/spssworkbook.htm>
196. <http://lib.stat.cmu.edu/>
197. <http://www.stat.ufl.edu/vlib/statistics.html>
198. <http://www.statserv.com/software.html>
199. <http://www.maths.uq.edu.au/~gks/webguide/>
200. <http://www.statistics.com/>
201. <http://www.helsinki.fi/~jpuranen/links.html#stc>
202. <http://www.maths.uq.edu.au/~gks/webguide/free.html>
203. <http://nhsbig.inhs.uiuc.edu/>
204. <http://www.okstate.edu/artsci/botany/ordinate/software.htm>
205. <http://life.bio.sunysb.edu/ee/biometry/>
206. <http://life.bio.sunysb.edu/morph/software.html>
207. <http://pbil.univ-lyon1.fr/ADE-4/ADE-4.html>
208. [http://ourworld.compuserve.com/homepages/Rainer_Wuerlaender/statsoft.h](http://ourworld.compuserve.com/homepages/Rainer_Wuerlaender/statsoft.htm)
[tm](http://ourworld.compuserve.com/homepages/Rainer_Wuerlaender/statsoft.htm)
209. <http://www.stat.auckland.ac.nz/~mja/Programs.htm>
210. <http://it.stlawu.edu/~rlock/maa99/>
211. <http://it.stlawu.edu/~rlock/tise98/java.html>
212. <http://www.stat.vt.edu/~sundar/java/applets/>
213. <http://www.kuleuven.ac.be/ucs/java/index.htm>
214. <http://noppa5.pc.helsinki.fi/koe/>
215. <http://www2.kenyon.edu/people/hartlaub/MellonProject/mellon.html>

Demostraciones Java para el aprendizaje de la estadística

216. [Electronic Textbook](#) (UCLA), programa *on-line* de representación y cálculo de funciones de densidad y de distribución (normal, F , ji-cuadrado, números aleatorios...). Equivalente a un libro de tablas

BIBLIOGRAFÍA

64. Montgomery Douglas y Runger George.(1996), Probabilidad y Estadística aplicada a la Ingeniería., McGraw-Hill, Mexico
65. Montgomery Douglas y Hines William.(1995), Probabilidad y Estadística aplicada a la Ingeniería. y Administración, segunda edición ,CECSA, México
66. Mendenhall William, Wackerly Dennis y Scheaffer Richard (1994), Estadística Matemáticas con Aplicaciones , segunda edición, Grupo Editorial Iberoamerica. M, México
67. Govinden Portus Lincuyan.(1998), Introducción a la Estadística,. McGraw-Hill, Santafé de Bogotá
68. Webster Allen L.(1998), Estadística aplicada a la Empresa y a la Economía, segunda edición, McGraw-Hill, Madrid
69. Kohler Heinz.(1996), Estadística para Negocios y Economía, primera edición ,CECSA, México
70. Martinez Bencardino Ciro (1995), Estadística , sexta edición ,ECOE EDICIONES Santafé de Bogotá.
71. Alvarez C Ricardo (1994), Estadística Fundamental Aplicada, primera edición ,PUBLIADCO, Cali
72. Estadística," Enciclopedia Microsoft® Encarta® 2000. © 1993-1999 Microsoft Corporation.
73. Stockburger David W (1996) Introductory Statistics: Concepts, models an applications, , <http://www.psychstat.smsu.edu/sbk00.htm>
74. Mendoza Duran Carlos. (1995)Probabilidad y Estadística, <http://w3.mor.itesm.mx/~cmendoza/ma835/ma83500.html>
75. Valdés Fernando ,Comprensión y uso de la estadística, <http://www.cortland.edu/flteach/stats/glos-sp.html>
76. Hurtado Minotta Enrique A, Reflexiones para el Currículo, <http://www.geocities.com/soho/atrium/7521/tesis.html>
77. Academic Freedom , www.hrw.org/wr2k/issues-01.htm
78. Gonzalez Felipe, Africa : El silencio de los tambores, www.arrakis.es/~trazeg/gonzalez.html.
79. El año 2000, [WWW.arrakis.es/~ trazeg/anno2000.html](http://WWW.arrakis.es/~trazeg/anno2000.html)
80. Mendenhall, W.; D.D. Wackerly y R.L. Scheaffer. *Estadística Matemática con Aplicaciones*. Grupo Editorial Iberoamérica. México.
81. Freund, John E. y Gary A. Simon. *Estadística elemental*. Prentice-Hall Hispanoamericana, SA. México, 1994. (8ª edición.)
82. Spiegel, M.R. *Estadística*. McGraw-Hill. México. (Serie Schaum.)
83. <http://www.unl.edu.ar/fave/sei/encuestas/index.html>.
84. Wonnacott, Thomas H. y Ronald J. Wonnacott (1998) *Introducción a la estadística*. Limusa/IPN. México.

MODULO V

MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

Los datos, al igual que los seres vivos, frecuentemente tienden a congregarse alrededor de ciertos lugares de reunión favoritos. Los estudiantes los fines de semanas tienden a reunirse en los bares, en los estadios, centros de hermandad y muy raras ocasiones en la biblioteca. De modo similar los números también parecen disfrutar de la compañía de otros números y comparten las inclinaciones a agruparse en torno de algún punto central. Esta posición central suele llamarse sencillamente la media o promedio.

En este modulo aprenderemos a calcular las diferentes medidas de tendencia central para datos agrupados y datos sin agrupar.

5. MEDIDAS DE TENDENCIAS CENTRAL.

Son aquellas medidas que suelen situarse hacia centro de un conjunto de datos ordenados por magnitud. Entre las medidas de tendencia central tenemos la media aritmética, la mediana, la moda, media geométrica, la media armónica,

5.1 MEDIA ARITMÉTICA

Es por excelencia una de las medidas mas utilizada, tanto que a veces, la utilizamos tan familiarmente, cuando decimos que Xiomara conversadora emperdenida habla en promedio 3 horas diarias por teléfono, lo que no necesariamente quiere decir que cada día hable 3 horas sino que es el resultado promedio de un muestra, en donde en 7 días de observación se obtuvieron valores de 2, 3, 4, 5, 3, 1, 3, encontrándose que el numero de horas hablada tiende agruparse alrededor de 3.

Matemáticamente la media aritmética o promedio aritmético de un conjunto de n datos, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, se denota por \bar{x} y se define como la sumatoria de todo los valores observados dividido entre el numero de observaciones.

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \bar{X}$$

EJEMPLO 1

Calcular el numero promedio de horas conversadas telefónicamente por Xiomara a partir de los siguientes datos :

TABLA 5. 1
DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS
LLAMADAS TELEFONICAS

Día	Duración-hr	Xi
Domingo	2	1

Lunes	3	2
Martes	4	3
Miércoles	5	4
Jueves	3	5
Viernes	1	6
Sábado	3	7

$$\bar{X} = \frac{2 + 3 + 4 + 5 + 3 + 1 + 3}{7} = \frac{21}{7} = 3$$

Como puede verse al utilizar la formula Xiomara tiene una media aritmética de 3 horas de conversación telefónica.

5.2 MEDIA ARITMÉTICA PONDERADA :

Se utiliza cuando los datos tienen diferentes grados de importancia , lo cual puede estar representado por la frecuencia de clase o cualquier otra característica importante.

Matemáticamente se calcula así :

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n W_i X_i}{\sum_{i=1}^n W_i} = \frac{W_1 X_1 + W_2 X_2 + \dots W_n X_n}{W_1 + W_2 + \dots W_n}$$

Donde

W_i = Factor de ponderación

X_i = Valores de la variable

También se puede escribir así :

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i X_i}{\sum_{i=1}^n f_i} = \frac{f_1 X_1 + f_2 X_2 + \dots f_n X_n}{f_1 + f_2 + \dots f_n}$$

Donde

F = frecuencia

N = Frecuencia total

EJEMPLO 2

Si el primer parcial de estadística vale el 30%, el segundo el 30% y el examen final el 40% y las notas obtenidas por Rene Fernando fueron de 4.0, 3.5 y 4.5 respectivamente . Hallar la calificación promedio de Rene Fernando.

DESARROLLO

Usamos la media ponderada y obtenemos que la calificación promedio es de 4.05

$$\bar{X} = \frac{\sum_1^n W_i X_i}{\sum_1^n W_i} = \frac{0.3*4.0 + 0.3*3.5 + 0.4*4.5}{0.3 + 0.3 + 0.4} = 4.05$$

EJEMPLO 3

Resolver el ejemplo de Xiomara utilizando la formula la media ponderada .

DESARROLLO

Observamos la frecuencia de cada dato y utilizando la media ponderada en función de la frecuencia, encontramos que la media es igual a la encontrada anteriormente.

$$\bar{X} = \frac{\sum_1^n f_i X_i}{\sum_1^n f_i} = \frac{1*1 + 1*2 + 3*3 + 1*4 + 1*5}{1 + 1 + 3 + 1 + 1} = 3$$

5.3 MEDIA ARITMÉTICA PARA DATOS AGRUPADOS

Cuando los datos se dan agrupados, es decir, en una tabla de frecuencia, se puede calcular la media aritmética utilizando la siguiente formula :

$$\bar{X} = \frac{\sum_1^n f_i X_i}{\sum_1^n f_i} = \frac{f_1 X_1 + f_2 X_2 + \dots + f_n X_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}$$

Donde

X_i = Marca de clase

f_i =frecuencia de clase

EJEMPLO 4

Calcular la media aritmética para la tabla de distribución formada con los datos de la resistencia de la aleación cobre – litio

TABLA 5. 2

**DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS
RESISTENCIA A LA TRACCIÓN DE 80 MUESTRAS
DE UNA ALEACIÓN ALUMINIO LITIO EN PSI**

Resistencia	Numero de muestras
PSI (lbs/pul ²)	F
70 – 90	2
90 – 110	3
110 – 130	6

130 – 150	14
150 – 170	22
170 – 190	17
190 – 210	10
210 – 230	4
230 – 250	2

DESARROLLO

TABLA 5. 3
DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS
RESISTENCIA A LA TRACCIÓN DE 80 MUESTRAS
DE UNA ALEACIÓN ALUMINIO LITIO EN PSI

LI	LS	F	MC	F*MC
70	90	2	80	160
90	110	3	100	300
110	130	6	120	720
130	150	14	140	1960
150	170	22	160	3520
170	190	17	180	3060
190	210	10	200	2000
210	230	4	220	880
230	250	2	240	480
	TOTALES	80		13080

$$\bar{X} = \frac{\sum FMC}{\sum F} = \frac{13080}{80} = 163.5$$

5.4 MEDIANA

Es la medida de tendencia central que divide los datos ordenados en magnitud de una serie en dos partes iguales. También a veces se le denomina media posicional, porque se sitúa en el centro exacto del conjunto de datos una vez que la serie ha sido ordenada. La mitad de las observaciones estarán por encima de la mediana y la otra mitad por debajo de ella.

Antes de calcular la mediana es preciso ordenar las observaciones de la serie en orden creciente o decreciente y determinar su posición teniendo en cuenta si el número de datos es par o impar. En un conjunto de datos ordenados con un número impar de observaciones la posición central o posición de la mediana se calcula así:

$$PME = \frac{N + 1}{2}$$

Si el número de observaciones es par, la posición es igual a la media de los dos valores centrales.

EJEMPLO 5

Hallar la mediana de las notas obtenidas por Enrique Jr en:

- a) matemáticas financiera si estas fueron 3.5, 4.1, 3.8, 4.5 y 3.9
- b) estadística si las notas fueron 4.7, 4.3, 3.0, 3.7, 4.0 y 4.5.

DESARROLLO

- a) Ordenando los datos en orden creciente tenemos:

3.5 3.8 3.9 4.1 4.5

$$PME = \frac{N + 1}{2} = \frac{5 + 1}{2} = 3$$

$$ME = 3.9$$

de donde observamos que la posición central corresponde al tercer dato , cuyo valor es 3.9 por lo tanto la mediana es 3.9

- b) Igual que a ordenamos los datos y aplicamos la formula obtenemos la posición 3.5 que corresponde a la media de lo dos valores centrales que es 4.15, por lo tanto la mediana es 4.15

3.0 3.7 4.0 4.3 4.5 4.7

$$PME = \frac{N + 1}{2} = \frac{6 + 1}{2} = 3.5$$

$$ME = \frac{4. + 4.3}{2} = 4.15$$

5.5 MEDIANA PARA DATOS AGRUPADOS

Cuando los datos están tabulados en una tabla de frecuencia la mediana se obtiene por interpolación y se calcula así:

$$ME = FCI_{ME} + \left(\frac{N/2 - \sum F_{AC}}{F_{ME}} \right) (C)$$

FCI_{ME} = Frontera de clase inferior de la clase mediana
 C = Anchura del intervalo de la clase mediana
 ΣFAC = Frecuencia acumulada que precede a la clase mediana
 FME = Frecuencia de la clase mediana
 N = Frecuencia total

EJEMPLO 6

Para los datos del cuadro 5.2 Calcular la mediana.

DESARROLLO

TABLA 5. 4

**DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS
 RESISTENCIA A LA TRACCIÓN DE 80 MUESTRAS
 DE UNA ALEACIÓN ALUMINIO LITIO EN PSI**

Resistencia	Numero de muestras	Frecuencia acumulada
PSI (lbs/pul ²)	F	FAC
70 – 90	2	2
90 – 110	3	5
110 – 130	6	11
130 – 150	14	25
150 – 170	22	47
170 – 190	17	64
190 – 210	10	74
210 – 230	4	78
230 – 250	2	80

$$ME = 150 + \left(\frac{80/2 - 25}{22} \right) 20 = 163.6$$

Utilizando la formula de la mediana y los datos de la tabla de frecuencia calculamos y obtenemos que la resistencia mediana de la aleación es de 163.6 psi

5.6 LA MODA

La moda de un conjunto de números es el valor que mas se repite , es decir, el valor que ocurre con mayor frecuencia.

No existe la moda cuando todos los datos presentan igual frecuencia. Cuando la serie presenta mas de dos modas se dice que es multimodal ..

EJEMPLO 7

Hallar la moda de las notas obtenidas por Enrique Jr en:

- a) Microeconomía si estas fueron 3.8, 4.5, 3.8, 4.4, 4.0, y 4.7

- b) Finanzas 2 si las notas fueron 4.5, 4.7, 4.5, 3.6, 3.5, y 4.7
 c) estadística si las notas fueron 4.7, 4.3, 3.0, 3.7, 4.0 y 4.5.

DESARROLLO

a) la nota modal en microeconomía es 3.8 ya que es la nota que mas se repite, por lo tanto esta serie es unimodal

3.8 4.5 **3.8** 4.4 4.0 4.7

c) la serie de finanzas es bimodal ya que tiene 2 modas que son 4.5 y 4.7

4.5 **4.7** **4.5** 3.6 3.5 **4.7**

d) En estadística la serie es amodal , ya que ningún valor se repite

3.0 3.7 4.0 4.3 4.5 4.7

5.7 MODA PARA DATOS AGRUPADOS

Por definición la moda es la observación mas frecuente que se presenta , por lo tanto , se encontrara en el intervalo de clase de mayor frecuencia , llamado intervalo de clase modal. Para calcular la moda utilizaremos la siguiente formula :

$$MO = FCI_{MO} + \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \right) (C)$$

FCI_{MO} = Frontera de clase inferior de la clase modal

C = Anchura del intervalo de la clase modal

Δ_1 = Exceso de la frecuencia modal sobre la frecuencia de la clase que la precede

Δ_2 = Exceso de la frecuencia modal sobre la frecuencia de la clase que la sigue.

EJEMPLO 8

Calcular la resistencia modal para los datos de la aleación de aluminio - litio del cuadro 5.2

DESARROLLO

A partir de los datos del cuadro 5.5 y utilizando la formula calculamos la moda, obteniendo un valor de 162.3

$$MO = 150 + \left(\frac{22 - 14}{(22 - 14) + (22 - 17)} \right) (20) = 162.3$$

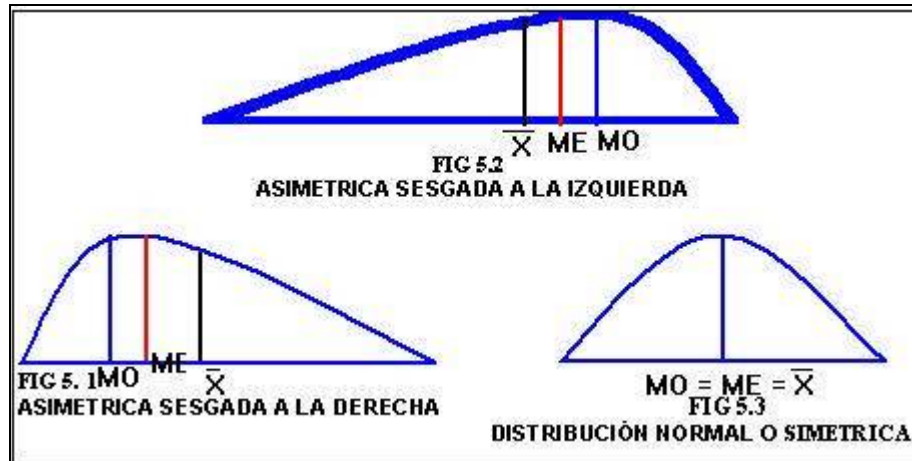
TABLA 5. 5
DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS
RESISTENCIA A LA TRACCIÓN DE 80 MUESTRAS
DE UNA ALEACIÓN ALUMINIO LITIO EN PSI

Resistencia	Numero de muestras	Frecuencia acumulada
PSI (lbs/pul ²)	F	FAC
70 – 90	2	2
90 – 110	3	5
110 – 130	6	11
130 – 150	14	25
150 – 170	22	47
170 – 190	17	64
190 – 210	10	74
210 – 230	4	78
230 – 250	2	80

5.8 RELACION EMPÍRICA ENTRE LA MEDIA ,LA MEDIANA Y LA MODA

Para curvas de frecuencias unimodales que sean poco asimétricas se cumple la siguiente relación empírica :

$$MEDIA - MODA = 3(MEDIA - MEDIANA)$$



Las graficas 5.1 y 5.2 muestran las posiciones relativas de la media, la mediana y la moda para curvas de frecuencias asimétricas a la derecha y a la izquierda. Para curvas simétricas los 3 valores coinciden ver grafica 5.3

En las curvas distribución de frecuencias tenemos:

En la simétrica la **media = Mediana = moda**

En la asimétrica sesgada a la derecha la **media > mediana > moda**

En la asimétrica sesgada a la izquierda la **media < mediana < moda**

5.9 COMPARACION ENTRE LA MEDIA ARITMÉTICA, LA MEDIANA Y LA MODA.

La media aritmética es la medida de tendencia central mas común y tiene la ventaja que se entiende y se calcula con mucha facilidad a partir de datos agrupados y datos no agrupados y se presta para manipulaciones e interpretaciones algebraicas posteriores. Desafortunadamente, la media aritmética esta afectada por los valores extremos o atípicos y a diferencia de la mediana, puede experimentar desviaciones drásticas a causa de las observaciones muy por encima o por debajo de ella.

Por ejemplo la media aritmética y la mediana de los datos 30, 40, 50, 60 y 70, es 50 y representa una medida excelente del punto central de los datos. Si el ultimo dato envés de 70 fuera 700, la media aritmética se convertiría en 180, mientras tanto la mediana seguiría siendo 50. Como la mediana no es afectada por este valor extremo, refleja con mayor credibilidad el centro verdadero del conjunto de datos.

Al igual que la mediana la moda es menos afectada por unas cuantas observaciones atípicas. Si tuviéramos 30, 40, 50, 50 y 70, la moda seguiría siendo 50 aunque el ultimo valor fuera 700. Pero si no hay moda o si el conjunto de datos es multimodal, su utilización puede causar confusión.

Es de vital importancia utilizar adecuadamente las medidas de tendencia central en la toma de decisiones.

5.10 MEDIA GEOMÉTRICA

La media geométrica G de un conjunto de números positivos $X_1, X_2, X_3, \dots, X_N$ es la raíz n -ésima del producto de esos números.

$$G = \sqrt[N]{X_1 X_2 X_3 \dots X_N}$$

Generalmente la media geométrica se utiliza casi siempre para calcular la tasa de crecimiento porcentual medio a lo largo del tiempo de determinadas series.

EJEMPLO 9

Calcular la media geométrica de los siguiente números 2 , 4, 8, 9 y 5.

DESARROLLO

$$G = \sqrt[5]{2 \times 4 \times 8 \times 9 \times 5} = \sqrt[5]{2880} = 4.92$$

EJEMPLO 10

El gerente general de Metalconsulting Ingeniería desea determinar la tasa de crecimiento medio de los ingresos de la Firma , a partir de los datos del cuadro 5.6 Si la tasa de crecimiento medio es inferior a la media del sector , que es del 12 % , ; Usted como asesor le recomendaría una nueva lanzar una campaña de publicidad.?

TABLA 5. 6

INGRESOS ANUALES DE METALCONSULTING INGENIERIA LTDA

PERIODO 1995 –2000

AÑO	INGRESOS EN MILLONES \$	PORCENTAJE DEL AÑO ANTERIOR
1995	68	---
1996	76	76/68 = 1.12
1997	78	78/76 = 1.03
1998	85	85/78 = 1.09
1999	90	90/85 = 1.06
2000	95	95/90 = 1.06

DESARROLLO

A partir del crecimiento porcentual de los de los ingresos de cada año respecto al anterior , calculamos la media geométrica de la serie y obtenemos un crecimiento medio anual del 7.74% ((1.0774 -1)(100)) para los 6 años

$$G = \sqrt[5]{(1.12)(1.03)(1.09)(1.06)(1.06)} = 1.0716$$

$$\bar{X} = \frac{1.12 + 1.03 + 1.09 + 1.06 + 1.06}{5} = \frac{5.36}{5} = 1.072$$

Si utilizáramos la media aritmética obtendríamos un incremento promedio del 7.2%

Si aplicamos el incremento medio del 7.16% y del 7.2% a la serie que empieza con 68 observamos que el valor obtenido con la media geométrica es mucho mas cercano al valor real que el obtenido con la media aritmética . Por lo tanto la media geométrica es mucho mas representativa ya que representa el cambio medio a lo largo del tiempo.

Como la tasa de crecimiento de Metalconsulting (7.2%) es inferior a la tasa media del sector (12 %) es necesario emprender una nueva campaña de publicidad con mira incrementar los ingresos.

TABLA 5. 7

$$68.0000 \times 1.0716 = 72.8688$$

$$72.8688 \times 1.0716 = 78.0862$$

$$78.0862 \times 1.0716 = 83.6771$$

$$83.6771 \times 1.0716 = 89.6684$$

$$89.6684 \times 1.0716 = 96.08872$$

$$68.0000 \times 1.072 = 72.8960$$

$$72.8960 \times 1.072 = 83.7709$$

$$83.7709 \times 1.072 = 89.8024$$

$$89.8024 \times 1.072 = 96.2682$$

$$96.2682 \times 1.072 = 103.199$$

Cabe anotar que la media geométrica siempre será menor que la media aritmética , exceptuándose los casos pocos frecuentes de que todos los incrementos porcentuales sean iguales.

5.10 MEDIA ARMONICA H

La media armónica H de un conjunto de números $X_1, X_2, X_3, \dots, X_N$ es el reciproco de la media aritmética de los recíprocos de esos números . Se calcula así:

$$H = \frac{1}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{X_i}} = \frac{N}{\sum \frac{1}{X}}$$

EJEMPLO 12

Calcular la media armónica de 2, 4 y 8 ?

DESARROLLO

$$H = \frac{3}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = 3.43$$

EJEMPLO 13

El ingeniero Rene Fernando viaja de Cali a Buenaventura a 60 Km/hr y regresa de Buenaventura a Cali a 80 Km/hr . Hallar la velocidad media del viaje completo. Tómese S como la distancia entre Cali y B/tura

DESARROLLO

Utilizando la formula básica de velocidad aprendida en física , calculamos la velocidad media del viaje redondo y encontramos que es igual a 68.57 Km/hr, que es a su vez es la media armónica de 60 y 80 Km/hr .

Téngase en cuenta que la velocidad media no se puede calcular como la media aritmética de 60 y 80 ya que daría 70 Km/hr , lo cual es incorrecto.

$$TIEMPO = \frac{DISTANCIA}{VELOCIDAD}$$

$$T_{CALI-B/TURA} = \frac{S}{60}$$

$$T_{B/TURA-CALI} = \frac{S}{80}$$

$$\overline{VELOCIDAD} = \bar{V} = \frac{DISTANCIA_{TOTAL}}{TIEMPO_{TOTAL}} = \frac{S + S}{\frac{S}{60} + \frac{S}{80}} = 68.57 KM / HR$$

$$H = \frac{2}{\frac{1}{60} + \frac{1}{80}} = 68.57 KM / HR$$

$$\therefore \bar{V} = H$$

5.11 MEDIDAS DE POSICIONAMIENTO

Si un conjunto de datos esta ordenado por magnitud el valor central o la media de los dos valores centrales que divide al conjunto en dos partes iguales es la mediana. Extendiendo este concepto , podemos pensar en aquellos valores que dividen al conjuntos en 4 partes iguales ; estos valores denotados por Q Cuartiles y se llaman primer cuartil para Q1, segundo cuartil para Q2 y tercer cuartil para Q3.

Similarmente , los valores que dividen los datos en 10 partes iguales se denominan Deciles y se denotan por D1,D2,D3 hasta D9. Igualmente los valores que dividen al conjunto en 100 partes iguales, se denominan Percentiles y se denotan P1, P2, P3 hasta P99.

Cabe anotar que Q2 = D5 = P50 = MEDIANA .

Todo conjunto de datos tiene tres cuartiles que lo dividen en cuatro partes iguales , como puede verse en la grafica 3.1

Si se considera que fila es un conjunto de datos dispuestos en serie ordenada, se pueden identificar tres cuartiles que dan lugar a cuatro subconjuntos de igual tamaño en el conjunto de datos.

Subconjunto1	Subconjunto2	Subconjunto3	Subconjunto4
0%	25%	50%	75% 100%
	Q1	Q2	Q3

El primer cuartil es el valor por debajo del cual se sitúa a lo sumo el 25% de los datos y por encima del cual se encuentra el 75% restante. El segundo cuartil esta exactamente en el centro, por lo tanto la mitad de los datos están por debajo de este valor y la otra mitad por encima. El tercer cuartil es el valor por debajo del cual se encuentran como máximo el 75% de los datos y por encima del cual se halla el 25 %.

La determinación de los cuartiles demuestra su utilidad con mucha frecuencia. Por ejemplo la mayoría de las universidades solo reciben a los estudiantes cuyas pruebas de estado (ICFES) los ubique en el tercer cuartil, es decir, que estén ubicados en el 25% superior de los aspirantes. También es muy frecuente encontrar que los directivos universitarios se muestran muy interesados en encontrar las causas que crean problemas entre los estudiantes universitarios cuyo desempeño esta ubicado en el primer cuartil, es decir, en el 25% inferior de toda la comunidad universitaria.

Cabe anotar que las grandes multinacionales solo están interesadas en contratar profesionales que estén ubicado en el 10% superior de todos los aspirantes, es decir, que ubicado en decil nueve o su equivalente el percentil 90.

Para calcular los cuartiles, deciles y percentiles se debe tener en cuenta si los datos están sin agrupar o están agrupados. Para datos sin agrupar primero localizamos la ubicación y por ultimo hallamos el valor correspondiente a esa ubicación.

$$L_Q = (N + 1) \left(\frac{Q}{4} \right)$$

$$L_D = (N + 1) \left(\frac{D}{10} \right)$$

$$L_P = (N + 1) \left(\frac{P}{100} \right)$$

Donde:

LQ es la ubicación del cuartil deseado Q

LD es la ubicación del decil deseado D

LP es la ubicación del percentil deseado P

N es el numero de datos

Para datos agrupados utilizamos las siguiente formulas

$$L_Q = \left(\frac{N}{4} \right) Q$$

$$L_D = \left(\frac{N}{10} \right) D$$

$$L_P = \left(\frac{N}{100} \right) P$$

Donde:

L_Q es la ubicación del cuartil deseado Q

L_D es la ubicación del decil deseado D

L_P es la ubicación del percentil deseado P

N es el numero de datos

$$Q = FCI_Q + \left(\frac{\left(\frac{N}{4} \right) Q_D - \sum F_{ACQ}}{F_Q} \right) C$$

$$D = FCI_D + \left(\frac{\left(\frac{N}{10} \right) D_D - \sum F_{ACD}}{F_D} \right) C$$

$$P = FCI_P + \left(\frac{\left(\frac{N}{100} \right) P_P - \sum F_{ACP}}{F_P} \right) C$$

Donde:

FCI_Q = Frontera de clase inferior de la clase donde se localiza el cuartil deseado

C = Anchura del intervalo de la clase donde se localiza el cuartil deseado

$\sum F_{ACQ}$ = Frecuencia acumulada que precede a la clase donde se ubica el cuartil deseado

F_Q = Frecuencia de la clase donde se encuentra el cuartil deseado

N = Frecuencia total

Q_D = Numero del cuartil deseado (1, 2 o 3)

Q = Cuartil deseado

FCI_D = Frontera de clase inferior de la clase donde se localiza el decil deseado

C = Anchura del intervalo de la clase donde se localiza el decil deseado

F_{ACD} = Frecuencia acumulada que precede a la clase donde se ubica el decil deseado

F_D	= Frecuencia de la clase donde se encuentra el decil deseado
N	= Frecuencia total
D_D	= Numero del decil deseado (1, 2 , 3.....9)
D	= Decil deseado
FCI_P	= Frontera de clase inferior de la clase donde se localiza el percentil deseado
C	= Anchura del intervalo de la clase donde se localiza el percentil deseado
F_{ACP}	= Frecuencia acumulada que precede a la clase donde se ubica el percentil deseado
F_P	= Frecuencia de la clase donde se encuentra el decil deseado
P_D	= Numero del percentil deseado (1, 2 , 3.....99)
P	= Decil deseado

EJEMPLO 14

Calcular para los datos sin agrupar de las pruebas de resistencias para la aleación de aluminio – litio del cuadro adjunto 5.6

- Los cuartiles Q1, Q2 y Q3.
- Los deciles 4, 6 y 9
- Los percentiles 30, y 95
- La media , la median y la moda

TABLA 5. 8
RESISTENCIA A LA TRACCIÓN
ALEACIÓN DE ALUMINIO LITIO

70	123	145	154	163	172	183	200
88	131	146	156	163	174	184	201
97	133	148	157	165	174	186	207
101	133	149	158	167	175	186	208
105	134	149	158	167	176	190	218
110	135	150	158	168	178	193	221
115	135	150	158	169	180	194	228
118	141	151	160	170	180	196	229
120	142	153	160	171	181	199	245
121	143	154	160	171	181	199	250

1. Como se puede observar la posición del primer cuartil es 20.25, lo que nos indica que Q1 esta situado en el 25% de camino entre el dato 20 (143) y el dato 21 (145) es decir que Q1 es igual al valor de la posición 20 mas el 25% de la diferencia entre el valor de la posición 21 y la posición 20, por lo tanto el primer cuartil tiene un valor de 143.5.

Todos los cuartiles ,deciles o percentiles se pueden calcular así o por medio de las formulas dadas.

$$L_{Q1} = (80 + 1) \left(\frac{1}{4} \right) = 20.25$$

$$Q_1 = 143 + 0.25(145 - 143) = 143.5$$

$$L_{Q2} = (80 + 1) \left(\frac{2}{4} \right) = 40.5$$

$$Q_2 = 160 + 0.5(163 - 160) = 161.5$$

$$L_{Q3} = (80 + 1) \left(\frac{3}{4} \right) = 60.75$$

$$Q_3 = 181 + 0.75(183 - 181) = 182.5$$

$$L_{D6} = (80 + 1) \left(\frac{6}{10} \right) = 48.6$$

$$D_6 = 170 + 0.6(171 - 170) = 170.6$$

$$L_{D9} = (80 + 1) \left(\frac{9}{10} \right) = 72.9$$

$$D_9 = 201 + 0.9(207 - 201) = 206.4$$

$$L_{P30} = (80 + 1) \left(\frac{30}{100} \right) = 24.3$$

$$P_{30} = 149 + 0.3(149 - 149) = 149$$

$$L_{P95} = (80 + 1) \left(\frac{95}{100} \right) = 76.95$$

$$P_{95} = 221 + 0.95(228 - 221) = 227.65$$

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N} = \frac{13031}{80} = 162.89$$

$$MEDIANA = Q_2 = 161.5$$

$$MODA = 158$$

Obsérvese que la moda corresponde al valor que mas se repite.

EJEMPLO 15

Calcular utilizando los datos del cuadro 5.4 para la aleación de aluminio – litio . los cuartiles, el decil 4 y el percentil 30.

TABLA 5. 4
DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS
RESISTENCIA A LA TRACCIÓN DE 80 MUESTRAS
DE UNA ALEACIÓN ALUMINIO LITIO EN PSI

Resistencia	Numero de	Frecuencia acumulada
-------------	-----------	----------------------

	muestras	
PSI lbs/pul ²	F	FAC
70 – 90	2	2
90 – 110	3	5
110 – 130	6	11
130 – 150	14	25 Q1
150 – 170	22	47 Q2
170 – 190	17	64 Q3
190 – 210	10	74
210 – 230	4	78
230 – 250	2	80

DESARROLLO

Cabe anotar que los valores calculados a partir de datos agrupados, dados que estos son aproximaciones y están sometidos al redondeo, pueden variar ligeramente de los obtenidos a partir de datos no agrupados.

Primero ubicamos la posición del primer cuartil y observamos que corresponde a la frecuencia acumulada de 20 y que se ubica en el cuarto intervalo de clase (130 – 150), luego aplicamos la formula correspondiente.

De manera similar se calculan los demás cuartiles. deciles y percentiles.

$$L_{Q_1} = \left(\frac{80}{4} \right) (1) = 20$$

$$Q_1 = 130 + \left(\frac{\left(\frac{80}{4} \right) (1) - 11}{14} \right) (20) = 142.85$$

$$L_{Q_2} = \left(\frac{80}{4} \right) (2) = 40$$

$$Q_2 = 150 + \left(\frac{\left(\frac{80}{4} \right) (2) - 25}{22} \right) (20) = 163.6$$

$$L_{Q3} = \left(\frac{80}{4} \right) (3) = 60$$

$$Q_3 = 170 + \left(\frac{\left(\frac{80}{4} \right) (3) - 47}{17} \right) (20) = 185.3$$

$$L_{D4} = \left(\frac{80}{10} \right) (4) = 32$$

$$D_4 = 150 + \left(\frac{\left(\frac{80}{10} \right) (4) - 25}{22} \right) (20) = 156.4$$

$$L_{P30} = \left(\frac{80}{100} \right) (30) = 24$$

$$P_{30} = 100 + \left(\frac{\left(\frac{80}{100} \right) (30) - 11}{14} \right) (20) = 148.6$$

EJEMPLO 16

Resolver los dos últimos ejemplos utilizando los programas estadísticos Excel y SPSS10. Use los tutoriales que vienen en cada programa.

DESARROLLO

TABLA 5. 9

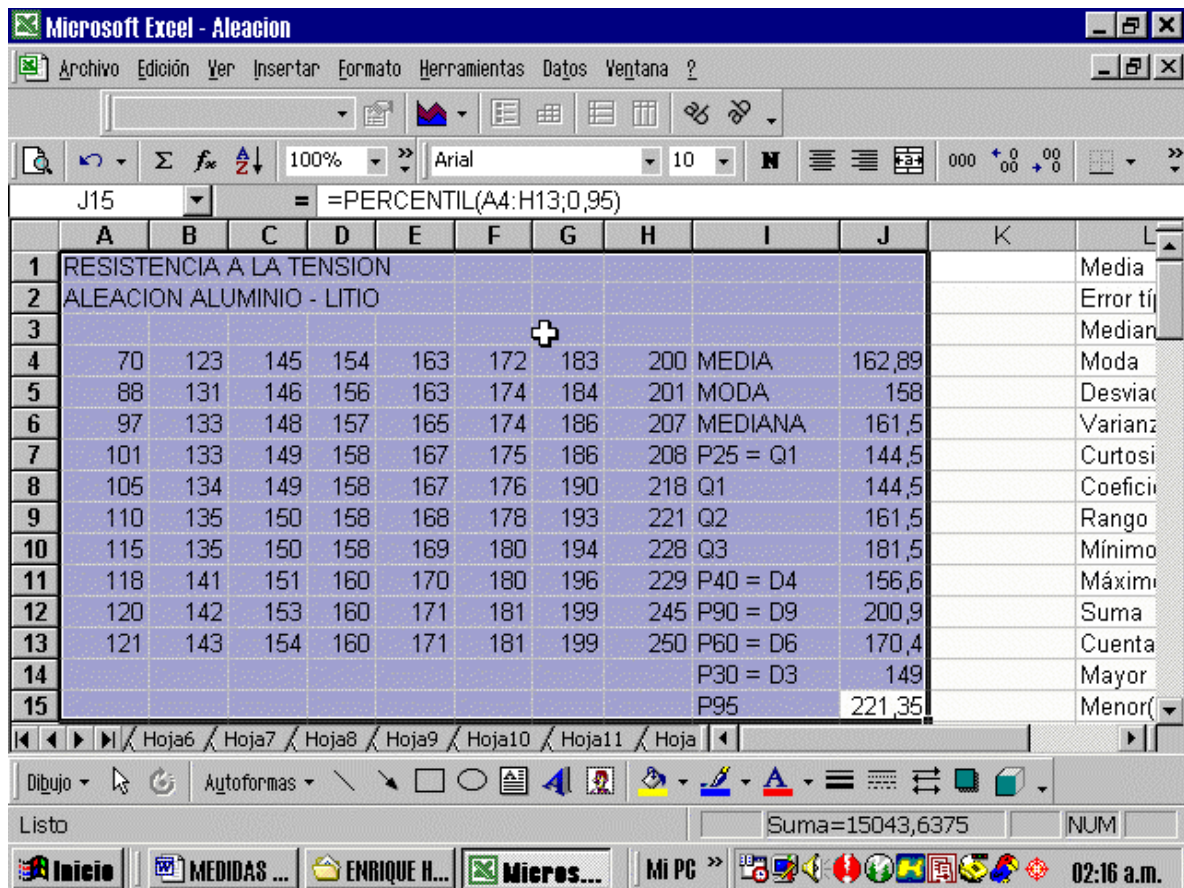
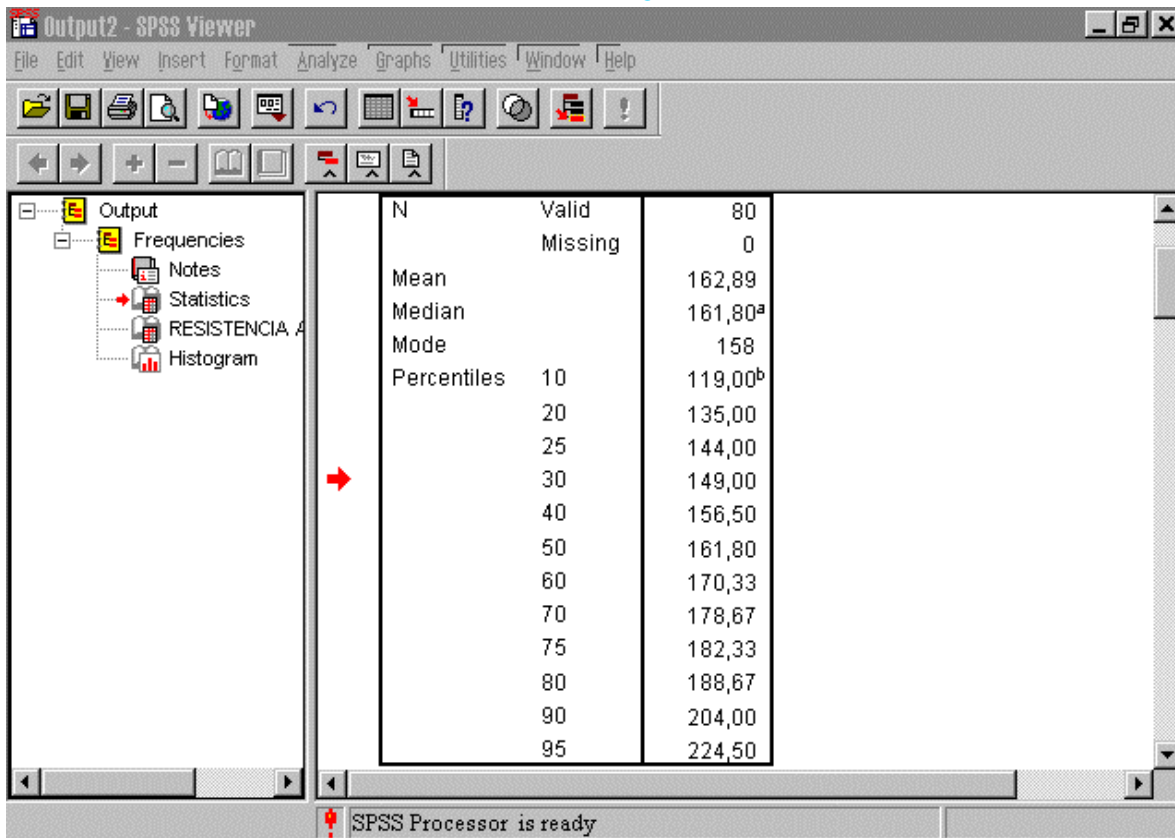


TABLA 5. 10

Statistics		
PSI		
N	Valid	80
	Missing	0
Mean		162,8875
Std. Error of Mean		3,8463
Median		161,5000
Mode		158,00
Std. Deviation		34,4027
Variance		1183,5441
Range		180,00
Minimum		70,00
Maximum		250,00
Sum		13031,00
Percentiles	10	118,2000
	20	135,0000
	25	143,5000
	30	149,0000
	40	156,4000
	45	158,0000

50	161,5000
60	170,6000
65	174,0000
70	179,4000
75	182,5000
80	189,2000
90	206,4000

TABLA 5. 11



TALLER 5**

- Supóngase que se desea hacer un estudio del comportamiento de las ventas en la fabrica de bombillos “ El Iluminado Santiago”. Para dicho estudio se selecciono una muestra aleatoria entre las ventas de los últimos 6 meses, correspondiente a 50 días . Los valores en millones de pesos se muestran en la tabla adjunta. A partir de los datos redondeados construir y/o calcular lo siguiente:

TABLA 5. 12
VENTAS DIARIAS

6.8	9.1	16.9	18.7	15.4
22.5	17.4	12.4	20.3	18.6
16.3	9.6	27.8	15.5	22.9
12.6	14.5	21.5	29.3	19.3

18.7	4.9	8.9	14.3	24.4
34.5	18.7	36.7	21.3	11.5
10.8	30.4	5.3	11.9	21.7
26.7	9.4	23.2	7.5	23.3
8.6	14.7	19.8	22.3	31.7
13.9	17.5	25.7	13.6	5.8

- k) Una tabla de frecuencia
 - l) Un histograma y su respectivo polígono en valores absolutos
 - m) Un histograma y su respectivo polígono en valores relativos
 - n) Una ojiva menor que y otra mayor que en valores absolutos
 - o) Calcular el % de días con ventas diarias superiores a 20 millones de pesos ?
 - p) Calcular el numero de días con ventas inferiores a 20 millones de pesos ?
 - q) Calcular el numero de días con ventas entre 8.5 y 23.5 millones de pesos ?
 - r) Calcular el % de días con ventas entre 8.5 y 23.5 millones de pesos ?
 - s) Para que % de días, el valor de las ventas fueron inferiores a \$18 millones de pesos ?
 - t) Para que numero de días el valor de las ventas fueron inferiores a 28.5 millones de pesos ?
3. La vida útil en almacenamiento de una película fotográfica de alta velocidad esta siendo investigada por un grupo interdisciplinario en una empresa . Se disponen de los siguientes datos que se muestran en la tabla adjunta.

TABLA 5. 13
VIDA UTIL DE PELÍCULA FOTOGRAFICA EN DIAS

110	165	128	137	127
125	160	140	121	141
115	151	125	127	148
114	142	124	128	150
150	121	122	134	133
126	120	135	140	122
127	126	125	122	125
130	128	142	127	135
155	135	145	124	141
165	145	128	125	150

- a) Construya una tabla de frecuencia con 7 intervalos
 - b) Construya un histograma en valores absolutos y su respectivo polígono
 - c) Construya un histograma en valores relativos y su respectivo polígono
 - d) Construyas las ojivas en valores absolutos
 - e) Construya las ojivas en valores relativos
 - f) Calcule la media, la moda y la mediana
 - g) Calcule los cuartiles y los deciles
 - h) Saque conclusiones de los resultados.
4. El porcentaje de algodón en una tela utilizada para elaborar camisas para hombre se muestran en la tabla adjunta.

TABLA 5. 14
CONTENIDO DE ALGODÓN EN PORCENTAJE

33.3	34.2	33.8	34.8	32.8	32.6	35.8	33.1	34.6	34.5
35.4	33.1	34.5	33.6	33.5	33.1	35.9	34.7	33.6	33.5
35.3	34.5	36.2	32.5	34.2	34.6	37.6	34.3	35.4	34.7
36.5	35.6	34.7	34.5	35.7	35.4	37.3	34.4	36.1	35.6
37.8	34.3	34.6	35.1	34.7	35.9	34.6	34.5	33.5	34.4
35.4	35.1	35.3	36.8	35.3	34.7	35.4	35.2	31.2	35.2
33.7	34.7	35.4	37.9	36.4	33.6	35.4	35.1	33.8	34.7
33.6	33.6	34.6	39.5	34.6	32.9	37.8	34.6	37.9	34.6
33.7	35.4	34.9	38.2	35.9	33.5	32.1	32.9	35.4	35.4
32.5	33.6	35.0	36.4	35.6	31.6	31.2	32.0	33.3	36.6

- Construya una tabla de frecuencia
 - Construya un histograma y su respectivo polígono
 - Construya las ojivas mayores y menores que
 - Calcule las medidas de tendencia central mas adecuadas
 - Calcule los cuartiles y los percentiles 45 y 90
 - Saque conclusiones.
5. Los datos que se muestran en la siguiente tabla muestran el rendimiento % de la refinación de 100 cargas o lotes de chatarra de cobre por el proceso de piro refinación metalúrgica.

TABLA 5. 15
RENDIMIENTO DEL PROCESO DE PIROREFINACION (%)

95.1	96.4	98.6	97.5	96.8	99.6	91.2	93.4	89.7	90.1
99.1	96.7	92.4	95.4	96.7	90.2	93.4	92.2	89.3	92.1
85.6	82.6	84.0	95.3	85.3	92.5	98.7	90.3	90.0	91.5
92.1	90.5	91.2	92.5	91.2	90.1	96.4	96.2	95.0	81.5
96.2	89.3	95.3	87.2	93.4	92.1	96.7	92.3	96.2	85.2
92.3	95.2	95.4	88.1	98.7	91.5	82.6	96.5	94.2	84.3
96.5	88.5	95.5	89.2	93.4	98.5	90.5	86.5	98.0	95.5
86.3	84.3	95.0	88.8	92.2	99.0	89.3	85.3	88.5	95.6
81.3	87.6	85.2	90.5	90.3	89.2	95.2	82.6	89.1	92.0
82.6	90.2	87.3	95.0	95.2	85.4	87.5	88.9	90.0	95.1

- Construya una tabla de frecuencia con 10 intervalos
- Construya un histograma y su respectivo polígono
- Construya las ojivas mayor y menor que
- Calcule la media , la mediana y la moda
- Calcule los cuartiles analíticamente y compare los resultados con los obtenidos a partir de las ojivas
- Que porcentaje de cargas tienen rendimiento por encima del 95%

- g) Cuántas cargas están ubicadas por debajo del primer cuartil
h) Saque conclusiones.
6. La siguiente tabla muestra los datos sobre el octanaje de varias mezclas de gasolina.

TABLA 5. 16

OCTANAJE EN MEZCLAS DE GASOLINA

88.5	87.8	83.4	86.7	91.5	88.8	96.5	100.3	96.5	92.6
94.7	91.2	91.2	94.3	89.9	88.6	95.5	87.8	84.3	89.4
84.3	86.7	88.5	90.8	90.1	87.5	96.2	95.7	93.2	89.5
90.1	93.4	88.3	90.1	98.8	94.5	84.3	89.7	88.8	92.1
89.0	96.1	93.4	91.5	88.8	92.1	85.6	85.4	88.7	92.0
89.9	89.5	87.5	88.9	85.4	90.1	86.7	96.0	92.7	87.5
91.6	90.4	91.1	92.4	91.2	89.4	90.2	95.1	89.5	88.5
90.4	91.7	90.5	93.7	90.7	95.4	92.7	98.2	96.1	95.5
90.2	90.6	91.2	94.2	92.2	92.3	91.0	94.0	92.4	92.0

- a) Construir una tabla de frecuencia con 9 intervalos
b) Construir un histograma y su respectivo polígono
c) Construir un juego de ojivas
d) Calcular la media, la mediana y la moda
e) Calcular los percentiles 20, 45, 65, 85 y 95
f) Cuántas mezclas de gasolina están ubicadas en el 25% superior
g) Que porcentaje de mezclas de gasolina están en el 25% inferior
h) Sacar conclusiones
7. Laboratorios Sweet Dreams , interesado en acabar con el insomnio en los pacientes que sufren de este tremendo flagelo, esta investigando los efectos que surte su nuevo producto “ just dream flying”. Como parte del estudio se trataron 60 pacientes y se midió el tiempo que tardaba de comenzar a actuar dicho fármaco. Los resultados en minutos se muestran en la siguiente tabla en valores brutos.

TABLA 5. 17

**TIEMPO DE REACCION DEL FÁRMACO
JUST DREAM FYING**

23.4	21.4	13.5	18.8	11.8
25.2	8.5	16.7	18.5	26.7
21.6	26.4	25.3	24.4	21.8
28.8	21.8	14.8	18.4	26.3
9.2	26.6	14.6	31.3	8.5
21.5	11.9	30.5	21.4	21.3
19.0	22.8	16.4	28.5	21.5
22.6	16.6	16.7	23.8	13.5
22.9	29.8	26.4	9.4	20.3
20.2	26.9	19.9	27.3	22.8

13.5	23.4	28.5	18.2	22.7
21.5	23.4	17.3	15.3	18.8

- a) A partir de los datos redondeados , aplicando el criterio de la cifra par , construya una tabla de frecuencia con 8 intervalos
 - b) Construya un histograma en valores y su respectivo polígono
 - c) Construya un juego de ojivas
 - d) Calcule el numero de paciente cuyo tiempo de reacción fue inferior a 23 minutos
 - e) Calcule el numero de paciente cuyo tiempo de reacción fue superior a 15 minutos
 - f) Calcule el porcentaje de paciente cuyo tiempo de reacción fue entre 11 y 23 minutos
 - g) Calcule el tiempo promedio de reacción
 - h) Calcule el tiempo de reacción de la mediana y el modal
 - i) Calcule el primer y tercer cuartil e interprete su resultado.
8. El salario promedio anual de una empresa de inversiones es de \$ 792.500. Los salarios promedios de los hombres y de las mujeres fueron de \$ 950.000 y \$ 500.000 respectivamente. Hallar los porcentajes de hombres y de mujeres empleados en la empresa ?
 9. Si la edad promedio de los 6 integrantes de mi grupo familiar es 30. Cual será dentro de X años ?
 10. Las ventas de un almacén se incrementaron en los últimos 5 años en los siguientes porcentajes: 25%, 20%, 18%, 23% y 17%, Calcule:
 - a) El porcentaje de incremento con base al primer año ?
 - b) El promedio geométrico del incremento anual ?
 11. Los Salarios aumentaron en los últimos 4 años de la década pasada en Ecuador en 28%,23%,27%, y 25% ; calcule:
 - a) la tasa de crecimiento total en los 4 años ? R/ 150%
 - b) La media anual de crecimiento ? R/ 25.75%
 - c) La media geométrica anual de crecimiento ? R/ 25.75%
 12. La pérdida del poder adquisitivo de la moneda de un país en los últimos 5 años fue del 20%, 15%, 25%, 30% y 27%; Calcule:
 - a) El porcentaje de pérdida del valor del ultimo año respecto al primer año ?
 - b) El promedio geométrico de la pérdida anual ?
 13. En una industria se ha controlado el tiempo que tardan 3 obreros en ensamblar un motor . Uno demora 6 horas, otro 8 horas y un tercero demora 5 horas. Encuentre el rendimiento de un obrero cuyo trabajo sea representativo de los rendimientos de los dos obreros (obrero tipo) que sirva de base para análisis financiero ?R/ 6.1 horas
 14. En una empresa de transporte se estudió el tiempo empleados por los buses en el recorrido de cierta ruta y se encontraron los siguientes tiempos para los 5 buses asignados: 7.3 horas, 6.8 horas, 7.4 horas, 6.4 horas y 7.6 horas. Encuentre el tiempo que debe asignarse a un bus tipo para estudios económicos ? R/ 7.07 horas
 15. Un contratista recibe dos oferta para pintar un edificio: una cuadrilla de obreros ofrece pintar el edificio en 28 días , la otra se compromete a hacerlo en 35 días. El contratista decide entregar el trabajo a las dos cuadrillas para que trabajen simultáneamente. Halle el tiempo que emplearán en pintar el edificio ?

16. Halle el valor promedio para un kilogramo de mercancía adquirida en 3 lotes así : 500 kilogramos a \$ 25.40 cada uno, 300 kilogramos a \$ 29.5 por kilogramo y 700 kilogramos a \$ 23.60 cada uno ?
17. El salario promedio mensual de 90 trabajadores de una fabrica fue de \$ 450.000. Hallar el monto de la nomina mensual ?
18. Cuanto debe sacar Enrique Jr en el examen final de estadística para ganar la materia , si esta se gana con 3.5 y las notas que obtuvo fueron 4.5 en el primer parcial , 3.1 en el segundo parcial . las ponderaciones de los exámenes son 30, 30 y 40% para el primero, segundo y examen final respectivamente ?
19. Tres profesores de estadística dieron notas promedios en sus cursos con 40, 30 y 25 estudiantes de 3.5, 3.8 y 4.2 respectivamente . Cual fue la calificación media de los 3 cursos ?
20. De 500 estudiantes universitarios cuya estatura media es de 1.65 metros , 150 son mujeres. Si la estatura media de las mujeres es igual al 95% de la estatura de los hombres. Cual es la estatura media de los hombres ?
21. En un curso hay 30 hombres con una edad media de 18 años y 20 mujeres , las que en promedio son 20% mas jóvenes . Cual es la edad media del curso ?
22. Si la media aritmética de dos números es 5 y la media geométrica de los mismos es 4. Cual es la media armónica ? R/ 3.2
23. Rene viaja en auto de la ciudad A hasta la ciudad B con una velocidad media de 40 km/h y vuelve de la ciudad B hasta la A con una velocidad media de 60 km/h. Hallar la velocidad media del viaje completo ? R/ 48 km/h
24. Un avión vuela una distancia de 900 kilómetros . Si cubre el primer y el ultimo tercio del viaje a 250 km/h y el tercio del medio a 300 km/h. Calcular la velocidad media ? R/ 264.7 km/h
25. El precio medio de un centenar de artículos es de \$ 85.70; los artículos se dividen en dos grupos con medias de \$ 75.80 y \$ 97.80. Cuantos artículos hay encada grupo ? R/ 45 y 55
26. En un examen realizado a tres cursos de estadística con un total de 100 alumnos, el puntaje medio general fue de 70. Los puntajes medios de los grupos A y B fueron de 71 y 65 respectivamente. Se perdieron los archivos con las notas del curso C, pero los monitores recuerdan que los curso A y B tenían el mismo numero de estudiantes, mientras el curso C tenía 5 estudiantes menos que el curso A. Cual es el promedio de las notas del curso C ?
27. Hallar dos números cuya media aritmética es 9 y cuya media geométrica es 7.2 ?
28. Una suma P de dinero se invierte a un cierto interés . Después de 15 años el dinero se ha triplicado . Cual será el saldo al final de los 20 años si el interés se capitaliza:
 - a) Semestralmente ? R/ 4.326 P
 - b) mensualmente,
 - c) trimestralmente
29. Una empresa de transportes tiene 3 automotores diferentes que emplean en el recorrido entre dos pueblos 16, 15 y 12 horas, respectivamente . Encuentre el tiempo que emplearía un automotor tipo que sirva de base para un estudio de costos ? R/ 14.12 horas
30. La población de un de Colombia creció en los últimos 5 años de 35 millones a 40. millones; calcule:
 - a) La tasa de crecimiento total en los 5 años
 - b) La tasa de crecimiento anual

31. El gerente de Mercadeo de una distribuidora de café, tiene un grupo de 50 vendedores; cada año los vendedores reportan el precio promedio del kilogramo de café dentro de su respectivas zonas . Con esta información el gerente elabora la siguiente tabla adjunta.

TABLA 5. 18
PRECIO DEL KILOGRAMO DE CAFÉ

PRECIO \$	NUMERO DE VENDEDORES
1000 - 1050	2
1050 - 1100	6
1100 - 1150	9
1150 - 1200	13
1200 - 1250	10
1250 - 1300	5
1300 - 1350	3
1350 - 1400	2

- Elaborar un histograma en valores relativos y su polígono
 - Construir las ojivas en valores absolutos
 - Calcular los precios promedio, modal y mediano
 - Calcular todos los deciles e interpretarlos
32. La siguiente tabla adjunta muestra la distribución de cargas máximas en toneladas que soportan los cables producidos por cierta fabrica:

TABLA 5. 19
CARGA MAXIMA

Carga máxima En toneladas	Numero de Cables
9.3 - 9.7	2
9.8 - 10.2	5
10.3 - 10.7	12
10.8 - 11.2	17
11.3 - 11.7	14
11.8 - 12.2	6
12.3 - 12.7	3
12.8 - 13.2	1

- Construir un histograma en valores relativos y su polígono
 - Construir las ojivas en valores absolutos
 - Determinar las cargas máxima media, modal y mediana
 - Los cuartiles e interpretar su resultado
33. La tabla adjunta recoge los ingresos anuales en dólares, de los agentes de bolsa de una empresa de Corredores.

TABLA 5. 20
INGRESOS DE LOS CORREDORES EN 1999

INGRESOS \$ US	NUMERO DE CORREDORES
40.000 - 70.000	5
70.000 - 90.000	12
90.000 - 110.000	10
110.000 - 130.000	15
130.000 - 150.000	24
150.000 - 170.000	11
170.000 - 190.000	9
190.000 - 210.000	6
210.000 - 230.000	3

- a) Calcular los ingresos medios , medianos y modales
 - b) Calcular los percentiles 10 y 90, explicar su significado
 - c) Calcular el numero de corredores con ingresos entre 115.000 y 215.000
 - d) Calcular el porcentaje de corredores con ingresos superiores al 75%
34. El Gerente general de una de una microempresa de electrónica, presentó recientemente un componente revolucionario de un relé eléctrico que espera tendrá una creciente aceptación . Ahora enfrenta al problema de decidir como medir el crecimiento medio de sus ventas a lo largo de los últimos años . Usted como asesor que le sugeriría ?
 35. Como propietario de una agencia de publicidad, Mister Hurt gana 60 millones de pesos anuales. Sus ocho 6 empleados mas recientes ganan 16, 25, 23, 28, 30 y 29. Que medida de tendencia central piensa usted que es la mejor indicación del promedio de los 7 sueldos ?
 36. A partir de una muestra aleatoria de la edad de 50 estudiantes de la facultad:
 - a) Elaborar una tabla de frecuencia
 - b) Construir un histograma en valores absolutos y su respectivo polígono
 - c) Construir un histograma en valores relativos y su respectivo polígono
 - d) Construir las ojivas en valores relativos
 - e) Construir las ojivas en valores absolutos
 - f) Calcular los cuartiles e interpretarlos
 - g) Calcular los deciles e interpretarlos
 - h) Sacar Conclusiones

** SUGERENCIA: Trate Inicialmente de resolver los ejercicios manualmente y chequee los resultados de la mayor parte de los ejercicios utilizando cualquier software estadístico, (SSPS 11, Excel , etc)

Copyright © ;Ing. Enrique A Hurtado Minotta, all rights reserved

REVISTAS ELECTRONICAS

37. [Journal of Statistics Education](#). Excelente revista (¡gratuita!) editada por la American Statistical Association sobre educación estadística (a todos los niveles)
38. [Homepage de la American Statistical Association](#). La mayor asociación de estadísticos, editora de *Journal of Agricultural, Biological, and Environmental Statistics*, *Journal of the American Statistical Association*, *Journal of Statistics Education* y *The American Statistician* entre otras revistas.
39. [Environmental and Ecological Statistics](#)
40. [Community Ecology](#)
41. [Journal of Agricultural, Biological, and Environmental Statistics](#)
42. [Bulletin of the Ecological Society of America](#) (gratuita; contiene artículos de ecología estadística)
43. [Journal of Statistical Software](#) (gratuita)
44. [InterStat \(Statistics on the Internet\)](#) (gratuita)
45. [Probability and Statistics Journals on the Web](#)

ESTADISTICA ON LINE

217. [Aula Virtual de Bioestadística, Universidad Complutense](#)
218. [Curso de bioestadística de la Universidad de Málaga](#)
219. [Apuntes de Bioestadística. Unidad de Bioestadística Clínica del Hospital Ramón y Cajal](#)
220. [Lecciones de Estadística, 5campus.org \(análisis multivariante...\)](#)
221. [Curso de Bioestadística de la Universidad Nacional de Misiones \(Argentina\)](#)
222. [Curso de estadística \(para ingenieros\) de una universidad mexicana](#)
223. [Cursos de estadística de la Universidad de California, Los Angeles](#)
224. [Cursos de estadística de la Universidad de Michigan](#)
225. [Electronic Statistics Textbook](#)
226. [A New View of Statistics](#)
227. [HyperStat Statistics Textbook](#)
228. [Statistics at Square One](#)
229. [Statistics Every Writer Should Know](#)
230. [Introductory Statistics: Concepts, Models, and Applications](#)

231. [Multivariate Statistics: Concepts, Models, and Applications](#)
232. [A complete guide to nonlinear regression](#)
233. [Ordination Methods for Ecologists](#)
234. [Annotated Bibliography of Canonical Correspondence Analysis and related
constrained ordination methods 1986-1993](#)
235. [Multivariate Statistics: an Introduction](#)
236. [A glossary of ordination-related terms](#)
237. [Glossary of Statistical Terms and Medical Citations for Statistical Issues](#)
238. [Glossary of over 30 statistical terms](#)
239. [EVSC 503 Applied Statistics for the Environmental Sciences](#)
240. <http://s9000.furman.edu/mellonj/spss1.htm>
241. <http://www.indiana.edu/~statmath/stat/spss/win/index.html>
242. <http://www.utexas.edu/cc/stat/tutorials/spss/SPSS1/Outline1.html>
243. <http://web.uccs.edu/lbecker/SPSS/content.htm>
244. <http://core.ecu.edu/psyc/wuenschk/SPSS/SPSS-Data.htm>
245. <http://www.tulane.edu/~panda2/Analysis2/ahome.html>
246. <http://www.shef.ac.uk/~scharr/spss/index2.htm>
247. <http://calcnet.mth.cmich.edu/org/spss/index.html>
248. <http://calcnet.mth.cmich.edu/org/spss/toc.htm>
249. <http://www.public.asu.edu/~pythagor/spssworkbook.htm>
250. <http://lib.stat.cmu.edu/>
251. <http://www.stat.ufl.edu/vlib/statistics.html>
252. <http://www.statserv.com/software.html>
253. <http://www.maths.uq.edu.au/~gks/webguide/>
254. <http://www.statistics.com/>
255. <http://www.helsinki.fi/~jpuranen/links.html#stc>
256. <http://www.maths.uq.edu.au/~gks/webguide/free.html>
257. <http://nhsbig.inhs.uiuc.edu/>
258. <http://www.okstate.edu/artsci/botany/ordinate/software.htm>
259. <http://life.bio.sunysb.edu/ee/biometry/>
260. <http://life.bio.sunysb.edu/morph/software.html>
261. <http://pbil.univ-lyon1.fr/ADE-4/ADE-4.html>
262. [http://ourworld.compuserve.com/homepages/Rainer_Wuerlaender/statsoft.h
tm](http://ourworld.compuserve.com/homepages/Rainer_Wuerlaender/statsoft.htm)

263. <http://www.stat.auckland.ac.nz/~mja/Programs.htm>
264. <http://it.stlawu.edu/~rlock/maa99/>
265. <http://it.stlawu.edu/~rlock/tise98/java.html>
266. <http://www.stat.vt.edu/~sundar/java/applets/>
267. <http://www.kuleuven.ac.be/ucs/java/index.htm>
268. <http://noppa5.pc.helsinki.fi/koe/>
269. <http://www2.kenyon.edu/people/hartlaub/MellonProject/mellon.html>

Demostraciones Java para el aprendizaje de la estadística

270. [Electronic Textbook](#) (UCLA), programa *on-line* de representación y cálculo de funciones de densidad y de distribución (normal, F , ji-cuadrado, números aleatorios...). Equivalente a un libro de tablas

BIBLIOGRAFÍA

85. Montgomery Douglas y Runger George.(1996), Probabilidad y Estadística aplicada a la Ingeniería., McGraw-Hill, Mexico
86. Montgomery Douglas y Hines William.(1995), Probabilidad y Estadística aplicada a la Ingeniería. y Administración, segunda edición ,CECSA, México
87. Mendenhall William, Wackerly Dennis y Scheaffer Richard (1994), Estadística Matemáticas con Aplicaciones , segunda edición, Grupo Editorial Iberoamerica. M, México
88. Govinden Portus Lincoyan.(1998), Introducción a la Estadística., McGraw-Hill, Santafé de Bogotá
89. Webster Allen L.(1998), Estadística aplicada a la Empresa y a la Economía, segunda edición, McGraw-Hill, Madrid
90. Kohler Heinz.(1996), Estadística para Negocios y Economía, primera edición ,CECSA, México
91. Martinez Bencardino Ciro (1995), Estadística , sexta edición ,ECOE EDICIONES Santafé de Bogotá.
92. Alvarez C Ricardo (1994), Estadística Fundamental Aplicada, primera edición ,PUBLIADCO, Cali
93. Estadística," Enciclopedia Microsoft® Encarta® 2000. © 1993-1999 Microsoft Corporation.
94. Stockburger David W (1996) Introductory Statistics: Concepts, models an applications, , <http://www.psychstat.smsu.edu/sbk00.htm>
95. Mendoza Duran Carlos. (1995)Probabilidad y Estadística, <http://w3.mor.itesm.mx/~cmendoza/ma835/ma83500.html>
96. Valdés Fernando ,Comprensión y uso de la estadística, <http://www.cortland.edu/flteach/stats/glos-sp.html>
97. Hurtado Minotta Enrique A, Reflexiones para el Currículo, <http://www.geocities.com/soho/atrium/7521/tesis.html>
98. Academic Freedom , www.hrw.org/wr2k/issues-01.htm
99. Gonzalez Felipe, Africa : El silencio de los tambores, www.arrakis.es/~trazeg/gonzalez.html.

100. El año 2000, WWW.arrakis.es/~ trazeg/anno2000.html
101. Mendenhall, W.; D.D. Wackerly y R.L. Scheaffer. *Estadística Matemática con Aplicaciones*. Grupo Editorial Iberoamérica. México.
102. Freund, John E. y Gary A. Simon. *Estadística elemental*. Prentice-Hall Hispanoamericana, SA. México, 1994. (8ª edición.)
103. Spiegel, M.R. *Estadística*. McGraw-Hill. México. (Serie Schaum.)
104. <http://www.unl.edu.ar/fave/sei/encuestas/index.html>.
105. Wonnacott, Thomas H. y Ronald J. Wonnacott (1998) *Introducción a la estadística*. Limusa/IPN. México.

MODULO VI.

MEDIDAS DE DISPERSIÓN

En el análisis estadístico es de primera importancia , no solamente el calculo y la interpretación de las medidas de tendencias central y/o la de posicionamiento , sino que es fundamental tener en cuenta que tan dispersos están los datos.

Cuando pretendemos representar toda una información con la media aritmética , la moda o la mediana, generalmente no estamos siendo absolutamente fieles a la realidad , ya que suelen existir valores por debajo y por arriba que no están bien representado por estas medidas.

Cuando tenemos informaciones con la misma media , no significa que las distribuciones son iguales , por lo tanto debemos analizar el grado de homogeneidad entre sus datos. Por ejemplo , los valores 50, 500 y 950 tienen igual media y mediana que los valores 490, 500 y 510, pero para la primera información la media se encuentra muy alejada de los valores extremos 50 y 950, cosa que no ocurre con la segunda información que tiene igual media y mediana , por lo tanto es mas dispersa o heterogénea que la segunda.

Las principales medidas de dispersión son el rango, la desviación media, la desviación típica o estándar, la varianza , rango intercuartílico , el rango semi-intercuartílico, el rango percentil 10-90

6.1 RANGO O RECORRIDO

Es la medida de dispersión mas sencilla y se calcula como la diferencia entre el valor mayor y el valor menor de la serie

$$R = V_{MAYOR} - R_{MENOR}$$

6.2 RANGO INTERCUARTILICO

Es igual a la diferencia entre el tercer cuartil y el primer cuartil

$$R_{IC} = Q_3 - Q_1$$

6.3 RANGO SEMI-INTERCUARTIL

Es igual a la diferencia del tercer cuartil y el primer cuartil dividido por dos

$$R_{SIC} = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

6.4 RANGO PERCENTIL 10-90

Es igual a la diferencia entre el percentil 90 y el percentil 10

$$RP_{10-90} = P_{90} - P_{10}$$

6.5 DESVIACION MEDIA PARA DATOS SIN AGRUPAR

La desviación media o desviación promedio mide la distancia absoluta promedio entre cada uno de los datos y el parámetro que caracteriza la información. Se calcula así:

$$DM = \frac{\sum |X_i - \bar{X}|}{n}$$

DM : Desviación media
Xi : valores de la variable X
 \bar{X} : media aritmética
n : tamaño de la muestra

EJEMPLO 1

Hallar la desviación media del conjunto 2, 3, 5 y 6
DESARROLLO

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \frac{2 + 3 + 5 + 6}{4} = 4.0 \\ DM &= \frac{|2 - 4| + |3 - 4| + |5 - 4| + |6 - 5|}{4} = 1.5\end{aligned}$$

6.6 DESVIACION MEDIA PARA DATOS AGRUPADOS

$$DM = \frac{\sum |X_i - \bar{X}| F_i}{n}$$

DM : Desviación media
Xi : valores de la variable X
 \bar{X} : media aritmética
n : tamaño de la muestra
Fi : frecuencia de cada observación Xi

EJEMPLO 2

Hallar la desviación media del peso de una muestra de 100 estudiantes de la Usaca dada en la siguiente distribución de frecuencia.

CUADRO 6.1
DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIA
PESO DE 100 ESTUDIANTES DE LA USACA

PESO (KGRS)	NUMERO DE ESTUDIANTES
60 - 62	5
63 - 65	18
66 - 68	42
69 - 71	27
72 - 74	8

DESARROLLO

PESO (KGRS)	F	MC	FMC	(MC - X)	(MC – X)F
60 - 62	5	61	305	6.45	32.25
63 - 65	18	64	1152	3.45	62.10
66 - 68	42	67	2814	0.45	18.90
69 - 71	27	70	1890	2.55	68.85
72 - 74	8	73	584	5.55	44.40
SUMATORIA	100		6745		226.50

$$X = \frac{6745}{100} = 67.45$$

$$DM = \frac{226.50}{100} = 2.26$$

6.7 DESVIACION TIPICA S

Es la raíz cuadrada de la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones de las observaciones respecto de su media aritmética . Es una de las mas importantes medida de dispersión.

Se calcula para las observaciones $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ así:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum (X - \bar{X})^2}{N}}$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum X^2}{N} - (\bar{X})^2}$$

EJEMPLO 3

Enrique Jr, vende 6 pólizas de seguros diferentes , Sus primas mensuales respectivas son 180, 165, 175, 155, 175 y 200. dólares. Calcular la prima promedio y la desviación típica.

DESARROLLO

$$\bar{X} = \frac{180 + 165 + 175 + 155 + 175 + 200}{6} = 175$$

$$\sum X^2 = 180^2 + 165^2 + 175^2 + 155^2 + 175^2 + 200^2 = 184900$$

$$S = \sqrt{\frac{184900}{6} - (175)^2} = 13.84$$

$$S = \sqrt{\frac{(180 - 175)^2 + (165 - 175)^2 + (175 - 175)^2 + (155 - 175)^2 + (175 - 175)^2 + (200 - 175)^2}{6}} = 13.84$$

La prima media mensual es de 175 dólares y la desviación típica es 13.84 dólares. Obsérvese que la desviación típica fue calculada de dos formas 8 forma corta y forma larga).

El concepto de desviación típica es de enorme importancia en los negocios y en la economía . En finanzas la desviación típica se utiliza para medir la variabilidad de las tasas de rendimiento que ofrecen distintas inversiones ,; el analista financiero puede calibrar el nivel de riesgo que entraña cada activo . Por lo general, cuanto mayor sea la desviación típica de la tasa de rendimiento de una inversión determinada , mayor ser el grado de riesgo.

EJEMPLO 3

George Hurt es un directivo de una empresa de inversiones , que asesora a quienes quieren establecer sus carteras de inversiones personales .Hace poco , George estaba interesado en las tasas de rendimiento que habían ofrecidos dos fondos de inversiones diferente a lo largo de los últimos años. Megafondos & asociados presentaba tasas de retorno a lo largo de los últimos cinco años de 12, 10, 13, 9 y 11% mientras Hiperinversiones Ltda. Había producido 13,12, 14, 10 y

6%. La cliente Miriam García se puso en contacto con Mr Hurt y expreso su interés por uno de estos fondos de inversión . Cual de ellos deberá elegir George para su cliente ?

DESARROLLO

Calculamos para Megafondos la tasa de rendimiento promedio y la desviación típica y obtenemos :

$$\bar{X} = \frac{12+10+13+9+11}{5} = 11$$

$$\sum X^2 = 12^2 + 10^2 + 13^2 + 9^2 + 11^2 = 615$$

$$S = \sqrt{\frac{615}{5} - (\bar{11})^2} = 1.41$$

$$S = \sqrt{\frac{(12-11)^2 + (10-11)^2 + (13-11)^2 + (9-11)^2 + (11-11)^2}{5}} = 1.41$$

**Calculamos lo mismo para Hiperinversiones
Tenemos:**

$$\bar{X} = \frac{13+12+14+10+6}{5} = 11$$

$$\sum X^2 = 13^2 + 12^2 + 14^2 + 10^2 + 6^2 = 645$$

$$S = \sqrt{\frac{645}{5} - (\bar{11})^2} = 2.83$$

$$S = \sqrt{\frac{(13-11)^2 + (12-11)^2 + (14-11)^2 + (10-11)^2 + (6-11)^2}{5}} = 2.83$$

George encuentra que los dos fondos ofrecen el mismo rendimiento promedio del 11%, por lo tanto la decisión recae sobre la base de la desviación típica , de donde la inversión con menor dispersión será la que menor riesgo conlleva. Dado que la desviación típica de Megafondos de 1.41% es menor que la Hiperinversiones que es de 2.83% George recomienda a su cliente que invierta en Megafondos ya que presenta menor variabilidad en sus rendimientos y ofrece la misma tasa promedio de retribución que la competencia .

Para datos agrupados la desviación típica se calcula así:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N F(MC_i - \bar{X})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum F(MC - \bar{X})^2}{N}}$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum FMC^2}{N} - (\bar{X})^2}$$

Donde N es la frecuencia total y MC es la marca de clase de los intervalos de clases

A veces se define la desviación típica de las observaciones de una muestra con (N-1) reemplazándolo a N en los denominadores de las ecuaciones anteriores, porque el valor resultante da una mejor estimación de la desviación típica de la población total. Para valores de N mayores que 30 no hay ninguna diferencia práctica entre ambas definiciones. Además si se necesita una mejor estimación

podemos tenerla multiplicando las ecuaciones anteriores por el factor $\sqrt{\frac{N}{N-1}}$

6.8 VARIANZA

La varianza de un conjunto de datos se define como el cuadrado de la desviación típica y se denota por S^2 . Cuando sea necesario distinguir entre la desviación típica de una población de la de una muestra de esa población utilizaremos la S para la muestra y σ (sigma) para la población. De igual manera S^2 σ^2 representarían la variancia de la muestra y la variancia de la población respectivamente.

EJEMPLO 4

Para los datos del peso de una muestra de 100 estudiantes de la Usaca dada en la siguiente distribución de frecuencia del cuadro adjunto. Calcular:

1. El rango
2. El rango intercuartil y el rango semi- intercuartil
3. El rango percentil 10-90
4. La desviación típica y la variancia
5. El coeficiente de asimetría

CUADRO 6.1
DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIA
PESO DE 100 ESTUDIANTES DE LA USACA

PESO (KGRS)	NUMERO DE ESTUDIANTES
60 - 62	5

63 - 65	18
66 - 68	42
69 - 71	27
72 - 74	8

DESARROLLO

PESO (KGRS)	F	FAC<	MC	FMC	(MC - 67.45)	F(MC - 67.45) ²
60 - 62	5	5	61	305	6.45	208.01
63 - 65	18	23	64	1152	3.45	214.25
66 - 68	42	65	67	2814	0.45	8.51
69 - 71	27	92	70	1890	2.55	175.57
72 - 74	8	100	73	584	5.55	246.42
SUMATORIA	100			6745		852.75

Como se puede ver El rango es una medida de dispersión que no ayuda en nada para un análisis serio ya que solo toma en cuenta los dos valores extremos y no comunica nada acerca de lo que ocurre realmente en el conjunto de datos. Es muy poco utilizado.

$$R = V_{MAYOR} - V_{MENOR} = 74 - 60 = 14$$

$$Q_1 = 65.5 + \frac{2}{42}(3) = 65.64$$

$$Q_3 = 68.5 + \frac{10}{27}(3) = 69.61$$

$$R_{IC} = Q_3 - Q_1 = 69.61 - 65.64 = 3.97$$

$$R_{SIC} = \frac{R_{IC}}{2} = \frac{3.97}{2} = 1.99$$

$$P_{10} = 62.5 + \frac{5}{18}(3) = 63.33$$

$$P_{90} = 68.5 + \frac{25}{27}(3) = 71.28$$

$$RP_{10-90} = P_{90} - P_{10} = 71.28 - 63.33 = 7.95$$

$$ME = 65.5 + \frac{27}{42}(3) = 67.43$$

$$MO = 65.5 + \left(\frac{24}{24 + 15} \right)(3) = 67.35$$

$$\overline{X} = \frac{6745}{100} = 67.45$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum F(MC - \overline{X})^2}{N}} = \sqrt{\frac{852.75}{100}} = 2.92$$

$$S^2 = (2.92)^2 = 8.53$$

$$CP = \frac{3(\overline{X} - ME)}{S} = \frac{3(67.45 - 67.43)}{2.92} = 0.02$$

6.9 PROPIEDADES DE LA DESVIACIÓN TÍPICA

Como se ha dicho la desviación típica la utilizamos principalmente para medir el grado de dispersión de las observaciones respecto a su media , pero hay otras aplicaciones de la desviación típica que están relacionadas con algunas relaciones empíricas que se comportan bien en la practica y entre las mas importantes tenemos las siguientes:

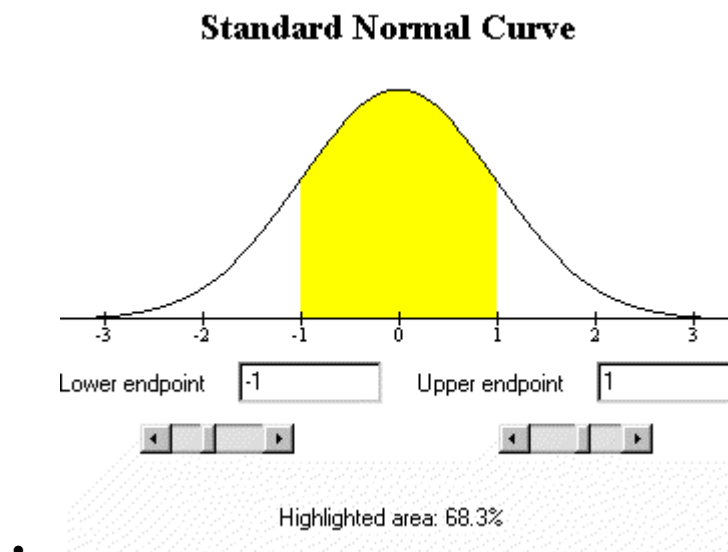
6.9.1 Teorema de Chebyshev , que afirma que para cualquier conjunto de datos , al menos $1-(1/k^2)$ de las observaciones están dentro de k desviaciones típicas de la media , siendo k cualquier numero mayor que 1. En consecuencia con este teorema si formamos un intervalo desde K igual a tres desviaciones típicas por encima de la media hasta tres desviaciones típica por debajo de la media, en dicho intervalo se encontraran como mínimo el 88.89 % de todas las observaciones ($1 - 1/3^2 = 88.89\%$)

6.9.2 Para distribuciones normales se tiene que:

- a) El 68.3 % de los casos están entre la media y mas o menos una desviación típica, es decir, una desviación a cada lado de la media
- b) El 95.45% de los casos están entre la media y mas o menos dos desviaciones típicas, es decir dos S a cada lado de la media.
- c) El 99.73% de los casos esta entre la media y mas o menos tres desviaciones típicas, es decir, tres S a cada lado de la media.

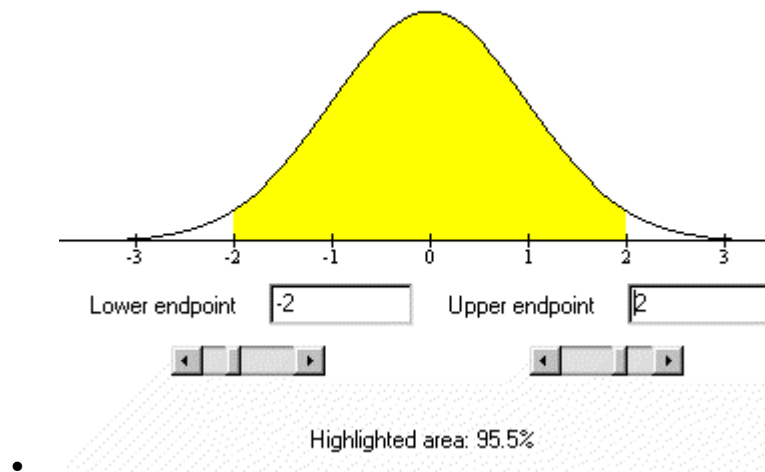
En las graficas se muestran las áreas sombreadas para cada uno de los 3 casos

- El 68.3% de todas las observaciones están dentro de una desviación estándar de la media



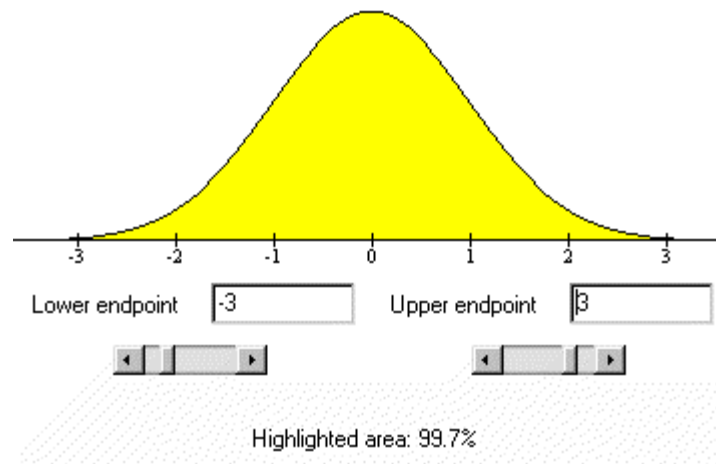
- El 95.45% de todas las observaciones están dentro de dos desviaciones estándar de la media

Standard Normal Curve



- El 99.7% de todas las observaciones están dentro de tres desviaciones estándar de la media.

Standard Normal Curve



C:\Area Under the Normal Curve.htm

<http://stat-www.berkeley.edu/~stark/SticiGui/Text/gloss.htm#normal>

6.9.3 SESGO O ASIMETRIA

Para distribuciones de frecuencias unimodales, que sean poco asimétricas o sesgadas se puede decir empíricamente que la diferencia entre la media y la moda es igual a tres veces la diferencia entre la media y la mediana.

Como se puede ver en los gráficos, se muestran las posiciones relativas de la media, la mediana y la moda para curvas de frecuencias asimétricas a la derecha o a la izquierda. Para curvas simétricas los tres valores coinciden.

En todos los casos la moda es la observación que ocurre con mayor frecuencia, por lo tanto esta en el pico de la distribución , pero como se ha dicho, por su propia naturaleza la media aritmética resulta afectada por los valores extremos . Así pues, esta desviada en la dirección del sesgo mas que la mediana que queda en algún punto entre la media aritmética y la moda. Estas condiciones de sesgo son significativa y se pueden medir por el coeficiente de sesgo de Pearson (CP) que se calcula así.

$$CP = \frac{3(\bar{X} - ME)}{S}$$

Si $CP < 0$, los datos están sesgado a la izquierda, es decir tienen asimetría negativa

Si $CP > 0$, los datos están sesgado a la derecha ,es decir, tienen asimetría positiva

Si $CP = 0$ los datos están distribuidos normalmente , es decir no tienen asimetría

6.9.4 Para distribuciones pocos sesgada la desviación típica es aproximadamente igual a 1.25 la desviación media y a 1.5 el rango semi –intercuartil.

6.9.5 La desviación típica puede definirse como:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (Xi - a)^2}{N}}$$

Donde a es un promedio distinto de la media aritmética . De tales desviaciones típica la mínima es aquella para la cual a es igual a la media aritmética

6.9.6 COEFICIENTE DE VARIACIÓN

La variación o dispersión real , tal como se determina de la de la desviación típica u otra medida de dispersión , se llama dispersión absoluta . Sin embargo una dispersión de 1 metro en un kilómetro es muy diferente de esa misma dispersión al medir una distancia de 100 kilómetros. Una medida de este efecto se calcula como la dispersión relativa que igual a la dispersión absoluta dividida por la media aritmética .

Si consideramos dos o mas distribuciones medias bastantes diferentes , o que se midan en unidades distintas , sería peligroso sacar conclusiones sobre la dispersión a partir del único valor de la desviación típica , sería como comparar peras con naranjas.

Razón de lo anterior se hace necesario recurrir al coeficiente de variación que sirve como medida relativa de la dispersión . El coeficiente de dispersión mide el grado de dispersión de un conjunto de datos en relación a su media. Se calcula así:

$$CV = \frac{S}{X}100$$

EJEMPLO 5

Si usted desea determinar la estabilidad del precio de un valor cotizado en la bolsa y decide basar su juicio en la desviación típica del precio diario al cierre de dicho valor y consulta las paginas financieras y ve que el valor viene siendo negociado en la bolsa desde hace bastante tiempo y que hay muchas cotizaciones al cierre que datan incluso de hace varios meses . En lugar de utilizar todos los precios usted decide simplificar los cálculos y selecciona una muestra aleatoria de 7 días y anota las cotizaciones al cierre de: 90, 85, 100, 125, 110, 92 y 105.

Si una segundo valor ha registrado los siguientes precios al cierre de :150, 160, 110, 100, 95, 102 y 198.

Cual de los valores tiene mayor dispersión absoluta y cual mayor dispersión relativa ?

DESARROLLO

$$\overline{X}_{\text{VALOR1}} = \frac{90 + 85 + 100 + 125 + 110 + 92 + 105}{7} = 101$$

$$S_{\text{VALOR1}} = \sqrt{\frac{(90 - 101)^2 + (85 - 101)^2 + (100 - 101)^2 + (125 - 101)^2 + (110 - 101)^2 + (92 - 101)^2 + (105 - 101)^2}{7 - 1}} = 13.74$$

$$CV_{\text{VALOR1}} = \frac{S}{\overline{X}}(100) = \frac{13.74}{101}(100) = 13.60\%$$

$$\overline{X}_{\text{VALOR2}} = \frac{150 + 160 + 110 + 100 + 95 + 102 + 98}{7} = 116.43$$

$$S_{\text{VALOR2}} = \sqrt{\frac{(150 - 116.4)^2 + (160 - 116.4)^2 + (110 - 116.4)^2 + (100 - 116.4)^2 + (95 - 116.4)^2 + (102 - 116.4)^2 + (98 - 116.4)^2}{7 - 1}} = 26.91$$

$$CV_{\text{VALOR2}} = \frac{S}{\overline{X}}(100) = \frac{26.91}{116.43}(100) = 23.11\%$$

Como se puede ver el valor 2 tiene mayor dispersión absoluta ya que su desviación típica 26.91 es mayor que la del valor 1 que es de 13.74. al igual que su dispersión relativa que del 23.11% frente al 13.6% . De lo anterior podemos afirmar que el valor 1 al presentar menor dispersión absoluta y relativa presenta mayor estabilidad en los precios por lo tanto es mas confiable para cualquier tipo de inversión.

EJEMPLO 6

La media de los pesos de los estudiantes era de 67.45 kgrs con una desviación típica de 2.92 kgrs . Con el objeto de programar dietas con mira prevenir el sobrepeso y enfermedades cardiovasculares y de hipertensión. La dirección de Salubridad quiere

saber con que frecuencia el peso de los estudiantes esta dentro de $K =$ dos desviaciones típicas desde la media y cual es ese intervalo.

2.) Calcular el coeficiente de asimetría

DESARROLLO

1.)Utilizando el teorema de Chebyshev tenemos que dos desviaciones típicas equivalen a $(2 \times 2.92) = 5.84$ kgrs por encima y por debajo de la media de 67.45 kgrs, por lo tanto tendremos un intervalo que va desde $(67.45 - 5.84) = 61.61$ hasta $(67.45 + 5.84) = 73.29$. Por lo tanto podemos estar seguros de que al menos $(1 - 1/2^2 = 75\%)$ de los datos estuvo entre 61.61 y 73.29. , es decir , el 75% de los 100 estudiantes o sea 75 estudiante están en este rango.

6.10 DIAGRAMA DE CAJA

El diagrama de Tallo y hoja y el histograma proporcionan una impresión visual general de un conjunto de datos, mientras que las cantidades numéricas tales como la media y la desviación típica brindan información sobre una sola característica de las observaciones o datos. El diagrama de caja es una presentación visual que describe al mismo tiempo varias características importantes de un conjunto de datos, tales como el centro, la dispersión , la desviación de la simetría y la identificación de observaciones que se alejan de manera poco usual del resto de los datos. Este tipo de observaciones se conocen como valores atípicos

Este diagrama presenta los 3 cuartiles y los valores mínimo y máximo de los datos sobre un rectángulo alineado horizontal o verticalmente. El rectángulo delimita el rango intercuartílico con la arista izquierda o inferior ubicada en el primer cuartil y la arista derecha o superior ubicada en tercer cuartil. Se dibuja una línea a través del rectángulo en la posición que corresponde al segundo cuartil que es igual a la mediana. De cualquiera de las aristas del rectángulo se extiende una línea o bigote que va hacia los valores extremos. Las observaciones que están entre 1.5 y 3 veces el rango intercuartílico a partir de las aristas del rectángulo se conocen como valores atípicos extremos. En ocasiones se emplean diferentes símbolos como círculos vacíos o llenos, para identificar los dos tipos de valores atípicos. Los diagramas de caja son muy útiles al hacer comparaciones graficas entre conjuntos de datos ya que tienen un gran impacto visual y son fáciles de comprender.

EJEMPLO 7

Comparar las tres mezclas de la tabla adjunta:

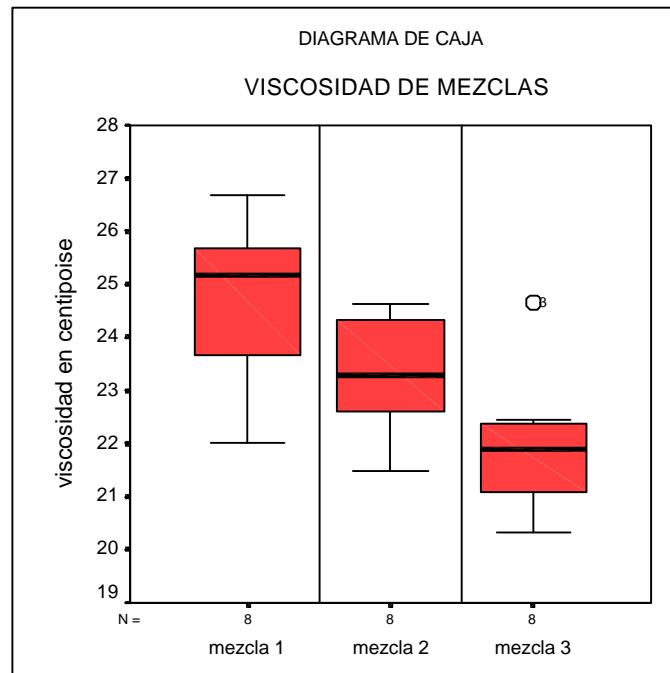
TABLA
MEDIDAS DE VISCOSIDAD PARA MEZCLAS
EN CENTIPOISES

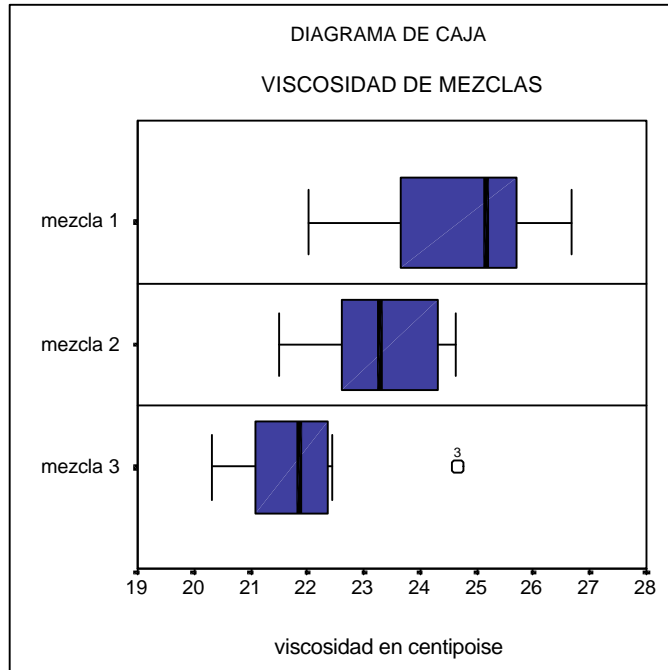
Mezcla 1	Mezcla 2	Mezcla 3
22,02	21,49	20,33

23,83	22,67	21,67
26,67	24,62	24,67
25,38	24,18	22,45
25,49	22,78	22,28
23,50	22,56	21,95
25,90	24,46	20,49
24,98	23,79	21,81

DESARROLLO

Utilizando SPSS 11 construimos el diagrama de caja y de este observamos que la mezcla 1 tiene mayor viscosidad que la mezcla 2 y esta mayor viscosidad que la mezcla 3. La distribución de viscosidad no es simétrica y la lectura de viscosidad máxima de la muestra 3 parece inusualmente grande en comparación con las otras lecturas. Esta observación puede ser un dato extraño y posiblemente justifique un nuevo examen y análisis adicionales.





EJEMPLO 8

Calcular para los datos sin agrupar de las pruebas de resistencias para la aleación de aluminio – litio del cuadro adjunto 3.6. USE SPSS

- Los cuartiles Q1, Q2 y Q3.
- Todos los deciles
- Los percentiles 35, 45, 55, 65, 85, y 95
- La media , la median y la moda
- La desviación típica
- La varianza
- El rango
- El coeficiente de asimetría
- Histograma con 9 intervalos

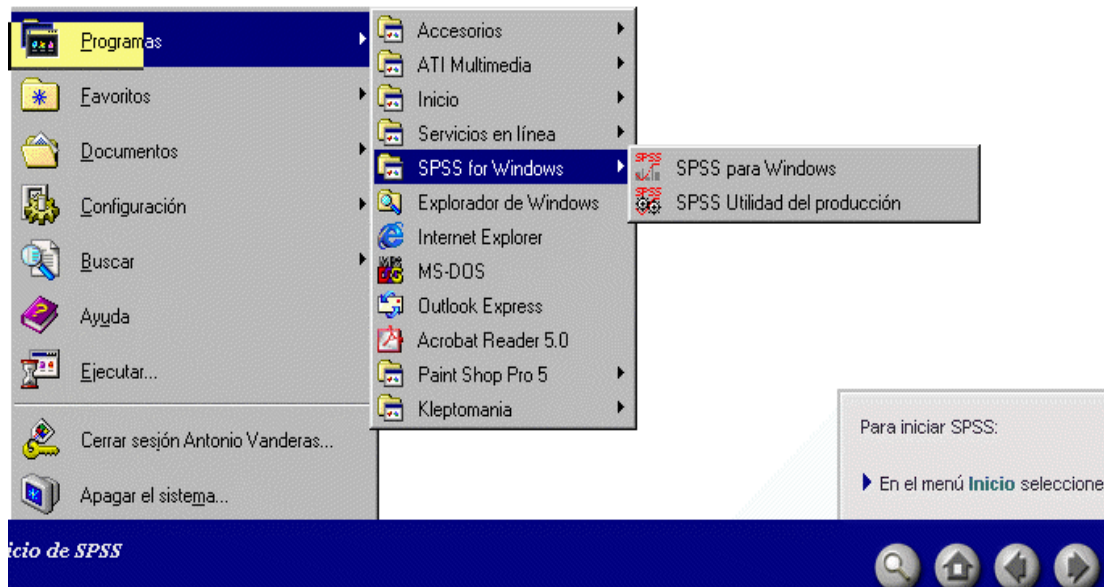
CUADRO 6.6
RESISTENCIA A LA TRACCIÓN
ALEACIÓN DE ALUMINIO LITIO

70	123	145	154	163	172	183	200
88	131	146	156	163	174	184	201
97	133	148	157	165	174	186	207
101	133	149	158	167	175	186	208
105	134	149	158	167	176	190	218
110	135	150	158	168	178	193	221


115	135	150	158	169	180	194	228
118	141	151	160	170	180	196	229
120	142	153	160	171	181	199	245
121	143	154	160	171	181	199	250

DESARROLLO

Para resolver el ejercicio con cualquier versión de SPSS , se sigue el siguiente proceso:
1. Inicie SPSS como se indica en el la figura

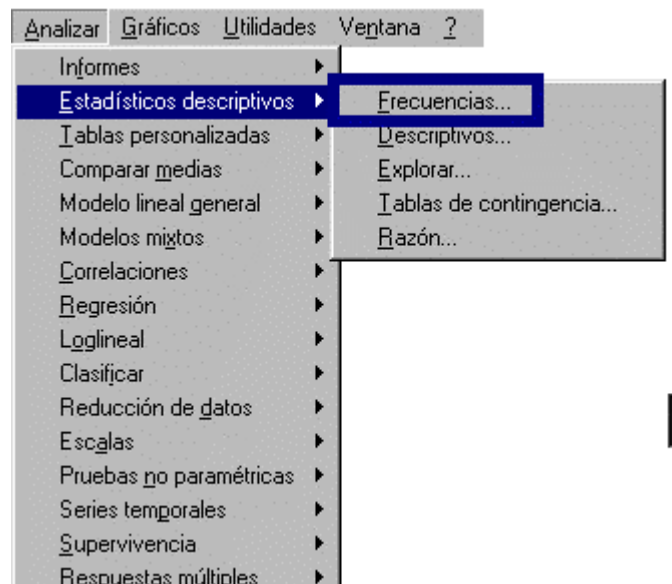


2. Digite los datos en el editor de datos como se muestra a continuación

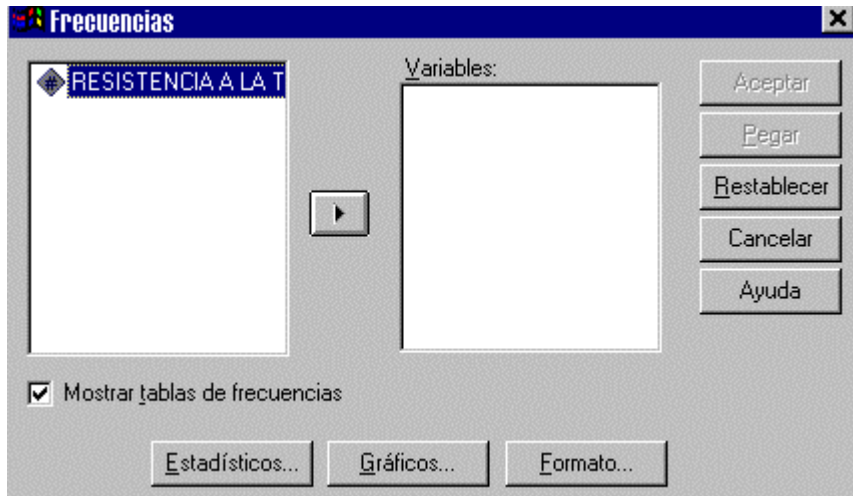


	psi	var	var	var	var
1	70				
2	88				
3	97				
4	101				
5	105				
6	110				
7	115				
8	118				
9	120				
10	121				
11	123				
12	131				
13	133				

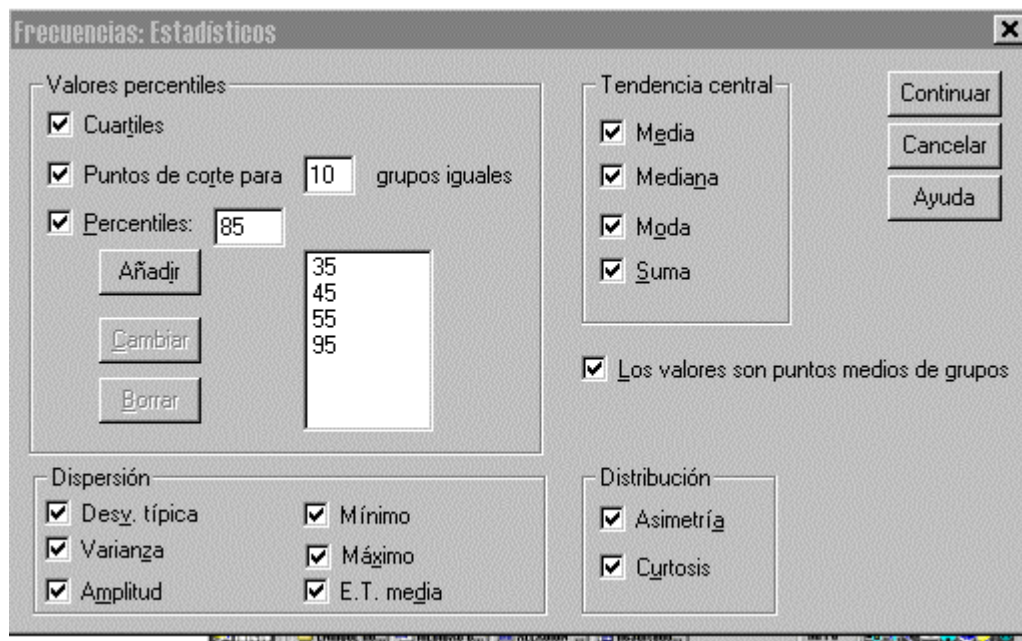
3. Luego en la barra de herramientas , seleccione Analizar/ Estadísticos descriptivos / Frecuencias como se ve en la figura adjunta



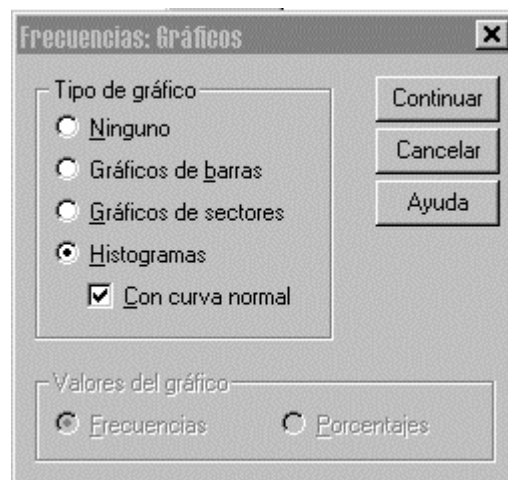
4. Pulse Frecuencia y aparece el siguiente cuadro de dialogo.



5. En cuadro de dialogo pulse estadísticos y obtiene este nuevo cuadro de dialogo en donde se seleccionan todos los parámetros que se quieren calcular y se da aceptar para volver al cuadro de dialogo de 4



6. En el cuadro de dialogo del ítem 4 pulse gráficos y obtiene este cuadro de dialogo en donde se selecciona histogramas y se da continuar, regresando al cuadro de dialogo donde se da aceptar y se obtiene los resultados.



7. Los resultados obtenidos se muestran a continuación. El histograma obtenido se edita para llevarlo a las necesidades pedidas.

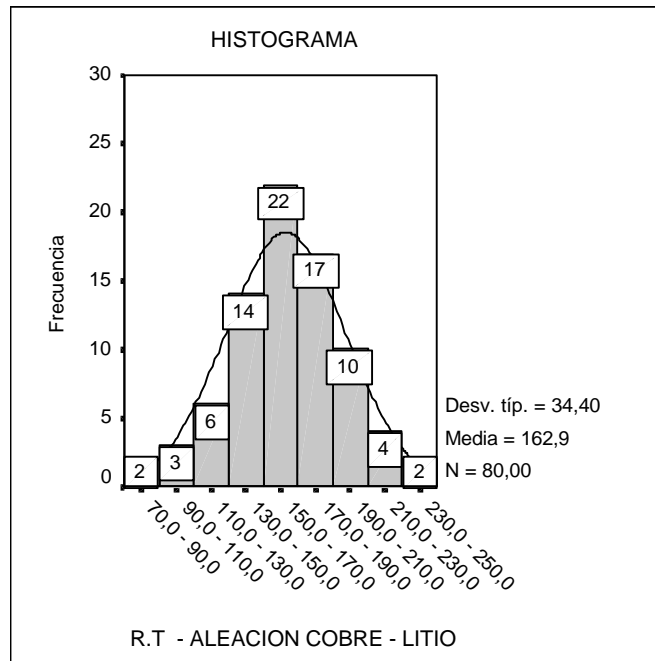
RESISTENCIA A LA TRACCION

N	Válidos	80
	Perdidos	0
Media		162,89
Error típ. de la media		3,846
Mediana		161,80 ^a
Moda		158
Desv. típ.		34,403
Varianza		1183,544
Asimetría		,000
Error típ. de asimetría		,269
Curtosis		,425
Error típ. de curtosis		,532
Rango		180
Mínimo		70
Máximo		250
Suma		13031
Percentiles	10	119,00 ^b
	20	135,00
	25	144,00
	30	149,00
	35	152,00
	40	156,50
	45	158,57
	50	161,80
	55	167,00
	60	170,33
	70	178,67
	75	182,33
	80	188,67
	85	197,00
	90	204,00
	95	224,50

a. Calculado a partir de los datos agrupados.

b. Los percentiles se calcularán a partir de los datos agrupados.

10



TALLER MODULO 6 **

1. En la tabla adjunta se clasifican las cotizaciones al cierre de 50 valores seleccionados al azar en la bolsa de Medellín .
 - a) Calcule la media aritmética, la moda y la mediana
 - b) Calcule la desviación típica y la varianza
 - c) Calcule el rango intercuartil y el rango semi –intercuartil
 - d) Elabore un histograma y su respectivo polígono de frecuencia
 - e) Elabore un ojiva menor que en % y otro en valores absolutos.
 - f) Si usted quisiera reflejar un mercado en alza que muestre los precios medios al cierre mas alto posible , cual de las medidas de tendencia central utilizaría.

Cotización al cierre en miles de \$	Numero de acciones
0 - 1	1
1 - 2	2
2 - 3	5
3 - 4	8
4 - 5	11
5 - 6	8

6 - 7	6
7 - 8	4
8 - 9	3
9 - 10	2

2. Un diario de distribución nacional informo de una polémica entre la dirección y el sindicato local de trabajadores en relación con la eficiencia y la productividad de estos . La gerencia argumentaba que los empleados tardaban mas de 20 minutos en realizar una determinada tarea. Si en el cronometraje realizado a 85 empleados se obtuvieron los resultados tabulados adjuntos:
- Tiene razón la gerencia de acuerdo con esta muestra ?
Calcular la media, la moda y la mediana
 - A la gerencia también le preocupa el hecho de que el rendimiento de los empleados es demasiado errático ; hay demasiada variación en el tiempo empleado por los trabajadores en realizar la tarea . Determinar y calcular el estadístico que corresponda a la a la preocupación de la gerencia .
 - Calcular el rango intercuartílico.

TIEMPO EN MINUTOS	NUMERO DE EMPLEADOS
5 - 7	2
7 - 9	8
9 - 11	10
11 - 13	15
13 - 15	17
15 - 17	14
17 - 19	7
19 - 21	9
21 - 23	3

3. Los sindicalistas de una de las factoría de la multinacional Ford Motor Company argumentan que los trabajadores de la línea de fabricación perciben un salario horario medio mas bajo y con mayor variabilidad que los trabajadores de las oficinas, lo que constituye un incumplimiento del convenio colectivo . Se toma una muestra de 10 de cada clase de

trabajadores que da los siguientes valores adjuntos. ¿ apoyan estos datos la reclamación de los sindicalistas ?

TRABAJADORES	TRABAJADORES DE PRODUCCION	TRABAJADORES DE OFICINA
1	12.15	15.12
2	18.17	18.42
3	19.42	17.12
4	15.17	16.92
5	18.63	18.15
6	16.42	15.81
7	15.49	19.12
8	18.73	19.15
9	19.12	18.73
10	18.36	19.66

4. Dos marcas competidoras de calzado para corredores se sometieron a una prueba para comprobar el desgaste del calzado . Cada una de ellas indico el numero de horas de uso necesarias para que se detecte un desgaste significativo:

MARCA X	MARCA Y
76	77
66	55
99	88
83	55
76	90
84	66
98	

- Que calzado presenta menor desgaste ?
 - Que calzado parece tener el programa de control de calidad que produce un desgaste mas uniforme ?
5. En la tabla de frecuencia adjunta se muestran las utilidades anuales obtenidas por 100 empresas del sector manufacturero :
- Calcular e interpretar la medidas de tendencias central mas importantes
 - Calcular e interpretar las medidas de dispersión mas importantes
 - Construir un histograma en valores absolutos y otro en valores relativos.

UTILIDADES EN	NUMERO
---------------	--------

MILLONES DE \$	DE EMPRESAS
50 - 99	4
100 - 149	16
150 - 199	30
200 - 249	20
250 - 299	24
300 - 349	2
350 - 399	4

6. Los DJ de la emisora Salsa & MP3 afirma que emiten mas canciones a la hora que sus rivales de la emisora Merengues & Vallenatos del otro lado de la ciudad. A lo largo de las ultimas 24 horas se han recogido y tabulado datos sobre el numero de canciones emitidas por ambas emisoras . Utilizar los datos para preparar un informe que compare las dos emisoras . Su informe definitivo se deberá presentar a la comisión nacional de comunicaciones y contendrá referencia a medidas de tendencia central y medidas de dispersión.

NUMERO DE CANCIONES POR HORA	SALSA & MP3	MERENGUES & VALLENATOS
5 - 10	3	5
11 - 16	5	6
17 - 22	7	8
23 - 28	9	6
29 - 34	3	3
35 - 40	3	2

7. Calcular e interpretar para los datos adjuntos , donde se muestran las calificaciones de los estudiantes de estadística del programa de administración de la USACA lo siguiente: Use cualquier paquete estadístico para resolver este ejercicio.
- Los cuartiles Q1, Q2 y Q3.
 - La media , la median y la moda
 - Los deciles 30, 60 y 90
 - Los percentiles 10, y 95
 - La desviación típica y la varianza
 - Rango intercuartil y rango semi intercuartil
 - Coefficiente de asimetría y determinar el sesgo
 - Coefficiente de Curtosis
 - Construir una tabla de frecuencia con 8 intervalos de clase
 - Construir un histograma con 8 intervalos

TABLA
CALIFICACIONES CURSO DE ESTADISTICA

2,2	4,0	1,4	2,0	5,0	2,0	2,0	2,3	5,0	4,5
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

1,7	2,0	2,3	2,0	2,5	2,0	2,0	3,3	5,0	3,5
4,0	3,5	3,7	2,0	5,0	5,0	5,0	3,8	5,0	4,7
2,3	1,5	2,4	1,0	0,0	3,5	3,5	3,8	2,5	2,5
3,7	3,3	3,5	2,5	5,0	4,5	4,5	3,6	5,0	3,5
4,4	3,0	3,8	4,3	5,0	3,5	4,3	4,2	5,0	3,0
3,7	2,0	3,0	2,0	5,0	4,7	4,7	3,5	2,0	3,5
2,4	1,3	4,0	5,0	2,5	2,5	2,0	3,5	0,0	1,0
4,4	2,5	3,6	4,3	5,0	3,5	4,3	4,1	5,0	0,0
2,9	3,5	3,5	3,5	5,0	3,0	3,0	4,1	5,0	5,0
2,2	3,5	1,4	2,0	2,0	3,5	3,5	2,3	5,0	4,2
1,6	4,5	1,1	1,0	0,0	1,0	1,0	2,2	5,0	4,3
1,4	3,0	2,3	2,0	5,0	0,0	0,0	2,2	1,5	2,4
4,8	3,8	2,6	4,5	5,0	5,0	4,5	3,8	2,2	4,0
4,4	1,5	2,9	4,0	5,0	4,2	4,0	3,3	1,7	2,0
3,3	3,5	3,5	1,0	5,0	4,3	4,3	3,6	4,0	3,5
3,4	3,4	3,5	2,2	1,5	2,4	4,8	4,2	2,3	1,5

8. En la tabla adjunta se muestran el numero de acciones de 60 valores negociados en la bolsa de Occidente. Determinar e interpretar lo siguiente:
- La media , la mediana y la moda
 - Los cuartiles Q1,Q2 y Q3
 - El rango intercuartil y el rango semi – intercuartil
 - El rango percentil 10-90
 - Los deciles 2 y 8
 - La varianza y la desviación típica
 - Coeficiente de asimetría y determinar sesgo
 - Calcular el coeficiente de Curtosis
 - Construir una tabla de distribución de 8 intervalos
 - A partir de la tabla de distribución construida en (h) Calcular desde a hasta f para valores agrupados
 - Comparar los valores obtenidos para datos agrupados y para datos no agrupados. Sacar conclusiones
 - Construir un histograma con 8 intervalos.

TABLA
NUMERO DE ACCIONES NEGOCIADAS
BOLSA DE OCCIDENTE POR 100

3	17	31	38	53	69
4	18	31	39	56	72
5	19	34	43	56	73
7	20	34	45	59	74
9	21	34	47	61	74
10	21	34	48	64	75
10	25	35	48	65	76
12	27	36	48	67	79

14	27	37	50	67	80
15	29	38	52	68	85

9. Resolver el ejercicio 8 utilizando el paquete estadístico SPSS10 u 11
10. Resolver 8 utilizando Excel Comparar los resultados con 8 y 9. Sacar conclusiones.
11. El porcentaje de algodón en una tela utilizada para elaborar camisas para hombre se muestran en la tabla adjunta. Calcule:

TABLA
CONTENIDO DE ALGODÓN EN PORCENTAJE

33.3	34.2	33.8	34.8	32.8	32.6	35.8	33.1	34.6	34.5
35.4	33.1	34.5	33.6	33.5	33.1	35.9	34.7	33.6	33.5
35.3	34.5	36.2	32.5	34.2	34.6	37.6	34.3	35.4	34.7
36.5	35.6	34.7	34.5	35.7	35.4	37.3	34.4	36.1	35.6
37.8	34.3	34.6	35.1	34.7	35.9	34.6	34.5	33.5	34.4
35.4	35.1	35.3	36.8	35.3	34.7	35.4	35.2	31.2	35.2
33.7	34.7	35.4	37.9	36.4	33.6	35.4	35.1	33.8	34.7
33.6	33.6	34.6	39.5	34.6	32.9	37.8	34.6	37.9	34.6
33.7	35.4	34.9	38.2	35.9	33.5	32.1	32.9	35.4	35.4
32.5	33.6	35.0	36.4	35.6	31.6	31.2	32.0	33.3	36.6

- a) La media , la mediana y la moda
 - b) Los cuartiles Q1,Q2 y Q3
 - c) El rango intercuartil y el rango semi – intercuartil
 - d) El rango percentil 10-90
 - e) Los deciles 2 y 8
 - f) La varianza y la desviación típica
 - g) Coeficiente de asimetría y determinar sesgo
 - h) Calcular el coeficiente de Curtosis
 - i) Sacar conclusiones
12. Los datos que se muestran en la siguiente tabla muestran el rendimiento % de la refinación de 100 cargas o lotes de chatarra de cobre por el proceso de piro refinación metalúrgica.

TABLA
RENDIMIENTO DEL PROCESO DE PIROREFINACION (%)

95.1	96.4	98.6	97.5	96.8	99.6	91.2	93.4	89.7	90.1
99.1	96.7	92.4	95.4	96.7	90.2	93.4	92.2	89.3	92.1
85.6	82.6	84.0	95.3	85.3	92.5	98.7	90.3	90.0	91.5
92.1	90.5	91.2	92.5	91.2	90.1	96.4	96.2	95.0	81.5
96.2	89.3	95.3	87.2	93.4	92.1	96.7	92.3	96.2	85.2
92.3	95.2	95.4	88.1	98.7	91.5	82.6	96.5	94.2	84.3

96.5	88.5	95.5	89.2	93.4	98.5	90.5	86.5	98.0	95.5
86.3	84.3	95.0	88.8	92.2	99.0	89.3	85.3	88.5	95.6
81.3	87.6	85.2	90.5	90.3	89.2	95.2	82.6	89.1	92.0
82.6	90.2	87.3	95.0	95.2	85.4	87.5	88.9	90.0	95.1

- i) Construya una tabla de frecuencia
- j) Calcule la media , la mediana y la moda
- k) Que porcentaje de cargas tienen rendimiento entre la media y una desviación típica
- l) Que porcentaje de cargas tienen rendimiento entre la media y dos desviaciones típica
- m) Cuantas cargas tienen rendimiento entre la media y tres desviaciones típicas
- n) Calcule todos los deciles
- o) Calcule el coeficiente de asimetría y determinar sesgo
- p) Calcule el coeficiente de Curtosis
- q) Saque conclusiones.

13. La siguiente tabla muestra los datos sobre el octanaje de varias mezclas de gasolina.

**TABLA
OCTANAJE EN MEZCLAS DE GASOLINA**

88.5	87.8	83.4	86.7	91.5	88.8	96.5	100.3	96.5	92.6
94.7	91.2	91.2	94.3	89.9	88.6	95.5	87.8	84.3	89.4
84.3	86.7	88.5	90.8	90.1	87.5	96.2	95.7	93.2	89.5
90.1	93.4	88.3	90.1	98.8	94.5	84.3	89.7	88.8	92.1
89.0	96.1	93.4	91.5	88.8	92.1	85.6	85.4	88.7	92.0
89.9	89.5	87.5	88.9	85.4	90.1	86.7	96.0	92.7	87.5
91.6	90.4	91.1	92.4	91.2	89.4	90.2	95.1	89.5	88.5
90.4	91.7	90.5	93.7	90.7	95.4	92.7	98.2	96.1	95.5
90.2	90.6	91.2	94.2	92.2	92.3	91.0	94.0	92.4	92.0

- i) Construir una tabla de frecuencia
- j) Calcular la media, la mediana y la moda
- k) Calcular la desviación típica
- l) Calcular los percentiles 20, 45, 65, 85 y 95
- m) Cuantas mezclas de gasolina están ubicadas entre la media y mas o menos una desviación típica
- n) Cuantas mezclas de gasolina están ubicadas entre la media y mas o menos dos desviación típicas
- o) Que porcentaje de mezclas de gasolina están en el 25% inferior
- p) Calcular el coeficiente de asimetría y determinar sesgo
- q) Calcular el coeficiente de Curtosis
- r) Sacar conclusiones

14. **Laboratorios Sweet Dreams** , interesado en acabar con el insomnio en los pacientes que sufren de este tremendo flagelo, esta investigando los efectos que surte su nuevo producto “ **just dream flying**”. Como parte del estudio se trataron 60 pacientes y se midió el tiempo que tardaba de comenzar a actuar dicho fármaco. Los resultados en minutos se muestran en la siguiente tabla en valores brutos.

TABLA
TIEMPO DE REACCION DEL FÁRMACO
JUST DREAM FLYING

23.4	21.4	13.5	18.8	11.8
25.2	8.5	16.7	18.5	26.7
21.6	26.4	25.3	24.4	21.8
28.8	21.8	14.8	18.4	26.3
9.2	26.6	14.6	31.3	8.5
21.5	11.9	30.5	21.4	21.3
19.0	22.8	16.4	28.5	21.5
22.6	16.6	16.7	23.8	13.5
22.9	29.8	26.4	9.4	20.3
20.2	26.9	19.9	27.3	22.8
13.5	23.4	28.5	18.2	22.7
21.5	23.4	17.3	15.3	18.8

- j) Calcule el tiempo promedio, modal y mediano de reacción
- k) Calcular la desviación típica
- l) Calcular los cuartiles
- m) Cuantos pacientes reaccionaron entre la media y mas o menos una desviación típica
- n) Cuantos pacientes reaccionaron entre la media y mas o menos una desviaciones típicas
- o) Cuantos pacientes reaccionaron entre la media y mas o menos tres desviaciones típicas
- p) Calcular el coeficiente de asimetría y determinar sesgo
- q) Calcular el coeficiente de Curtosis
- s) Sacar conclusiones

****SUGERENCIA:** Trate Inicialmente de resolver los ejercicios manualmente y chequee los resultados de la mayor parte de los ejercicios utilizando cualquier software estadístico, (SPSS 11, Excel , etc)

BASES DE DATOS:

1. Political Database of the Americas ... the Western Hemisphere. Base de datos con información política de los 25 países de la hemisferia del oeste.

<http://www.georgetown.edu/pdba/>

<http://www.georgetown.edu/pdba/spanish.html>

<http://www.georgetown.edu/pdba/Elecdata/Col/colombia.html>

2.FAOSTAT es una base de datos estadísticos integrada on-line que actualmente contiene más de 1 millón de series anuales internacionales en las siguientes materias: <http://apps.fao.org/inicio.htm>

3. DEPARTAMENTO ADMINISTRATIVO NACIONAL DE ESTADISTICA.

<http://www.dane.gov.co/Enlaces/enlaces.html>

<http://www.dane.gov.co/index.html>

[http://www.dane.gov.co/Enlaces/Organismos Estadisticos/America/america.html](http://www.dane.gov.co/Enlaces/Organismos_Estadisticos/America/america.html)

[http://www.dane.gov.co/Enlaces/Organismos Estadisticos/Europa/europa.html](http://www.dane.gov.co/Enlaces/Organismos_Estadisticos/Europa/europa.html)

[http://www.dane.gov.co/Enlaces/Organismos Estadisticos/Asia/asia.html](http://www.dane.gov.co/Enlaces/Organismos_Estadisticos/Asia/asia.html)

[http://www.dane.gov.co/Enlaces/Organismos Estadisticos/Africa/africa.html](http://www.dane.gov.co/Enlaces/Organismos_Estadisticos/Africa/africa.html)

4.. PROEXPORT COLOMBIA promueve las exportaciones colombianas. Apoya y asesora empresarios colombianos ... 091)5242015. Proexport. Quienes Somos Sobre ...

www.proexport.com.co/

<http://www.proexport.com.co/VBeContent/home.asp?Perfil=1>

5. DEPARTAMENTO NACIONAL DE PLANEACION

http://www.dnp.gov.co/03_PROD/PUBLIC/13P_MS.HTM

http://www.dnp.gov.co/03_PROD/BASES/BASES.HTM

6 BANCO DE LA REPUBLICA

<http://www.banrep.gov.co/>

http://www.banrep.gov.co/economia/ctanal1sec_ext.htm#tasa

7. ICFES El Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior **ICFES**

<http://www.icfes.gov.co/>

REVISTAS ELECTRONICAS

46. [*Journal of Statistics Education*](#). Excelente revista (¡gratuita!) editada por la American Statistical Association sobre educación estadística (a todos los niveles)

47. [*Homepage de la American Statistical Association*](#). La mayor asociación de estadísticos, editora de *Journal of Agricultural, Biological, and Environmental Statistics*, *Journal of the American Statistical Association*, *Journal of Statistics Education* y *The American Statistician* entre otras revistas.

48. [*Environmental and Ecological Statistics*](#)

49. [*Community Ecology*](#)

50. [*Journal of Agricultural, Biological, and Environmental Statistics*](#)
51. [*Bulletin of the Ecological Society of America*](#) (gratuita; contiene artículos de ecología estadística)
52. [*Journal of Statistical Software*](#) (gratuita)
53. [*InterStat \(Statistics on the Internet\)*](#) (gratuita)
54. [Probability and Statistics Journals on the Web](#)

ESTADISTICA ON LINE

271. [Aula Virtual de Bioestadística, Universidad Complutense](#)
272. [Curso de bioestadística de la Universidad de Málaga](#)
273. [Apuntes de Bioestadística. Unidad de Bioestadística Clínica del Hospital Ramón y Cajal](#)
274. [Lecciones de Estadística, 5campus.org \(análisis multivariante...\)](#)
275. [Curso de Bioestadística de la Universidad Nacional de Misiones \(Argentina\)](#)
276. [Curso de estadística \(para ingenieros\) de una universidad mexicana](#)
277. [Cursos de estadística de la Universidad de California, Los Angeles](#)
278. [Cursos de estadística de la Universidad de Michigan](#)
279. [Electronic Statistics Textbook](#)
280. [A New View of Statistics](#)
281. [HyperStat Statistics Textbook](#)
282. [Statistics at Square One](#)
283. [Statistics Every Writer Should Know](#)
284. [Introductory Statistics: Concepts, Models, and Applications](#)
285. [Multivariate Statistics: Concepts, Models, and Applications](#)
286. [A complete guide to nonlinear regression](#)
287. [Ordination Methods for Ecologists](#)
288. [Annotated Bibliography of Canonical Correspondence Analysis and related constrained ordination methods 1986-1993](#)
289. [Multivariate Statistics: an Introduction](#)
290. [A glossary of ordination-related terms](#)
291. [Glossary of Statistical Terms and Medical Citations for Statistical Issues](#)
292. [Glossary of over 30 statistical terms](#)
293. [EVSC 503 Applied Statistics for the Environmental Sciences](#)
294. <http://s9000.furman.edu/mellonj/spss1.htm>

295. <http://www.indiana.edu/~statmath/stat/spss/win/index.html>
296. <http://www.utexas.edu/cc/stat/tutorials/spss/SPSS1/Outline1.html>
297. <http://web.uccs.edu/lbecker/SPSS/content.htm>
298. <http://core.ecu.edu/psyc/wuenschk/SPSS/SPSS-Data.htm>
299. <http://www.tulane.edu/~panda2/Analysis2/ahome.html>
300. <http://www.shef.ac.uk/~scharr/spss/index2.htm>
301. <http://calcnet.mth.cmich.edu/org/spss/index.html>
302. <http://calcnet.mth.cmich.edu/org/spss/toc.htm>
303. <http://www.public.asu.edu/~pythagor/spssworkbook.htm>
304. <http://lib.stat.cmu.edu/>
305. <http://www.stat.ufl.edu/vlib/statistics.html>
306. <http://www.statserv.com/software.html>
307. <http://www.maths.uq.edu.au/~gks/webguide/>
308. <http://www.statistics.com/>
309. <http://www.helsinki.fi/~jpuranen/links.html#stc>
310. <http://www.maths.uq.edu.au/~gks/webguide/free.html>
311. <http://nhsbig.inhs.uiuc.edu/>
312. <http://www.okstate.edu/artsci/botany/ordinate/software.htm>
313. <http://life.bio.sunysb.edu/ee/biometry/>
314. <http://life.bio.sunysb.edu/morph/software.html>
315. <http://pbil.univ-lyon1.fr/ADE-4/ADE-4.html>
316. http://ourworld.compuserve.com/homepages/Rainer_Wuerlaender/statsoft.htm
317. <http://www.stat.auckland.ac.nz/~mja/Programs.htm>
318. <http://it.stlawu.edu/~rlock/maa99/>
319. <http://it.stlawu.edu/~rlock/tise98/java.html>
320. <http://www.stat.vt.edu/~sundar/java/applets/>
321. <http://www.kuleuven.ac.be/ucs/java/index.htm>
322. <http://noppa5.pc.helsinki.fi/koe/>
323. <http://www2.kenyon.edu/people/hartlaub/MellonProject/mellon.html>

Demostraciones Java para el aprendizaje de la estadística

324. [Electronic Textbook](#) (UCLA), programa *on-line* de representación y cálculo de funciones de densidad y de distribución (normal, F , ji-cuadrado, números aleatorios...).
Equivalente a un libro de tablas

BIBLIOGRAFÍA

106. Montgomery Douglas y Runger George.(1996), Probabilidad y Estadística aplicada a la Ingeniería., McGraw-Hill, Mexico
107. Montgomery Douglas y Hines William.(1995), Probabilidad y Estadística aplicada a la Ingeniería. y Administración, segunda edición ,CECSA, México
108. Mendenhall William, Wackerly Dennis y Scheaffer Richard (1994), Estadística Matemáticas con Aplicaciones , segunda edición, Grupo Editorial Iberoamerica. M, México
109. Govinden Portus Lincoyan.(1998), Introducción a la Estadística,. McGraw-Hill, Santafé de Bogotá
110. Webster Allen L.(1998), Estadística aplicada a la Empresa y a la Economía, segunda edición, McGraw-Hill, Madrid
111. Kohler Heinz.(1996), Estadística para Negocios y Economía, primera edición ,CECSA, México
112. Martinez Bencardino Ciro (1995), Estadística , sexta edición ,ECO E EDICIONES Santafé de Bogotá.
113. Alvarez C Ricardo (1994), Estadística Fundamental Aplicada, primera edición ,PUBLIADCO, Cali
114. Estadística," Enciclopedia Microsoft® Encarta® 2000. © 1993-1999 Microsoft Corporation.
115. Stockburger David W (1996) Introductory Statistics: Concepts, models an applications, , <http://www.psychstat.smsu.edu/sbk00.htm>
116. Mendoza Duran Carlos. (1995)Probabilidad y Estadística, <http://w3.mor.itesm.mx/~cmendoza/ma835/ma83500.html>
117. Valdés Fernando ,Comprensión y uso de la estadística, <http://www.cortland.edu/flteach/stats/glos-sp.html>
118. Hurtado Minotta Enrique A, Reflexiones para el Currículo, <http://www.geocities.com/soho/atrium/7521/tesis.html>
119. Academic Freedom , www.hrw.org/wr2k/issues-01.htm
120. Gonzalez Felipe, Africa : El silencio de los tambores, www.arrakis.es/~trazeg/gonzalez.html.
121. El año 2000, [WWW.arrakis.es/~ trazeg/anno2000.html](http://WWW.arrakis.es/~trazeg/anno2000.html)
122. Mendenhall, W.; D.D. Wackerly y R.L. Scheaffer. *Estadística Matemática con Aplicaciones*. Grupo Editorial Iberoamérica. México.
123. Freund, John E. y Gary A. Simon. *Estadística elemental*. Prentice-Hall Hispanoamericana, SA. México, 1994. (8ª edición.)
124. Spiegel, M.R. *Estadística*. McGraw-Hill. México. (Serie Schaum.)
125. <http://www.unl.edu.ar/fave/sei/encuestas/index.html>.
126. Wonnacott, Thomas H. y Ronald J. Wonnacott (1998) *Introducción a la estadística*. Limusa/IPN. México.

ehurtado@usc.edu.co

MODULO VII.

TASAS Y NUMEROS INDICES

Los Números Índices son una forma importante de resumir el cambio que experimentan las variables económicas durante cierto periodo .

Estos números indican el cambio relativo en precio, cantidad o valor en algún punto anterior en el tiempo (periodo base) y el tiempo actual (periodo de referencia). Por ejemplo , cuando usted señor universitario observa que el valor de su matrícula ahora que usted esta acabando la carrera cuesta el doble de lo que costaba al principio, de hecho usted esta utilizando un número índice.

Los números índices pueden ser simple si solo utilizan un producto y/o servicio o compuestos si utilizan en la comparación varios productos . Si una pareja compara los precios de los artículos de la canasta familiar , lo mas seguro es que va observar que algunos de ellos han aumentado de precios y probablemente otros han disminuido. El objetivo de utilizar un índice compuesto sería el de resumir los cambios totales de precio a esta serie de productos, pero la compra de estos productos pueden cambiar al pasar los años, ya que estos están directamente relacionados con el tamaño de la familia, por lo tanto el consumo de algunos artículos aumentara a la vez que disminuirá en otros, de ahí que es necesario incluir cambio en la cantidad como en el precio para obtener una idea mas exacta del cambio total.

En general los números índices se utilizan para hacer comparaciones. Mediante su utilización podemos comparar costos de producción , costos de alimentación y/o de cualquier servicio en una industria, en una ciudad, en un país, durante periodos consecutivos, y /o por zonas o regiones en periodos similares.

En educación es muy común utilizar los índices para comparar la inteligencia relativa de los estudiantes, las tasas de deserción escolar , índices de analfabetismo en lugares y años diferentes.

Los industriales y el gobierno se apoyan mucho en el uso de los índices para predecir el comportamiento económico del país y las industrias, por lo tanto es muy común oír hablar de los índices salariales, de producción , de paro, costo de vida etc.

Existen tres clasificaciones de los números índices utilizado en economía y en administración : índice de precios , de cantidad y de valor . Todos los índices poseen ciertas características en común . Una de ella es que son razones de una cantidad en un periodo actual o de referencia a otra cantidad en un periodo base . las razones se expresan en porcentaje. A la cantidad en el periodo base generalmente se le considera de 100%.

Al igual que los índices, uno de los parámetros mas utilizado son las tasas o razones que se utilizan porcentualmente para determinar comportamientos relativos en una población. Son muy utilizados la tasa de empleo , la tasa de desempleo, tasa de mortalidad , tasa de natalidad , tasa de deserción escolar, tasa de fecundidad , tasa de crecimiento, etc.

7.1 TASAS

Una tasa es una razón multiplicada por una constante C con el fin de expresar el resultado en porcentaje, en cientos, millares o en millones principalmente, es decir, es la resultante de una fracción, en donde el numerador está contenido dentro del denominador multiplicado por C.

También se puede calcular como así:

$$TASA = \frac{PORCENTAJE}{BASE}$$

Entre las principales tasas tenemos:

7.1.1 Tasa global de participación: Es la relación porcentual entre la población económicamente activa y la población en edad de trabajar. Este indicador refleja la presión de la población sobre el mercado laboral.

7.1.2 Tasa bruta de participación: Este indicador muestra la relación porcentual entre el número de personas que componen el mercado laboral, frente al número de personas que integran la población total.

7.1.3 Tasa de desempleo: Es la relación porcentual entre el número de personas que están buscando trabajo (DS), y el número de personas que integran la fuerza laboral (PEA).

Está compuesta por:

- a) Tasa de desempleo abierto:
- b) Tasa de desempleo oculto:

7.1.4 Tasa de ocupación: Es la relación porcentual entre la población ocupada (OC) y el número de personas que integran la población en edad de trabajar (PET).

7.1.5 Tasa de subempleo: Es la relación porcentual entre el número de personas subempleadas (S), y el de personas que integran la fuerza laboral (PEA). Está compuesta por:

- a) Tasa de subempleo por insuficiencia de horas:
- b) Tasa de subempleo por condiciones de empleo inadecuado:
 - 1. Tasa de subempleo competencias:
 - 2. Tasa de subempleo por ingresos

7.1.6 Tasa de Deserción Escolar: Es la relación porcentual entre el número de retiro durante el año y el número total de estudiantes matriculados en el año.

7.1.7 Tasa de Mortalidad: Es la relación porcentual entre el número de defunciones en un periodo y área dada y Población total en esa área a mitad del periodo

7.1.7 Tasa de Natalidad: Es la relación porcentual entre el número de nacidos vivos en un periodo y Población total en esa área a mitad del periodo

En los cuadros 7.1, 7.2, 7.3 y 7.4 se muestran algunas de las principales tasas que se utilizan en el mercado nacional. Con los datos consignados se pueden chequear fácilmente las diferentes tasas consignadas.

CUADRO 7.1
TASA DE DESEMPLEO POR ÁREAS METROPOLITANA
1995 (MARZO) – 2000 (DICIEMBRE)

Año	Mes	Total B	Total A	Bogotá	Medellin	Cali	B/quilla	B/manga	Manizales	Pasto
1995	marzo	7,9	8,1	6,5	9,2	9,1	9,8	9,4	8,8	10,9
	junio	8,8	9,0	7,8	9,8	11,2	8,3	10,7	8,5	12,1
	sept	8,4	8,7	6,3	10,9	10,1	11,2	10,1	11,7	12,5
	dic	9,3	9,5	7,6	11,9	10,8	10,1	11,0	11,7	11,9
1996	marzo	10,0	10,2	8,3	11,6	13,2	11,0	10,6	13,4	12,7
	junio	11,2	11,6	9,6	12,2	14,7	12,6	13,2	12,5	14,6
	sept	11,9	12,0	10,3	13,3	14,9	12,1	10,8	12,9	15,5
	dic	11,1	11,3	9,1	13,5	14,0	11,2	12,0	13,8	13,9
1997	marzo	12,2	12,3	8,4	16,4	17,1	12,8	12,7	13,9	14,9
	junio	13,4	13,4	11,4	15,3	18,4	11,4	11,5	12,0	15,1
	sept	12,2	12,1	9,9	13,9	17,0	12,1	9,6	12,2	15,8
	dic	12,0	12,0	10,6	12,4	16,6	10,6	11,4	11,9	14,2
1998	marzo	14,4	14,4	12,7	16,3	17,9	13,0	14,5	14,5	14,5
	junio	15,9	15,9	14,8	16,7	19,7	13,0	15,9	16,6	17,0
	sept	15,0	15,0	13,3	15,8	20,6	11,6	14,0	17,4	16,6
	dic	15,6	15,6	15,3	15,8	19,6	10,4	15,0	16,5	16,1
1999	marzo	19,5	19,5	18,0	23,1	21,2	16,7	19,6	21,1	18,6
	junio	19,8	19,9	19,1	21,7	21,5	16,3	21,1	21,3	19,2
	sept	20,1	20,1	19,3	22,4	21,9	16,5	18,7	20,8	21,0
	dic	17,9	18,0	16,9	20,1	20,5	14,3	17,4	21,1	18,4
2000	marzo	20,4	20,3	19,6	22,2	21,6	18,7	19,8	20,6	16,9
	junio	20,5	20,4	20,7	20,8	21,3	18,0	19,0	22,1	18,5
	sept	20,6	20,5	20,3	21,0	21,4	20,2	17,9	22,4	21,3
	dic	19,8	19,7	20,3	20,0	21,0	15,2	16,8	21,1	21,3

FUENTE: DANE - Encuesta Nacional de Hogares, etapas 67 a 110

^A Santafé de Bogotá, D.C., Barranquilla, Cali y Medellín.

^B Santafé de Bogotá, D.C., Barranquilla, Cali, Medellín, Bucaramanga, Manizales, y Pasto.

CUADRO 7.2

% Población en edad de trabajar, tasa global de participación, de ocupación y desempleo (abierto y oculto)

Población total, en edad de trabajar, económicamente activa, ocupados, desocupados (abiertos y ocultos), inactivos y subempleados,
Regiones total nacional, cabecera y resto

2001 (enero - junio y julio - diciembre) - 2002 (enero - junio)

Regiones	% población en edad de trabajar	Tasa global de participación	Tasa de ocupación	Tasa de desempleo	T.D. Abierto	T.D. Oculto	Tasa de subempleo	Empleo inadecuado por ingresos	Empleo inadecuado por competencias
2001									
ENERO - JUNIO									
Atlántica	72,9	56,3	49,0	13,1	12,3	0,7	20,9	18,3	2,3
Oriental	75,0	62,5	53,1	15,0	13,9	1,1	31,1	25,5	2,9
Bogotá,	77,0	65,1	52,3	19,6	18,5	1,1	27,6	20,3	4,0
Central	75,8	59,8	49,9	16,6	14,7	1,9	29,2	22,7	2,8
Pacífica	75,3	65,2	55,8	14,5	12,8	1,6	32,6	25,3	1,9
Total nac	75,1	61,4	51,7	15,7	14,4	1,3	28,3	22,5	2,8
2001									
JULIO - DICIEMBRE									
Atlántica	73,1	57,2	49,9	12,8	11,9	0,8	33,4	29,2	3,2
Oriental	75,1	61,1	53,5	12,5	11,6	0,9	32,3	27,5	2,4
Bogotá, D.	77,2	65,9	54,2	17,8	16,6	1,3	30,1	22,7	5,5
Central	76,0	61,8	52,6	14,8	13,1	1,7	34,6	27,8	3,5
Pacífica	75,5	67,4	58,3	13,5	11,8	1,7	42,3	32,7	2,0
Total nac	75,3	62,4	53,5	14,3	12,9	1,3	34,7	28,1	3,3
2002									
ENERO - JUNIO									
Atlántica	73,3	55,7	48,4	13,0	12,0	1,0	32,2	29,1	2,4
Oriental	75,3	61,1	51,5	15,7	14,8	0,9	32,4	26,7	3,8
Bogotá,	77,3	65,8	53,0	19,4	17,5	1,8	33,0	24,0	4,1
Central	76,1	61,1	50,2	17,9	16,3	1,6	34,3	27,2	3,1
Pacífica	75,7	65,3	56,0	14,3	12,7	1,6	38,6	30,3	1,6
Total nac	75,5	61,5	51,6	16,1	14,7	1,4	34,2	27,5	3,0

Fuente: DANE - Encuesta Continua de Hogares

Nota: Por efecto del redondeo en miles, los totales pueden diferir ligeramente.

Nota: Datos expandidos con proyecciones demográficas respecto a la población en edad de trabajar (P.E.T.), por dominio de estudio

Nota: Toda variable cuya proporción respecto a la PEA sea menor al 10%, tiene un error de muestreo superior al 5%, que es el nivel de calidad admisible para el DANE.

CUADRO 7.4

% Población en edad de trabajar, tasa global de participación, de ocupación y desempleo (abierto y oculto)

Población total, en edad de trabajar, económicamente activa, ocupados, desocupados (abiertos y ocultos), inactivos y subempleados, en miles.

Total 3 ciudades

	BOGOTA D.C			CALI - YUMBO			Medellín – Valle de Aburrá 1		
	ABRIL - JUNIO			ABRIL - JUNIO			ABRIL - JUNIO		
CONCEPTO	2000	2001	2002	2000	2001	2002	2000	2001	2002
% población en edad de trabajar	76,8	77,1	77,3	76,6	77,0	77,3	77,9	78,1	78,4
Tasa global de participación	63,8	64,1	66,2	66,2	66,7	66,9	61,0	58,8	62,0
Tasa de ocupación	52,4	52,6	54,0	54,2	55,0	56,1	49,7	47,6	51,0
Tasa de desempleo	17,9	18,0	18,4	18,1	17,6	16,2	18,6	19,0	17,7
T.D. Abierto	16,7	17,0	16,5	16,9	15,4	14,2	15,6	17,5	16,0
T.D. Oculto	1,1	1,1	1,9	1,2	2,2	2,0	2,9	1,6	1,6
Tasa de subempleo	27,6	27,6	34,0	32,3	34,9	31,2	28,5	21,9	31,0
Insuficiencia de horas	10,5	11,7	16,4	12,5	17,3	12,4	13,6	10,8	15,6
Empleo inadecuado por competencias	6,1	4,1	3,1	2,8	3,7	2,0	4,0	4,6	4,6
Empleo inadecuado por ingresos	22,9	20,7	24,9	27,1	26,2	25,2	23,5	17,0	24,1
Población total	6.402	6.540	6.679	2.189	2.242	2.295	2.801	2.845	2.891
Población en edad de trabajar	4.918	5.039	5.165	1.678	1.726	1.773	2.181	2.222	2.265
Población económicamente activa	3.136	3.231	3.420	1.110	1.151	1.186	1.331	1.306	1.404
Ocupados	2.576	2.648	2.791	909	948	995	1.084	1.057	1.157
Desocupados	561	583	629	201	203	192	247	248	248
Abiertos	525	548	565	188	177	168	208	228	225
Ocultos	35	35	64	14	26	24	39	20	23
Inactivos	1.781	1.808	1.745	568	574	587	850	917	861
Subempleados	866	891	1.164	358	402	370	379	287	435
Insuficiencia de horas	330	378	562	139	199	147	181	141	219
Empleo inadecuado por competencias	192	131	107	31	43	23	54	60	64
Empleo inadecuado por ingresos	719	668	853	301	302	299	313	222	338

Fuente: DANE - Encuesta Continua de Hogares

Nota: Por efecto del redondeo en miles, los totales pueden diferir ligeramente.

Nota: Datos expandidos con proyecciones demográficas respecto a la población en edad de trabajar (P.E.T.), por dominio de estudio

Nota: Toda variable cuya proporción respecto a la PEA sea menor al 10%, tiene un error de muestreo superior al 5%, que es el nivel de calidad admisible para el DANE.

1 Caldas, La Estrella, Sabaneta, Itagüí, Envigado, Bello, Girardota, Copacabana y Barbosa.

7.2 NUMEROS INDICES

Un número índice es una razón que se utiliza para medir los cambios relativos que ocurren entre dos períodos.

Para la construcción de un número índice , se deben fijar los periodos base y de referencia (periodo actual) de la serie temporal , teniendo en cuenta que deben ser periodos normales, es decir, periodos donde no se hayan presentados situaciones fortuitas , como situaciones de guerra, terremotos, maremotos, incendios u otro tipo de calamidad imprevista, que incidan en los valores de las variables para los periodos en consideración.

7.2.1 INDICE SIMPLE

El índice simple es aquel que mide la variación relativa de un solo artículo o servicio desde un periodo base hasta el periodo de referencia.

Se calcula como la razón de precio, cantidad o valor en un periodo dado al precio, cantidad o valor correspondientes en un periodo base.

Los índices simples de precio , cantidad y valor se calculan utilizando las siguientes formulas:

$$IP_R = \frac{P_R}{P_B} 100$$

$$IQ_R = \frac{Q_R}{Q_B} 100$$

$$IV_R = \frac{P_R Q_R}{P_B Q_B} 100$$

Donde:

IP_R : Índice de precio relativo

P_R : Precio de un artículo en año de referencia

P_B : Precio de un artículo en el año base

IQ_R : Índice de cantidad relativo

Q_R : Cantidad de un artículo en el año de referencia

Q_B : Cantidad de un artículo en el año base

IV_R : Índice de valor relativo

$P_R Q_R$: Valor de un artículo en el año de referencia

$P_B Q_B$: Valor de un artículo en el año base

EJEMPLO 1

En el siguiente cuadro 7.5 se muestran los precios y cantidades de chatarra de cobre comprada en los últimos 5 años por la empresa Cobre y aleaciones S.A.

A partir de esta información tomando el año 1995 como base calcular :

1. Los índices de precios, cantidad y valor para los años 1995 hasta el 2000
2. el incremento porcentual de los índices para el año 1996

CUADRO 7.5
CHATARRA DE COBRE COMPRADA
COBRES Y ALEACIONES S.A
PERIODO 1995 – 2000

Año	Precio promedio \$/tonelada	Cantidad toneladas	Valor \$
1995	800.000	120	96.000.000
1996	925.000	150	138.750.000
1997	1050.000	200	210.000.000
1998	1300.000	225	292.500.000
1999	1500.000	250	375.000.000
2000	1800.000	300	540.000.000

DESARROLLO

1. Los índices simples de precios, cantidad y valor se calculan utilizando las formulas dadas para cada caso tomando como base el año 1995 y como año de referencia cada uno de los años en consideración .

$$IP_{1995} = \frac{P_{1995}}{P_{1995}} 100 = \frac{800.000}{800.000} 100 = 100$$

$$IP_{1996} = \frac{P_{1996}}{P_{1995}} 100 = \frac{925.000}{800.000} 100 = 116$$

$$IP_{1997} = \frac{P_{1997}}{P_{1995}} 100 = \frac{1050.000}{800.000} 100 = 131$$

$$IP_{1998} = \frac{P_{1998}}{P_{1995}} 100 = \frac{1300.000}{800.000} 100 = 163$$

$$IP_{1999} = \frac{P_{1999}}{P_{1995}} 100 = \frac{1500.000}{800.000} 100 = 188$$

$$IP_{2000} = \frac{P_{2000}}{P_{1995}} 100 = \frac{1800.000}{800.000} 100 = 225$$

Al igual como se calculó el índice de precios , se calculan los otros índices que están consignados en el cuadro 7.6

2. De la tabla 7.6 obtenemos que los incrementos para el año 1996 fueron del 16% para el índice de precios, del 25% para el índice de cantidad y del 45% para el índice de valor.. Nótese que el incremento porcentual es igual al exceso que haya sobre el índice de la base que es siempre 100..

Cualquier incremento porcentual F se puede calcular utilizando la siguiente fórmula.

$$F = \frac{IP_R - IP_B}{IP_B} 100$$

$$F = \frac{IP_{1996} - IP_{1995}}{IP_{1995}} 100 = \frac{116 - 100}{100} 100 = 16\%$$

$$F = \frac{IQ_{1996} - IQ_{1995}}{IQ_{1995}} 100 = \frac{125 - 100}{100} 100 = 25\%$$

$$F = \frac{IV_{1996} - IV_{1995}}{IV_{1995}} 100 = \frac{145 - 100}{100} 100 = 45\%$$

CUADRO 7.6
INDICES DE PRECIO , CANTIDAD Y VALOR
COBRES Y ALEACIONES SA
PERIODO 1995 - 2000

	PRECIO	INDICE	CANTIDAD	INDICE	VALOR	INDICE
Año	\$	BASE 1995	TONELADAS	BASE 1995		BASE1995
1995	800.000	100	120	100	96.000.000	100
1996	925.000	116	150	125	138.750.000	145
1997	1050.000	131	200	167	210.000.000	219
1998	1300.000	163	225	188	292.500.000	305
1999	1500.000	188	250	208	375.000.000	391
2000	1800.000	225	300	250	540.000.000	563

EJEMPLO 2

A partir de la información suministrada por el cuadro 7.5 Calcular los índices relativos de enlace de precio, cantidad y valor.

DESARROLLO

Dado que los índices simple que utilizan un periodo base común, reciben el nombre de relativos de base fija. (ver ejemplo anterior). También existen otro tipo de índice , llamado relativo de enlace o base móvil donde se concentra la atención en los cambios anuales. Cada precio , cantidad o valor anual se mide como una razón respecto al año anterior.

Los índices relativos enlazados se pueden calcular directamente usando datos no procesados o a partir de los índices de base fija si se dispone de ellos como se muestra a continuación y se consignan en el cuadro 7.7

$$IP_{1996} = \frac{P_{1996}}{P_{1995}} 100 = \frac{925.000}{800.000} 100 = 116$$

$$IP_{1997} = \frac{P_{1997}}{P_{1996}} 100 = \frac{1050.000}{925.000} 100 = 113$$

$$IP_{1995} = \frac{IP_{1996}}{IP_{1995}} 100 = \frac{116}{100} 100 = 116$$

$$IP_{1997} = \frac{IP_{1997}}{IP_{1996}} 100 = \frac{131}{116} 100 = 113$$

CUADRO 7.7
INDICES DE ENLACE DE PRECIO , CANTIDAD Y VALOR
COBRES Y ALEACIONES SA
PERIODO 1995 - 2000

	PRECIO	INDICE	CANTIDAD	INDICE	VALOR	INDICE
AÑO	\$	DE ENLACE	TONELADAS	DE ENLACE		DE ENLACE
100	800.000		120		96.000.000	
145	925.000	115.6	150	125.0	138.750.000	145.5
219	1050.000	113.5	200	133.3	210.000.000	151.4
305	1300.000	123.8	225	112.5	292.500.000	139.3
391	1500.000	115.4	250	111.1	375.000.000	128.2
563	1800.000	120.0	300	1200	540.000.000	144.0

EJEMPLO 3

Para los datos del cuadro 7.8 calcular los índices simples de precios cantidad y valor tomando como base :

1. el año 1994
2. el año 1996
3. el año 1998
4. el año 2000
5. el año 2001

CUADRO 7.8
PRECIO Y CONSUMO PROMEDIO DE ENERGIA
METALCONSULTING INGENIERIA LTDA
PERIODO 1994 – 2001

	PRECIO	CANTIDAD	VALOR
--	--------	----------	-------

AÑO	KWH	KWH	\$
1994	10	10000	100000
1995	11	12000	132000
1996	13	15000	195000
1997	16	9000	144000
1998	20	14000	28000
1999	28	13000	364000
2000	33	12500	412500
2001	35	13500	472500

DESARROLLO

En los cuadros 7.9, 7.10 y 7.11 se muestran los datos de los diferentes índices simples de precios .cantidad y valor calculados con los periodos solicitados de base fija .

Obsérvese que el periodo de base siempre dará un índice de 100 % ; los periodos de referencia donde los valores sean inferiores a los del año base tendrán índices menores del 100% y los periodos en que los valores sean superiores a los del año base tendrán un índice mayor que 100 %

Si analizamos los índices de precios para el año base 1998, podemos decir que el precio del kwh presenta un incremento del 40% respecto al año 1999

$$F = \frac{IP_{1999} - IP_{1998}}{IP_{1998}} 100 = \frac{140 - 100}{100} 100 = 40\%$$

() y una disminución del 20% respecto al

$$F = \frac{IP_{1997} - IP_{1998}}{IP_{1998}} 100 = \frac{80 - 100}{100} 100 = -20\%$$

año 1997 ()

CUADRO 7.9
PRECIO PROMEDIO DEL KILOVATIO /HORA
METALCONSULTING INGENIERIA LTDA
PERIODO 1994 - 2001

	PRECIO	INDICE	INDICE	INDICE	INDICE	INDICE
AÑO	\$/KWH	BASE 1994	BASE 1996	BASE 1998	BASE 2000	BASE 2001
1994	10	100	77	50	30	29
1995	11	110	85	55	33	31
1996	13	130	100	65	39	37
1997	16	160	123	80	48	46
1998	20	200	154	100	61	57
1999	28	280	215	140	58	80
2000	33	330	254	165	100	94
2001	35	350	269	175	106	100

CUADRO 7.10
CONSUMO PROMEDIO DE ENERGIA
METALCONSULTING INGENIERIA LTDA
PERIODO 1994 - 2001

	CONSUMO	INDICE	INDICE	INDICE	INDICE	INDICE
AÑO	KWH	BASE 1994	BASE 1996	BASE 1998	BASE 2000	BASE 2001
1994	10000	100	67	71	80	74
1995	12000	120	80	86	96	89
1996	15000	150	100	107	120	111
1997	9000	90	60	64	72	67
1998	14000	140	93	100	112	104
1999	13000	130	87	93	104	96
2000	12500	125	83	89	100	93
2001	13500	135	90	96	108	100

CUADRO 7.3
PRECIO Y CONSUMO PROMEDIO DE ENERGIA
METALCONSULTING INGENIERIA LTDA
PERIODO 1994 – 2001

	PRECIO	CANTIDAD	VALOR	ÍNDICE	ÍNDICE	ÍNDICE	ÍNDICE	ÍNDICE
AÑO	KWH	KWH	\$	BASE 1994	BASE 1996	BASE 1998	BASE 2000	BASE 2001
1994	10	10000	100000	100	51	36	24	21
1995	11	12000	132000	132	68	47	32	28
1996	13	15000	195000	195	100	70	47	41
1997	16	9000	144000	144	74	51	35	30
1998	20	14000	280000	280	144	100	68	59
1999	28	13000	364000	364	187	130	88	77
2000	33	12500	412500	413	212	147	100	87
2001	35	13500	472500	473	242	169	115	100

EJEMPLO 4

En el cuadro adjunto se muestran los precios mensuales de un galón de gasolina.

- A). Tomando como base el mes de marzo calcular los índices de precios
 B). Cual fue el incremento porcentual de marzo a mayo y de mayo a junio
 C). Cual es el incremento puntual en porcentaje de mayo a junio

CUADRO 7.12
PRECIO DE GASOLINA

MES	enero	febrero	marzo	abril	mayo	junio	julio
DÓLAR/GALON	1.79	1.82	1.96	2.01	2.1	2.25	2.15

DESARROLLO

CUADRO 7.1
ÍNDICE DE PRECIO DE GASOLINA

MES	enero	febrero	marzo	abril	mayo	junio	julio
DÓLAR/GALON	1.79	1.82	1.96	2.01	2.1	2.25	2.15
IP	91.3	92.9	100	102.6	107.1	114.8	109.7

2. El incremento porcentual F de marzo a mayo es del 7.1% y de mayo a junio de 7.2% como se puede ver .

$$F = \frac{IP_{MAYO} - IP_{MARZO}}{IP_{MARZO}} 100 = \frac{107.1 - 100}{100} 100 = 7.1\%$$

$$F = \frac{IP_{JUNIO} - IP_{MAYO}}{IP_{MAYO}} 100 = \frac{114.8 - 107.1}{107.1} 100 = 7.2\%$$

3. El incremento puntual se calcula como la diferencia en % de los índices de precios de mayo a junio y es de 7.7% como se puede ver.

$$F_{PUNTUAL} = \frac{IP_{JUNIO} - IP_{MAYO}}{IP_{MAYO}} 100 = \frac{114.8 - 107.1}{107.1} 100 = 7.7\%$$

7.2.2 INDICES DE PRECIOS AGREGADOS

Cuando se quiere calcular un índice de precios para varios productos hay que recurrir a lo que llamamos índice de precios agregado. Las empresas que producen dos o mas productos suelen estar interesadas en un índice agregado. Es el caso de

muchos organismo oficiales que registran el comportamiento de los consumidores. El Dane recopila el índice de precio al consumo, donde se miden los precios relativos de la canasta familiar típica de productos y servicios consumida por el público en general. Para calcular el índice agregado se suman los precios de los productos y/o servicios individuales en el año de referencia y el resultado se divide por la suma equivalente de los precios del año base. El resultado se multiplica por 100.

$$IP_R = \frac{\sum P_R}{\sum P_B} 100$$

EJEMPLO 5

En la tabla 7.14 se dan los precios promedios por libras de 3 artículos vendidos por un supermercado de la ciudad. A partir de esta información calcular usando como año base 1995:

1. Los índices de precio para cada producto.
2. Calcular el índice de precio agregado para los 3 productos

CUADRO 7.14
PRECIO PROMEDIO

PERIODO 1995 - 2000

AÑO	PESCADO \$/LIBRA	POLLO \$/LIBRA	CARNE \$/LIBRA
1995	2000	1000	2500
1996	2300	1200	2700
1997	2500	1700	3000
1998	2800	2000	3200
1999	3200	2500	3500
2000	3500	2800	3700

DESARROLLO

CUADRO 7.14
INDICES SIMPLE DE PRECIOS E INDICE DE PRECIOS AGREGADO
PERIODO 1995 - 2000

AÑO	PESCADO \$/KG	ÍNDICE PB 1995	POLLO \$/KG	ÍNDICE PB 1995	CARNE \$/KG	ÍNDICE PB 1995	$\sum P_R$	IP agregado
1995	2000	100	1000	100	2500	100	5500	100

1996	2300	115	1200	120	2700	108	6200	113
1997	2500	125	1700	170	3000	120	7200	131
1998	2800	140	2000	200	3200	128	8000	145
1999	3200	160	2500	250	3500	140	9200	167
2000	3500	175	2800	280	3700	148	10000	182

1. Con los datos suministrados se calcularon los índices de precios simples para el pescado, el pollo y la carne usando como base el año 1995 usando las formulas básicas . el resultado se puede ver en el cuadro 7.14
- 2 Para los índices agregado se utilizó la formula suministrada. Los resultados se muestran en el cuadro 7.14

$$IP_{1995} = \frac{\sum P_{1995}}{\sum P_{1995}} 100 = \frac{2000 + 1000 + 2500}{2000 + 1000 + 2500} 100 = \frac{5500}{5500} 100 = 100$$

$$IP_{1996} = \frac{\sum P_{1996}}{\sum P_{1995}} 100 = \frac{2300 + 1200 + 2700}{2000 + 1000 + 2500} 100 = \frac{6200}{5500} 100 = 113$$

$$IP_{1997} = \frac{\sum P_{1997}}{\sum P_{1995}} 100 = \frac{2500 + 1700 + 3000}{2000 + 1000 + 2500} 100 = \frac{7200}{5500} 100 = 131$$

$$IP_{1998} = \frac{\sum P_{1998}}{\sum P_{1995}} 100 = \frac{2800 + 2000 + 3200}{2000 + 1000 + 2500} 100 = \frac{8000}{5500} 100 = 145$$

$$IP_{1999} = \frac{\sum P_{1999}}{\sum P_{1995}} 100 = \frac{3200 + 2500 + 3500}{2000 + 1000 + 2500} 100 = \frac{9200}{5500} 100 = 167$$

$$IP_{1995} = \frac{\sum P_{2000}}{\sum P_{1995}} 100 = \frac{3500 + 2800 + 3700}{2000 + 1000 + 2500} 100 = \frac{10000}{5500} 100 = 182$$

7.2.3 ÍNDICES DE PRECIOS AGREGADOS PONDERADOS

Un numero índice compuesto , muestra los cambios de un conjunto de variables , aunque sus unidades de medidas , cantidades y precios en el tiempo , sean diferente entre si. Por ejemplo cuando hablamos de los índices indicadores del costo de la canasta familiar , se toman en cuenta muchos artículos cuyos consumos inciden en el costo de vida, con una ponderación o importancia diferente en cada caso. Colectivamente no es lo mismo un cambio en el precio de la carne , el pescado o el

pollo que un cambio en el precio de los artículos suntuarios como los perfumes , joyas , paseos ,etc.

7.2.3.1 ÍNDICE DE LASPEYRES

Este índice asume como ponderaciones en el calculo del índice compuesto, las cantidades de los artículos en el periodo base . Se utiliza la siguiente fórmula

$$L = \frac{\sum P_R Q_B}{\sum P_B Q_B} 100$$

Como se emplean siempre las cantidades del periodo base, en el calculo; el índice de Laspeyres es muy usado, ya que se pueden hacer comparaciones mas expresivas a lo largo del tiempo, dado que los cambios se pueden atribuir a las variaciones de los precios. Su desventaja consiste en que refleja los cambios en los hábitos de compra ya que utiliza datos de cantidades de cada periodo de referencia. .Es mas utilizado que el índice de Paache.

7.2.3.2 ÍNDICE DE PAASCHE

Este índice de precios agregados ponderados utiliza como factores de peso las cantidades vendidas en el periodo de referencia. Para su calculo se utiliza la siguiente formula

$$P = \frac{\sum P_R Q_R}{\sum P_B Q_R} 100$$

El índice de Paasche pondera en exceso los bienes cuyos precios aumentan pero reflejan los cambios de estructura de las compras en el tiempo. Tiene como inconveniente que exige datos de cantidades de cada año , que a veces son difíciles de obtener . además como se emplean cantidades diferentes de un año a otro , es imposible atribuir las diferencias del índice únicamente a las variaciones de precios. Pondera en exceso los bienes cuyos precios disminuyen

7.2.3.3 ÍNDICE IDEAL DE FISHER

Este índice combina los índices de Laspeyres y de Paasche . Se calcula utilizando la siguiente formula. Cabe anotar que este índice es muy poco usado dadas las discrepancias en su interpretación.

$$IF = \sqrt{L * P}$$

EJEMPLO 6

Para los datos de la tabla adjunta, calcular tomando como año base 1998, :

1. El índice de laspeyres
2. el índice de Paasche
3. El índice ideal de Fisher

CUADRO 7.15
PRECIOS Y CANTIDADES DEL PESCADO, POLLO Y CARNE DE RES
HIPERMERCADO CARNES & CARNES
PERIODO 1998 - 2000

PRODUCTO		PRECIO \$/LIBRA			CANTIDAD VENDIDA EN MILES DE LIBRAS		
	Año	1998	1999	2000	1998	1999	2000
Pescado		2800	3200	3500	500	700	800
Pollo		2000	2500	2800	400	600	900
Carne de res		3200	3500	3700	600	900	1000

DESARROLLO

Con los datos suministrados se calcularon los índices de Laspeyres para cada año utilizando las formulas básicas , los cuales se encuentran consignados en el cuadro 7.16. Analizando esta información podemos decir que índice creció en un 14 y 30% para los años de 1999 y 2000 tomando como año base 1998. Probablemente este incremento se debe al incremento en el precio de los productos. Ya que las cantidades base son las mismas.

CUADRO 7.16
PRECIOS Y CANTIDADES DEL PESCADO, POLLO Y CARNE DE RES
HIPERMERCADO CARNES & CARNES
PERIODO 1998 - 2000
ÍNDICE DE LASPEYRES

Producto	Precio \$/libra			Cantidad Lbsx1000	$P_R Q_B$		
	1998	1999	2000		$P_{1998} Q_{1998}$	$P_{1999} Q_{1998}$	$P_{2000} Q_{1998}$
Pescado	2800	3200	3500	500	1400.000	1600.000	1750.000
Pollo	2000	2500	3500	400	800.000	1000.000	1400.000
Carne de res	3200	3500	3700	600	1920.000	2100.000	2220.000
Índice de laspeyres L_R	100	114	130	SUMATORIA	4120.000	4700.000	5370.000

$$L_{1998} = \frac{\sum P_{1998} Q_{1998}}{\sum P_{1998} Q_{1998}} 100 = \frac{4120.000}{4120.000} 100 = 100$$

$$L_{1999} = \frac{\sum P_{1999} Q_{1998}}{\sum P_{1998} Q_{1998}} 100 = \frac{4700.000}{4120.000} 100 = 114$$

$$L_{2000} = \frac{\sum P_{2000} Q_{1998}}{\sum P_{1998} Q_{1998}} 100 = \frac{5370.000}{4120.000} 100 = 130$$

En el cuadro 7.17 se encuentran los datos utilizados en el calculo del índice de Paasche. En su análisis podemos decir que tuvo un incremento del 14 y 25 % para los años 1999 y 2000 respectivamente, tomando como base el año 1998. Cabe anotar que aquí no podemos asegurar que el incremento se debió solo al precio sino que también influyó las cantidades compradas ya que estas variaron cada año

CUADRO 7.17
PRECIOS Y CANTIDADES DEL PESCADO, POLLO Y CARNE DE RES
HIPERMERCADO CARNES & CARNES
PERIODO 1998 – 2000
ÍNDICE DE PAASCHE

Producto	1998		1999		2000	
	P	Q	P	Q	P	Q
Pescado	2800	500	3200	700	3500	800
Pollo	2000	400	2500	600	2800	900
Carne de res	3200	600	3500	800	3700	1000
Índice de Paasche	100		114		125	
	$P_{1998} Q_{1998}$		$P_{1999} Q_{1999}$	$P_{1998} Q_{1999}$	$P_{2000} Q_{2000}$	$P_{1998} Q_{2000}$
	1400.000		2240.000	1960.000	2800.000	2240.000
	800.000		1500.000	1200.000	2520.000	1800.000
	1920.000		2800.000	2560.000	3700.000	3200.000
SUMATORIA	4120.000		6540.000	5720.000	9020.000	7240.000

$$P_{1998} = \frac{\sum P_{1998} Q_{1998}}{\sum P_{1998} Q_{1998}} 100 = \frac{4120.000}{4120.000} 100 = 100$$

$$P_{1999} = \frac{\sum P_{1999} Q_{1999}}{\sum P_{1998} Q_{1999}} 100 = \frac{6540.000}{5720.000} 100 = 114$$

$$P_{2000} = \frac{\sum P_{2000} Q_{2000}}{\sum P_{1998} Q_{2000}} 100 = \frac{9020.000}{7240.000} 100 = 125$$

$$IF_{1998} = \sqrt{L_{1998} * P_{1998}} = \sqrt{100 * 100} = 100$$

$$IF_{1999} = \sqrt{L_{1999} * P_{1999}} = \sqrt{114 * 114} = 114$$

$$IF_{2000} = \sqrt{L_{2000} * P_{2000}} = \sqrt{130 * 125} = 127$$

7.3 CAMBIO DE LA BASE DE UN NUMERO ÍNDICE.

A veces se desea correr la base de un índice de un periodo a otro, con el objetivo de tener como año base un periodo mas reciente o poder comparar dos series de base diferentes. El procedimiento consiste , dada una serie de números índices utilizando la antigua base , solo se requiere que cada numero de la serie sea dividido entre el numero índice del nuevo periodo base y el resultado multiplicarlo por 100 . Ver cuadro 7.18

También se puede utilizar como periodo base la media aritmética o la media ponderada de 2 o mas años (Año Base1998 –2000 = (100+109.2+118.8+127)/4 = 113.98) Ver cuadro 7.18

CUADRO 7.18
COLOMBIA, CAMBIO DE BASE DEL IPC
DEL AÑO 1998 A EL AÑO 2000

Año	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
IPC BASE1998 =100	21,0	26,6	33,3	40,9	50,1	59,9	72,8	85,7	100,0	109,2	118,8	127,9
	17.67	22.39	28.03	34.42	42.17	50.42	61.28	72.13	84.17	91.92	100.0	107.66

IPC ($IPC_R/118.8$)(100) BASE2000=118.8												
IPC BASE 1998-2001 = 113.98	18.42	23.33	29.22	35.88	43.96	52.55	63.87	75.19	87.73	95.8	104.23	112.21

Fuente : Dane

7.4 OTROS INDICES

Los números índices administrativos y económicos son considerados como barómetros de la actividad financiera y económica y sirven para indicar periodos de inflación, recesión, ciclos comerciales y estancamientos . Entre los índices mas utilizados se encuentran el índice de precio al consumidor (IPC) , el promedio industrial Dow Jones , el índice de precio al productor (IPP)

7.4.1 ÍNDICE DE PRECIO AL CONSUMIDOR

Comúnmente conocido como el índice del costo de vida.; mide en realidad los cambios de precios de la canasta típica familiar de aproximadamente 405 artículos, incluyendo entre otros , el costo de los alimentos, vestidos , alojamientos, transporte , servicios médicos y similares.

Los artículos no se deben representar como una muestra aleatoria sino que se deben seleccionar cuidadosamente por los expertos como si fueran típicos de las familias en los grupos mencionados.

El IPC se expresa como promedios anuales y mensuales (ver cuadros 7.19. y 7.20)

En Colombia entre marzo de 1994 y febrero de 1995, se realizó la Encuesta de Ingresos y Gastos en 28.000 hogares de las 23 capitales de los antiguos departamentos, para determinar cambios en los hábitos de consumo y la estructura del gasto de la población colombiana. Con los resultados de esta encuesta, bajo el trabajo de un grupo interdisciplinario de especialistas y la asesoría de la entidad estadística del Canadá, se desarrollo una nueva metodología para calcular el IPC, que es aplicada a partir de enero. Se creó una nueva canasta con una estructura de dos niveles, uno fijo y uno flexible, que permite actualizar la canasta de bienes y servicios, por cambios en el consumo final en un periodo relativamente corto (lo cual no era posible en la anterior canasta). Además la nueva canasta quedó conformada por 405 artículos (la anterior poseía 195), amplió la cobertura socioeconómica a toda la población del índice e igualmente mejoró la fórmula de cálculo.

El IPC se puede utilizar para medir el poder adquisitivo del consumidor o el de la moneda; también se usa para medir el ingreso real , que es el ingreso ajustado para cambios en los precios .

Al dividir el salario neto entre el valor corriente del IPC en cualquier año, se revelara el ingreso real para ese año . En otra palabras se calcula así:

$$SR = \frac{SN}{IPC} 100$$

SR = SALARIO REAL

SN= SALARIO NOMINAL
IPC = ÍNDICE DE PRECIO DEL CONSUMIDOR.

El IPC es de gran utilidad para medir la inflación , es decir , los cambios reales de los valores monetarios , al eliminar el efecto de las variaciones de los precios y en un grado limitado sirve como índice del costo de vida. De igual forma es de gran utilidad para determinar los aumentos de beneficios de la seguridad social y para la negociación de salarios en los convenios colectivos. Dados que los movimientos del IPC ejercen un efecto importante en muchas situaciones empresariales y en múltiples consideraciones económicas y teniendo en cuenta que se le considera con frecuencia como una medida de la inflación en la economía; los índices de inflación anuales se miden como el cambio porcentual del IPC de un año al siguiente y se calcula así:

$$INFLACION = \frac{IPC_T - IPC_{T-1}}{IPC_{T-1}} 100$$

Donde :

IPC_T = IPC DEL PERIODO T

IPC_{T-1} = IPC DEL PERIODO ANTERIOR.

Las variaciones del IPC también se consideran como una medida del costo de vida, a pesar de que esta práctica es cuestionable, ya que el IPC no refleja determinados costos o gastos , como los impuestos , ni tiene en cuenta los cambios de calidad de los bienes disponibles. Además no mide el incremento del tiempo de ocio del trabajador o las mejoras en la variedad de bienes entre los cuales pueden elegir los consumidores; sin embargo , a pesar de todo el IPC se suele mencionar en la prensa popular como medida del costo de vida..

El IPC se puede utilizar también para deflacionar una serie temporal . Deflacionar una serie consiste en eliminar el efecto de las variaciones de precio y expresar la serie en pesos constantes. Los economistas suelen distinguir entre pesos nominales(actuales o corrientes) y los pesos reales o constantes. Si una serie temporal , como puede ser su salario anual de varios años , . Para tener una medida de lo que sus ingresos ha aumentado en realidad es preciso dividir su salario nominal por el IPC y multiplicarlo por 100. El resultado es su salario o ingreso real expresada en pesos constantes o reales de un año base determinado. (ver cuadro 7.19.

La aplicación estadística del cuadro 7.19 demuestra como el IPC puede ser importante para los que se ganan la vida con su trabajo.

El poder de compra de su dólar o su moneda local es de **100/IPC**. La renta real o ingreso real es el poder de compra de renta monetaria o ingreso nominal.. Obsérvese como el poder adquisitivo del peso ha ido disminuyendo drásticamente con el paso del tiempo , de \$ 4.76 en 1990 a \$ 0.78 en el 2001 por cada peso de 1998 .

Los economistas suelen deflacionar el producto nacional bruto (PNB) para obtener una medida del aumento de la producción real del país . El PNB es el valor monetario de todos los bienes y servicios de todos los bienes finales producidos por nuestra economía Al deflacionar el PNB en el tiempo, los economistas eliminan el incremento

debido a la inflación de los precios y llegan a una medida del incremento real de la producción de bienes y servicios disponibles para el consumo.

El PNB real mide el valor de la producción de todo el país en moneda constante de un periodo base. No tiene en cuenta las fluctuaciones debidas a las variaciones de precios.

Se calcula así:

$$PNB_{REAL} = \frac{PNB_{NOMINAL}}{IPC} 100$$

CUADRO 7.19
CALCULO DEL PODER ADQUISITIVO
DEL PESO COLOMBIANO
UTILIZANDO COMO BASE EL AÑO 1998

Año	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
IPC*	21,0	26,6	33,3	40,9	50,1	59,9	72,8	85,7	100,0	109,2	118,8	127,9
Poder adquisitivo (1/IPC)(100)	4.76	3.76	3.00	2.44	1.97	1.68	1.37	1.17	1.00	0.92	0.84	0.78
Salario neto en miles \$	100.	120.	144.	200.	250.	350.	500.	700.	900.	1200	1500	1800
Ingreso real en miles de pesos (SN/IPC)(100)	476.2	451.1	432.4	489.0	499.0	584.3	686.8	816.8	900.	1098.9	1262.6	1407.3

*Fuente: DANE - IPC

CUADRO 7.20
COLOMBIA INDICES DE PRECIOS AL CONSUMIDOR (IPC)
INDICES SERIE DE EMPALME
AÑO BASE 1998
1990 - 2002

Año	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
Enero	16,4	21,6	27,6	34,4	42,2	51,0	61,4	74,0	87,2	102,2	110,6	120,0	128,9
Febrero	17,0	22,4	28,5	35,5	43,7	52,8	63,8	76,3	90,1	103,9	113,2	122,3	130,5
Marzo	17,5	22,9	29,2	36,2	44,7	54,2	65,2	77,5	92,4	104,9	115,1	124,1	131,4
Abril	18,0	23,6	30,0	36,9	45,7	55,4	66,5	78,8	95,1	105,7	116,3	125,5	132,6
Mayo	18,3	24,1	30,7	37,5	46,5	56,3	67,5	80,1	96,6	106,3	116,9	126,1	133,4
Junio	18,7	24,5	31,4	38,1	46,9	57,0	68,3	81,0	97,8	106,6	116,9	126,1	134,0
Julio	18,9	24,9	32,0	38,5	47,3	57,5	69,3	81,7	98,3	106,9	116,8	126,3	134,0
Agosto	19,2	25,2	32,2	39,0	47,8	57,8	70,1	82,6	98,3	107,4	117,2	126,6	134,2
Septiembre	19,7	25,6	32,5	39,5	48,3	58,3	70,9	83,7	98,6	107,8	117,7	127,1	134,6
Octubre	20,1	26,0	32,8	39,9	48,8	58,8	71,7	84,5	98,9	108,1	117,9	127,3	
Noviembre	20,5	26,3	33,0	40,4	49,4	59,3	72,3	85,2	99,1	108,7	118,2	127,4	

Diciembre	21,0	26,6	33,3	40,9	50,1	59,9	72,8	85,7	100,0	109,2	118,8	127,9	

Entre marzo de 1994 y febrero de 1995, se realizó la Encuesta de Ingresos y Gastos en 28.000 hogares de las 23 capitales de los antiguos departamentos, para determinar cambios en los hábitos de consumo y la estructura del gasto de la población colombiana. Con los resultados de esta encuesta, bajo el trabajo de un grupo interdisciplinario de especialistas y la asesoría de la entidad estadística del Canadá, se desarrolló una nueva metodología para calcular el IPC, que es aplicada a partir de enero. Se creó una nueva canasta con una estructura de dos niveles, uno fijo y uno flexible, que permite actualizar la canasta de bienes y servicios, por cambios en el consumo final en un periodo relativamente corto (lo cual no era posible en la anterior canasta). Además la nueva canasta quedó conformada por 405 artículos (la anterior poseía 195), amplió la cobertura socioeconómica a toda la población del índice e igualmente mejoró la fórmula de cálculo.

Fuente: DANE - IPC

CUADRO 7.21
COLOMBIA VARIACIÓN MENSUAL
DEL INDICES DE PRECIOS AL CONSUMIDOR (IPC)
SEGÚN CIUDADES
2002

Mes	enero	feb	marzo	Abril	mayo	junio	julio	Agosto	sept	Año corrido
Total IPC	0,80	1,26	0,71	0,92	0,60	0,43	0,02	0,09	0,36	5,30
Medellín	1,15	1,10	0,98	0,65	0,38	0,52	-0,28	0,08	0,26	4,93
Barranquilla	0,58	1,10	0,88	1,20	0,29	0,26	0,15	0,48	0,20	5,25
Bogota D.C.	0,73	1,20	0,72	1,06	0,77	0,37	0,00	-0,05	0,28	5,19
Cartagena	0,62	1,50	0,73	0,95	0,81	0,89	0,58	0,07	-0,05	6,23
Manizales	0,95	1,05	0,52	0,85	0,39	0,44	0,22	0,09	0,44	5,06
Montería	1,43	1,01	0,97	1,03	0,26	0,50	-0,01	0,02	-0,02	5,31
Neiva	0,75	1,34	0,61	0,76	0,68	0,29	-0,22	0,52	0,35	5,19
Villavicencio	0,80	1,49	0,44	1,53	0,62	0,45	-0,11	-0,13	0,37	5,58
Pasto	0,66	0,76	0,09	0,53	0,67	0,47	0,89	0,66	1,18	6,07
Cúcuta	0,80	0,60	0,41	1,32	0,48	0,33	-0,18	0,40	0,40	4,64
Pereira	0,76	1,22	0,32	1,06	0,21	0,51	0,23	0,10	0,30	4,81
Bucaramanga	0,90	1,60	0,55	0,72	0,45	0,34	0,05	0,24	0,42	5,39
Cali	0,72	1,68	0,69	0,54	0,55	0,52	0,07	0,26	0,75	5,93

Fuente: DANE - IPC

CUADRO 7.22
COLOMBIA VARIACIÓN MENSUAL
DEL INDICES DE PRECIOS AL CONSUMIDOR (IPC)
POR GRUPOS DE BIENES Y SERVICIOS
2000

Mes	enero	feb	marzo	Abril	mayo	junio	julio	Agosto	sept	Año corrido
Total IPC	0,80	1,26	0,71	0,92	0,60	0,43	0,02	0,09	0,36	5,30
Alimentos	1,48	1,85	0,46	1,32	1,54	0,78	-0,46	-0,06	0,69	7,85
Vivienda	0,21	0,23	0,64	0,56	0,22	0,57	0,23	0,30	0,19	3,19
Vestuario	0,19	-0,09	0,21	-0,06	-0,08	0,23	0,17	-0,07	-0,01	0,49
Salud	0,57	1,03	1,83	1,26	0,81	0,76	0,40	0,20	0,35	7,44
Educación	0,03	3,92	1,45	0,01	0,03	0,01	0,03	-0,12	0,91	6,38
Esparcimiento	1,99	1,36	0,66	0,51	-0,18	0,08	-0,13	-0,04	0,29	4,61
Transporte	0,65	1,43	0,60	1,16	0,07	-0,25	0,24	0,16	-0,03	4,09
Otros gastos	1,07	1,51	1,31	1,37	0,48	0,36	0,44	0,14	0,39	7,28

Fuente: DANE - IPC

CUADRO 7.23
COLOMBIA, ÍNDICE DE PRECIOS AL CONSUMIDOR
TOTAL NACIONAL - INGRESOS MEDIOS (EMPLEADOS)
PORCENTAJE DE AJUSTE AÑO GRAVABLE – PAAG¹-

La siguiente Información obtenida del Índice de Precios al Consumidor, base diciembre 1998 =100

Año/Mes		INDICE	VARIACION MENSUAL	ACUMULADA
2001	NOVIEMBRE	118,0043	0,31	
	DICIEMBRE	118,5420	0,46	0,46
	ENERO	119,6869	0,97	1,43
	FEBRERO	121,9072	1,86	3,31
	MARZO	123,7133	1,48	4,84
	ABRIL	125,1489	1,16	6,05
	MAYO	125,7258	0,46	6,54
	JUNIO	125,8263	0,08	6,63
	JULIO	125,9654	0,11	6,75
	AGOSTO	126,3120	0,28	7,04
	SEPTIEMBRE	126,8136	0,40	7,47
	OCTUBRE	127,0636	0,20	7,68
	NOVIEMBRE	127,1569	0,07	7,76

PAAG¹: Corresponde al índice de ajuste por inflación para efectos contables, establecido por el Decreto Número 2912 de 1.991. Equivale al porcentaje de ajuste del año gravable el cual será equivalente a la variación porcentual del índice de precios al consumidor para ingresos medios, elaborado por el DANE.

7.4.2 ÍNDICE DOW JONES **

El índice Dow Jones es un promedio estadístico que monitorea el movimiento de las 30 compañías más representativas de los Estados Unidos y cuyo objeto es el de proveer un parámetro del movimiento total de la bolsa (NYSE).

En la práctica es la suma del precio unitario por acción de todas las empresas que lo componen dividido por un factor que a partir del 31 de diciembre de 1999 se ajustó a 0.20145268.

Este índice fue creado en 1884 por Charles Dow. En sus inicios estaba conformado por 11 empresas: 9 del sector ferroviario y 2 industriales. El Dow Jones vio por primera vez la luz el 26 de mayo de 1896 y su precio de cierre fue de 40.94 puntos. En 1928 se expande a 30 compañías. Todas grandes y prestigiosas corporaciones de diversos sectores industriales, seleccionadas por los editores del Wall Street Journal. De la lista original de las empresas que conformaron el índice, únicamente queda la General Electric. Desde el 7 de octubre de 1986 se empieza a reportar el valor del índice Dow Jones pública y regularmente, de ahí su popularidad e influencia.

En noviembre de 1999 ocurrió la última modificación al listado de empresas que lo conforman: Salomon, Chevron, Goodyear, Union Carbide y Sears para dar paso a Microsoft, Home Depot, SBC Telecommunications e Intel.

Algunas de las empresas más representativas son las siguientes: Caterpillar, Dupont, Disney, General Motors, Hewlett Packard, IBM, Johnson & Johnson, Coca Cola, McDonald, Citigroup, Philip Morris, Merck, AT&T, WalMart y Exxon Mobil entre otras.

Se afirma que cuando el índice cae por debajo de los 10.000 puntos se encuentra en territorio bajista y es representado por la figura de un oso. Cuando el índice se encuentra en niveles altos se ilustra con la figura de un toro.

En lo que va corrido del 2002 el índice Dow Jones acumula una caída del 20% - En el 2001 había registrado un descenso de 7.1 % y en el 2000 había caído 6.2 %.

7.5.3 ÍNDICE DE PRECIOS AL PRODUCTOR (IPP)

El IPP mide las variaciones de precios de los bienes en mercados primarios de materias primas, utilizadas en fabricación. Abarca aproximadamente 3000 bienes que compran los productores. Es similar al índice de Laspeyres. Ver cuadro 7.25

CUADRO 7.25
COLOMBIA INDICES DE PRECIOS AL PRODUCTOR (IPP)
VARIACIONES MENSUALES

1990 - 2002													
Año	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
Enero	3,84	4,85	3,33	3,52	2,76	1,02	3,02	1,37	2,29	2,83	1,40	1,79	0,43
Febrero	2,99	1,67	1,96	1,28	2,82	2,56	2,31	1,88	4,13	1,19	1,87	1,78	0,30
Marzo	2,59	2,16	1,43	1,08	2,36	2,65	1,66	3,27	1,07	-0,25	1,35	0,96	0,55
Abril	1,78	2,57	1,79	1,52	1,58	2,39	0,91	1,71	1,70	0,29	1,62	1,44	0,37
Mayo	2,31	1,42	2,56	0,65	1,05	1,34	1,30	1,30	1,72	0,12	0,51	0,82	0,69
Junio	1,30	1,79	1,76	0,52	0,25	1,50	0,14	2,09	0,78	0,64	0,64	-	0,36

* Tomado del Boletín informativo para clientes del Banco de Occidente "Alcorriente" de septiembre de 2002

Julio	1,40	1,27	1,80	0,79	2,18	0,37	1,02	-0,40	0,77	1,72	1,05	0,06	0,93
Agosto	2,17	1,50	-0,07	0,43	1,63	0,31	0,50	0,32	-0,54	1,57	0,52	0,30	1,22
Septiembre	3,10	1,05	0,56	0,83	0,75	0,24	0,61	1,30	0,03	1,47	0,79	0,09	
Octubre	2,05	1,24	0,73	0,50	1,57	0,22	1,16	2,09	0,49	0,92	0,03	0,42	
Noviembre	1,49	1,00	0,59	0,71	1,10	1,20	0,77	0,89	0,20	0,93	0,11	0,12	
Diciembre	1,45	0,48	0,19	0,67	0,98	0,68	0,29	0,47	0,16	0,62	0,64	0,29	
Año corrido	29,90	23,10	17,84	13,19	20,73	15,40	14,50	17,50	13,50	12,71	11,04	6,93	4,95

Fuente : Subgerencia de Estudios Económicos Banco de la República

TALLER MODULO 7

- Suponga que le acaban de contratar como especialista de mercadeo de una empresa empacadora de camarones . Su jefe quiere que le explique como puede utilizar los números índices para ayudar a tomar decisiones de mercadeo . ¿ Que le respondería? ¿ que es un numero índice? ¿ Cual es la diferencia entre un numero índice simple , un índice agregado y un índice agregado ponderado?
- Un compañía espera que sus ventas de un producto crezcan un 50% el próximo año. En que % debe aumentar su precio de venta para doblar los ingresos?
- En el 2000 el precio de un producto creció un 50% sobre el precio de 1998 y su producción decreció un 30%. En el 2000 en que porcentaje creció o decreció el valor total de ese producto con respecto a su valor en 1998.
- Calcular el salario real mensual para todos los países suramericanos de los últimos 3 años. . tome como periodo base diciembre de 1998
- Calcule el poder adquisitivo de los para la ultima década de los principales pises de América.
- Con los datos suministrados que se muestran en la tabla adjunta:

PRECIO PROMEDIO

PERIODO 1995 - 2000

AÑO	CAFE \$/LIBRA	AZUCAR \$/LIBRA	CHOCOLATE \$/LIBRA
1998	2300	1000	2000
1999	2800	1200	2200
2000	3000	1500	2500

- Calcular e interpretar el índice simple precio de cada producto con el año 1998 como periodo base.
 - El porcentaje de incremento del precio de cada producto de 1998 a 1999, 1998 a 2000 y 1999 a 2000
 - El incremento puntual en porcentaje de cada producto de 1998 a 1999, 1998 a 2000 y 1999 a 2000
6. Para los datos de la tabla adjunta, calcular tomando como año base 1999, :
- El índice de laspeyres
 - el índice de Paasche
 - El índice ideal de Fisher

TABLA
PRECIOS Y CANTIDADES DEL PESCADO, POLLO Y CARNE DE RES
HIPERMERCADO CARNES & CARNES
PERIODO 1999 - 2001

PRODUCTO		PRECIO \$/LIBRA			CANTIDAD VENDIDA EN MILES DE LIBRAS		
	Año	1999	2000	2001	1999	2000	2001
Pescado		3000	3200	3500	600	800	900
Pollo		2200	2500	2800	500	600	900
Carne de res		3300	3500	3700	700	900	1000

7. Averigüe sobre los índices bursátiles mas importantes del mundo.

BASES DE DATOS:

1. Political Database of the Americas ... the Western Hemisphere. Base de datos con información política de los 25 países de la hemisferia del oeste.

<http://www.georgetown.edu/pdba/>

<http://www.georgetown.edu/pdba/spanish.html>

<http://www.georgetown.edu/pdba/Elecdata/Col/colombia.html>

2.FAOSTAT es una base de datos estadísticos integrada on-line que actualmente contiene más de 1 millón de series anuales internacionales en las siguientes materias: <http://apps.fao.org/inicio.htm>

3. DEPARTAMENTO ADMINISTRATIVO NACIONAL DE ESTADISTICA.

<http://www.dane.gov.co/Enlaces/enlaces.html>

<http://www.dane.gov.co/index.html>

[http://www.dane.gov.co/Enlaces/Organismos Estadisticos/America/america.html](http://www.dane.gov.co/Enlaces/Organismos_Estadisticos/America/america.html)

[http://www.dane.gov.co/Enlaces/Organismos Estadisticos/Europa/europa.html](http://www.dane.gov.co/Enlaces/Organismos_Estadisticos/Europa/europa.html)

[http://www.dane.gov.co/Enlaces/Organismos Estadisticos/Asia/asia.html](http://www.dane.gov.co/Enlaces/Organismos_Estadisticos/Asia/asia.html)

[http://www.dane.gov.co/Enlaces/Organismos Estadisticos/Africa/africa.html](http://www.dane.gov.co/Enlaces/Organismos_Estadisticos/Africa/africa.html)

4.. PROEXPORT COLOMBIA promueve las exportaciones colombianas. Apoya y asesora empresarios colombianos ... 091)5242015. Proexport. Quienes Somos Sobre ...

www.proexport.com.co/

<http://www.proexport.com.co/VBeContent/home.asp?Perfil=1>

5. DEPARTAMENTO NACIONAL DE PLANEACION

http://www.dnp.gov.co/03_PROD/PUBLIC/13P_MS.HTM

http://www.dnp.gov.co/03_PROD/BASES/BASES.HTM

6 BANCO DE LA REPUBLICA

<http://www.banrep.gov.co/>

http://www.banrep.gov.co/economia/ctanal1sec_ext.htm#tasa

7. ICFES El Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior **ICFES**
<http://www.icfes.gov.co/>

**SUGERENCIA: Trate Inicialmente de resolver los ejercicios manualmente y chequee los resultados de la mayor parte de los ejercicios utilizando cualquier software estadístico, (SPSS 11, Excel , etc)

Copyright © ;Ing. Enrique A Hurtado Minotta, all rights reserved

REVISTAS ELECTRONICAS

- 55. [Journal of Statistics Education](#). Excelente revista (¡gratuita!) editada por la American Statistical Association sobre educación estadística (a todos los niveles)
- 56. [Homepage de la American Statistical Association](#). La mayor asociación de estadísticos, editora de *Journal of Agricultural, Biological, and Environmental Statistics*, *Journal of the American Statistical Association*, *Journal of Statistics Education* y *The American Statistician* entre otras revistas.
- 57. [Environmental and Ecological Statistics](#)
- 58. [Community Ecology](#)
- 59. [Journal of Agricultural, Biological, and Environmental Statistics](#)
- 60. [Bulletin of the Ecological Society of America](#) (gratuita; contiene artículos de ecología estadística)
- 61. [Journal of Statistical Software](#) (gratuita)
- 62. [InterStat \(Statistics on the Internet\)](#) (gratuita)
- 63. [Probability and Statistics Journals on the Web](#)

ESTADISTICA ON LINE

- 325. [Aula Virtual de Bioestadística, Universidad Complutense](#)
- 326. [Curso de bioestadística de la Universidad de Málaga](#)
- 327. [Apuntes de Bioestadística. Unidad de Bioestadística Clínica del Hospital Ramón y Cajal](#)
- 328. [Lecciones de Estadística, 5campus.org \(análisis multivariante...\)](#)
- 329. [Curso de Bioestadística de la Universidad Nacional de Misiones \(Argentina\)](#)
- 330. [Curso de estadística \(para ingenieros\) de una universidad mexicana](#)
- 331. [Cursos de estadística de la Universidad de California, Los Angeles](#)
- 332. [Cursos de estadística de la Universidad de Michigan](#)
- 333. [Electronic Statistics Textbook](#)
- 334. [A New View of Statistics](#)

- 335. [HyperStat Statistics Textbook](#)
- 336. [Statistics at Square One](#)
- 337. [Statistics Every Writer Should Know](#)
- 338. [Introductory Statistics: Concepts, Models, and Applications](#)
- 339. [Multivariate Statistics: Concepts, Models, and Applications](#)
- 340. [A complete guide to nonlinear regression](#)
- 341. [Ordination Methods for Ecologists](#)
- 342. [Annotated Bibliography of Canonical Correspondence Analysis and related
constrained ordination methods 1986-1993](#)
- 343. [Multivariate Statistics: an Introduction](#)
- 344. [A glossary of ordination-related terms](#)
- 345. [Glossary of Statistical Terms and Medical Citations for Statistical Issues](#)
- 346. [Glossary of over 30 statistical terms](#)
- 347. [EVSC 503 Applied Statistics for the Environmental Sciences](#)
- 348. <http://s9000.furman.edu/mellonj/spss1.htm>
- 349. <http://www.indiana.edu/~statmath/stat/spss/win/index.html>
- 350. <http://www.utexas.edu/cc/stat/tutorials/spss/SPSS1/Outline1.html>
- 351. <http://web.uccs.edu/lbecker/SPSS/content.htm>
- 352. <http://core.ecu.edu/psyc/wuenschk/SPSS/SPSS-Data.htm>
- 353. <http://www.tulane.edu/~panda2/Analysis2/ahome.html>
- 354. <http://www.shef.ac.uk/~scharr/spss/index2.htm>
- 355. <http://calcnet.mth.cmich.edu/org/spss/index.html>
- 356. <http://calcnet.mth.cmich.edu/org/spss/toc.htm>
- 357. <http://www.public.asu.edu/~pythagor/spssworkbook.htm>
- 358. <http://lib.stat.cmu.edu/>
- 359. <http://www.stat.ufl.edu/vlib/statistics.html>
- 360. <http://www.statserv.com/software.html>
- 361. <http://www.maths.uq.edu.au/~gks/webguide/>
- 362. <http://www.statistics.com/>
- 363. <http://www.helsinki.fi/~jpuranen/links.html#stc>
- 364. <http://www.maths.uq.edu.au/~gks/webguide/free.html>
- 365. <http://nhsbig.inhs.uiuc.edu/>
- 366. <http://www.okstate.edu/artsci/botany/ordinate/software.htm>
- 367. <http://life.bio.sunysb.edu/ee/biometry/>
- 368. <http://life.bio.sunysb.edu/morph/software.html>

369. <http://pbil.univ-lyon1.fr/ADE-4/ADE-4.html>
370. http://ourworld.compuserve.com/homepages/Rainer_Wuerlaender/statsoft.htm
371. <http://www.stat.auckland.ac.nz/~mja/Programs.htm>
372. <http://it.stlawu.edu/~rlock/maa99/>
373. <http://it.stlawu.edu/~rlock/tise98/java.html>
374. <http://www.stat.vt.edu/~sundar/java/applets/>
375. <http://www.kuleuven.ac.be/ucs/java/index.htm>
376. <http://noppa5.pc.helsinki.fi/koe/>
377. <http://www2.kenyon.edu/people/hartlaub/MellonProject/mellon.html>

Demostraciones Java para el aprendizaje de la estadística

378. [*Electronic Textbook*](#) (UCLA), programa *on-line* de representación y cálculo de funciones de densidad y de distribución (normal, F , ji-cuadrado, números aleatorios...).
Equivalente a un libro de tablas

BIBLIOGRAFÍA

127. Montgomery Douglas y Runger George.(1996), Probabilidad y Estadística aplicada a la Ingeniería., Mcgraw-Hill, Mexico
128. Montgomery Douglas y Hines William.(1995), Probabilidad y Estadística aplicada a la Ingeniería. y Administración, segunda edición ,CECSA, México
129. Mendenhall William, Wackerly Dennis y Scheaffer Richard (1994), Estadística Matemáticas con Aplicaciones , segunda edición, Grupo Editorial Iberoamerica. M, México
130. Govinden Portus Lincoyan.(1998), Introducción a la Estadística., Mcgraw-Hill, Santafé de Bogotá
131. Webster Allen L.(1998), Estadística aplicada a la Empresa y a la Economía, segunda edición, Mcgraw-Hill, Madrid
132. Kohler Heinz.(1996), Estadística para Negocios y Economía, primera edición ,CECSA, México
133. Martinez Bencardino Ciro (1995), Estadística , sexta edición ,ECO E EDICIONES Santafé de Bogotá.
134. Alvarez C Ricardo (1994), Estadística Fundamental Aplicada, primera edición ,PUBLIADCO, Cali
135. Estadística," Enciclopedia Microsoft® Encarta® 2000. © 1993-1999 Microsoft Corporation.
136. Stockburger David W (1996) Introductory Statistics: Concepts, models an applications, , <http://www.psychstat.smsu.edu/sbk00.htm>
137. Mendoza Duran Carlos. (1995)Probabilidad y Estadística, <http://w3.mor.itesm.mx/~cmendoza/ma835/ma83500.html>
138. Valdés Fernando ,Comprensión y uso de la estadística, <http://www.cortland.edu/flteach/stats/glos-sp.html>
139. Hurtado Minotta Enrique A, Reflexiones para el Currículo, <http://www.geocities.com/soho/atrium/7521/tesis.html>

140. Academic Freedom , www.hrw.org/wr2k/issues-01.htm
141. Gonzalez Felipe, Africa : El silencio de los tambores,
www.arrakis.es/~trazeg/gonzalez.html.
142. El año 2000, WWW.arrakis.es/~trazeg/anno2000.html
143. Mendenhall, W.; D.D. Wackerly y R.L. Scheaffer. *Estadística Matemática con Aplicaciones*. Grupo Editorial Iberoamérica. México.
144. Freund, John E. y Gary A. Simon. *Estadística elemental*. Prentice-Hall Hispanoamericana, SA. México, 1994. (8ª edición.)
145. Spiegel, M.R. *Estadística*. McGraw-Hill. México. (Serie Schaum.)
146. <http://www.unl.edu.ar/fave/sei/encuestas/index.html>.
147. Wonnacott, Thomas H. y Ronald J. Wonnacott (1998) *Introducción a la estadística*. Limusa/IPN. México.

ehurtado@usc.edu.co

MODULO VIII.

REGRESIÓN LINEAL Y CORRELACION

El análisis de regresión y correlación es una de las mas importantes técnicas estadísticas. Muchos estudios empíricos e investigaciones científicas dependen en máximo grado de estas herramientas estadísticas, que quizás sean las formas de análisis estadísticas mas utilizadas y que adquieren un valor incalculable en el momento de tomar decisiones empresariales, económicas y científicas. La regresión y la correlación son vitales para determinar la naturaleza de la relación que pueda existir entre las diferentes variables científicas, económicas y empresariales con las cuales trabajan a diario quienes toman decisiones empresariales. El análisis de regresión y correlación reconoce que puede haber una relación determinable y cuantificable entre dos o mas variables , es decir, que una variable depende de otra y puede estar determinada por esta, o podemos decir que una variable es función de la otra.

La regresión y la correlación aunque son dos conceptos diferentes guardan una intima relación ya que la regresión es una expresión cuantitativa de la naturaleza de la relación entre las variables que se expresa mediante una ecuación matemática, que se puede utilizar para estimar o predecir los valores futuros que puede tener una variable cuando se conocen o suponen los valores de la otra variable; mientras que la correlación determina la fuerza de la relación entre las variables, resulta muy útil para un trabajo de exploración cuando un investigador y /o analista trata de determinar que variables son potencialmente importantes.

El análisis de regresión y correlación se constituye en una de las principales herramientas a la hora de llevar a cabo cualquier investigación y/o estudios en las mayorías de las disciplinas científicas; de allí que sea muy utilizado en las investigaciones medicas, ingenieriles, administrativas, sociales , económicas, etc, ya que su medio se pueden establecer **ecuaciones predictivas** que conjugan las diferentes variables determinando la naturaleza de la relación y su grado o fuerza de unión.

Aunque existe una gran variedad de ecuaciones de regresión para diferentes curvas de ajuste por mínimos cuadrados , entre las cuales tenemos las lineales simples y múltiples, las cuadráticas, las polinómicas, las exponenciales , las logarítmicas, las logísticas, etc; en este modulo solo estudiaremos las lineales simples.

8.1 REGRESION LINEAL

La regresión lineal simple es el método mediante el cual se intenta hallar la ecuación de una línea recta que describa la relación entre las dos variables. En un Análisis de

Regresión simple existe siempre una variable respuesta o dependiente (Y) y una variable explicativa o independiente (X). El propósito es obtener una función sencilla de la variable explicativa, que sea capaz de describir lo más ajustadamente posible la variación de la variable dependiente. Como los valores observados de la variable dependiente difieren generalmente de los que predice la función, ésta posee un error. La función más eficaz es aquella que describe la variable dependiente con el menor error posible o, dicho en otras palabras, con la menor diferencia entre los valores observados y calculados. La diferencia entre los valores observados y calculados (el error de la función) se denomina variación residual o residuos. Para estimar los parámetros de la función se utiliza el ajuste por mínimos cuadrados. Es decir, se trata de encontrar la función en la cual la suma de los cuadrados de las diferencias entre los valores observados y esperados sea menor. Sin embargo, con este tipo de estrategia es necesario que los residuos o errores estén distribuidos normalmente y que varíen de modo similar a lo largo de todo el rango de valores de la variable dependiente. Estas suposiciones pueden comprobarse examinando la distribución de los residuos y su relación con la variable dependiente.

Cuando la variable dependiente es cuantitativa y la relación entre ambas variables sigue una línea recta, la función es del tipo $Y = A + BX$, en donde A es el intercepto o valor del punto de corte de la línea de regresión con el eje de la variable dependiente y B es la pendiente o coeficiente de regresión.

Las ecuaciones de regresión pueden ser utilizadas de muchas maneras. Se emplean en situaciones donde las dos variables miden aproximadamente lo mismo. Con la particularidad que una de las variables es relativamente costosa y la otra no; por ejemplo, la resistencia a la tensión y la dureza de una aleación de cobre o de cualquier material metálico pueden estar relacionadas, de tal forma que si conoce la dureza se puede calcular fácilmente su resistencia a la tensión. Si al probar la resistencia la resistencia destruye el metal y no sucede lo mismo al tomar la dureza, cualquier persona interesada en estimar la resistencia a tensión la calcularía, basándose en la prueba de la dureza que no destruye el material. La finalidad de una ecuación de regresión es estimar los valores de una variable basándose en los valores conocidos de la otra.

Otra forma de utilizar las ecuaciones de regresión es para explicar los valores de una variable en función de la otra, es decir, una relación de causa y efecto; por ejemplo un economista puede intentar explicar los cambios en la demanda de vivienda, en términos de las altas tasas de desempleo; los drogadictos creen que el encarecimiento de la cocaína es consecuencia de los altos niveles de fumigación; el profesor que el bajo rendimiento estudiantil es consecuencia de la poca dedicación de los estudiantes; . Sin embargo, se deberá observar que, la lógica de una relación causal debe provenir de teorías externas al campo de la estadística. **El análisis de regresión únicamente indica que relación matemática podría haber, de existir una; es decir, que en ningún momento se puede establecer si una variable tiende a causar la otra.**

Otra forma de usar la ecuación de regresión lineal es para predecir valores futuros de una variable. Por ejemplo, a menudo se llevan cabo pruebas de selección para posibles estudiantes o empleados para predecir la potencialidad de tener éxito, tanto en la universidad como en el trabajo. Supuestamente existe una relación matemática entre la calificación obtenida en las pruebas y el potencial futuro.

8.2 DIAGRAMA DE DISPERSION

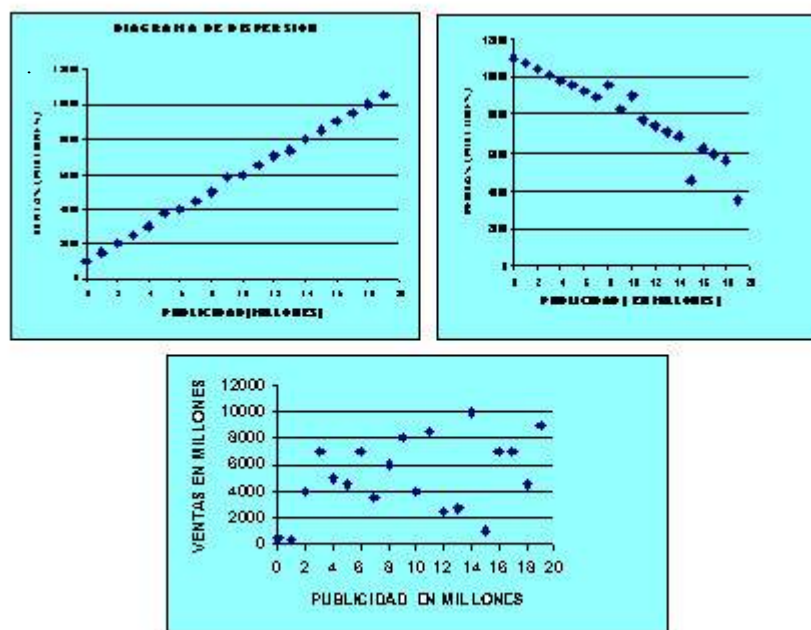
Es la representación en un plano cartesiano de las parejas de puntos de los datos de las variables independiente y dependiente. De su observación podemos estimar que o cual

es mejor tipo de ajuste que se puede hacer manualmente de estos puntos en lo que llamamos ajuste de curvas, que a su vez puede ser por el **método de ajuste manual** (que por ser subjetivo, donde cada observador puede tener resultados diferentes, ya que puede tomar puntos diferentes para su análisis, no lo estudiaremos aquí) y el **método de ajuste por mínimos cuadrados**.

En el diagrama de dispersión se acostumbra colocar en eje horizontal la variable independiente y en el vertical la variable dependiente.

En la grafica adjunta podemos ver algunos diagramas de dispersión donde se muestra la relación entre la variable independiente y la variable dependiente ventas, donde la tendencia lineal de los puntos en los dos primeros indican una tendencia lineal positiva y negativa respectivamente y el tercero no hay ninguna relación lineal entre las variables.

FIG 8. 1



DIAGRAMAS DE DISPERSION

8.3 AJUSTE POR MINIMOS CUADRADOS

Para evitar los juicios subjetivos como se dijo anteriormente, al construir rectas, parábolas, o cualquier otro tipo de curvas aproximante de ajuste de datos , definiremos la curva de mejor ajuste por mínimos cuadrados, a aquella de todas las curvas que aproximan al conjunto de datos, con las siguientes características:

- La sumatoria de todas las desviaciones verticales de los puntos a partir de la recta es igual cero

- b) La sumatoria de los cuadrados de dichas desviaciones tienden a un mínimo. Matemáticamente el valor que se minimiza es:

Ecuación 8. 1

$$\sum (Y_i - Y_c)^2$$

donde:

Y_i = valor observado de Y

Y_c = valor calculado de Y utilizando la ecuación de ajuste o regresión por mínimos cuadrados

8.3 LA RECTA REGRESION DE MINIMOS CUADRADOS

La recta de ajuste de mínimos cuadrados o de regresión que aproxima a un conjunto de parejas ordenadas $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ tiene la siguiente ecuación:

Ecuación 8. 2

$$Y = A + BX$$

Donde las constantes A y B se encuentran al resolver simultáneamente las ecuaciones normales para la recta de mínimos cuadrados que se muestran a continuación:

Ecuación 8. 3

$$\sum Y = AN + B \sum X$$

$$\sum XY = A \sum X + B \sum X^2$$

$$A = \frac{\sum Y - B \sum X}{N}$$

$$B = \frac{(N \sum XY) - (\sum X)(\sum Y)}{N \sum X^2 - (\sum X)^2}$$

8.4 APLICACIONES A SERIES EN EL TIEMPO

Cuando La variable independiente X es el tiempo y los datos de la variable dependiente y muestran los valores observado en esos lapsos, aplicamos la regresión lineal. La recta que se obtiene se llama recta de tendencia y se utiliza para pronosticar o estimar los valores de la serie de tiempo.

8.5 ERROR TIPICO DE ESTIMACIÓN

El error típico de la estimación (**Se**) es una medida de la cantidad media en que las observaciones reales de Y varían en torno a la recta de regresión. Mide la variación por encima y por debajo de la recta de regresión. Si todos los puntos se situaran sobre la recta de regresión no tendríamos ningún error en nuestra estimaciones y el error típico de

la estimación sería cero, pero esto rara vez sucede ya que siempre habrá dispersión entre ellos. El error típico de la estimación mide esta variación promedio de los puntos en torno a la recta de regresión que utilizamos para estimar Y , y suministra por lo tanto, una medida del error que cometemos en dicha estimación. El error se calcula así;

Ecuación 8. 4

$$S_E = \sqrt{\frac{\sum (Y_i - Y_c)^2}{N - 2}}$$

En donde

Y_i = valor observado de Y

Y_c = valor calculado de Y utilizando la ecuación de ajuste o regresión por mínimos cuadrados

N = numero de observaciones o datos

En la practica se trabaja con esta ecuación simplificada que mucho mas fácil de manejar

Ecuación 8. 5

$$S_E = \sqrt{\frac{\sum Y^2 - A\sum Y - B\sum XY}{N - 2}}$$

8.6 VARIACION TOTAL

Es la cantidad en que un valor real de la variable dependiente Y difiere de la media de los valores de Y . Se calcula así

Ecuación 8. 6

$$VARIACION...TOTAL = \sum (Y_i - \bar{Y})^2$$

8.7 VARIACION NO EXPLICADA

La suma de los errores cuadráticos, es decir, las desviaciones verticales de los valores observados de Y respecto de la línea de regresión se denomina **variaciones no explicadas**, ya que no se puede explicar por los valores de X solamente. Se calcula como la sumatoria de los cuadrados de las desviaciones respecto de la recta,

Ecuación 8. 7

$$VARIACION..NO...EXPLICADA = \sum (Y_i - Y_c)^2$$

8.8 VARIACION EXPLICADA

Es igual a la variación total menos la variación no explicada. También se puede calcular como la sumatoria de los cuadrados de la regresión

Ecuación 8. 8

$$VARIACION..EXPLICADA = \sum (Y_c - \bar{Y})^2$$

8.9 COEFICIENTE DE DETERMINACIÓN

El coeficiente de determinación es el termino que mide el poder explicativo del modelo de regresión, es decir, la parte de la variación de Y explicada por la variación de X. Se designa como r^2 . El valor de este coeficiente varía entre 0 y 1, ya que es imposible explicar mas del 100%.; a mayor valor de r^2 mayor poder explicativo tendrá nuestro modelo . Se calcula así:

Ecuación 8. 9

$$r^2 = \frac{VARIACION...EXPLICADA}{VARIACION...TOTAL}$$

8.10 COEFICIENTE DE CORRELACION

Como se dijo anteriormente la correlación mide la fuerza o grado de unión entre las variables dependiente y la independiente y para su medición utilizamos el coeficiente de Pearson , comúnmente llamado coeficiente de correlación. Este coeficiente de correlación y el coeficiente de determinación sirven para determinar la bondad de ajuste , es decir, si el modelo encontrado es adecuado para el análisis de regresión lineal. El coeficiente de correlación es igual a la raíz cuadrada del coeficiente de determinación y se designa con la letra **r** y también se puede calcular así:

Ecuación 8. 10

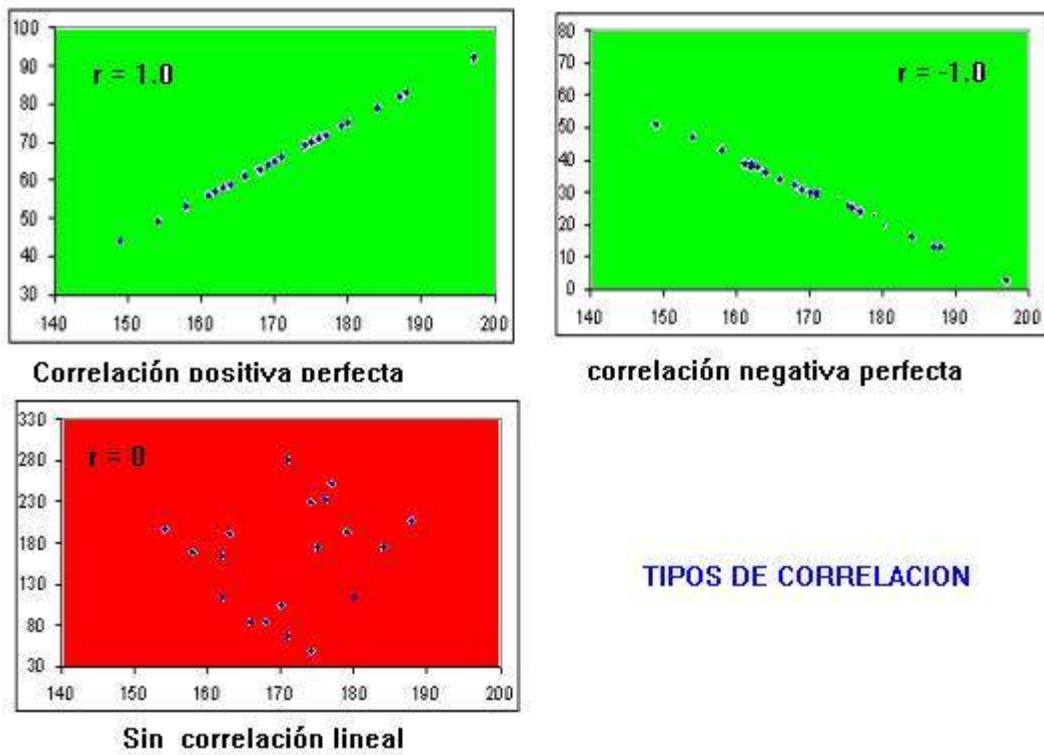
$$r = \frac{N \sum XY - \sum X \sum Y}{(\sqrt{N \sum X^2 - (\sum X)^2})(\sqrt{N \sum Y^2 - (\sum Y)^2})}$$

$r =$ Coeficiente de Correlación $-1 \leq r \leq 1$

$r^2 =$ Coeficiente de determinación $0 \leq r^2 \leq 1$

El valor del coeficiente de correlación fluctúa entre -1 y $+1$ y siempre tiene el mismo signo del coeficiente de regresión (**B**), es decir, la inclinación o pendiente de la recta de regresión . Si $r > 0$, la pendiente será positiva y ascendente pero si $r < 0$, la pendiente ser negativa y descendente. El valor absoluto de r mide la fuerza de la relación entre las variables mientras que el signo nos dice si están relacionadas en forma directa o inversa. Cuando $r = +1$ se dice que hay una correlación positiva perfecta y si $r = -1$, la correlación es negativa y perfecta. Si $r = 0$, se dice que no hay correlación , es decir no hay ninguna relación entre las variables como se puede ver en la grafica. Cabe decir que hay mucha discrepancia para decir cuales son intervalos que determinan si una correlación es buena, lo que es aceptado que en la medida que nos acercamos a -1 o a $+1$ la correlación es buena y a medida que nos acercamos a cero la correlación tiende a ser mala.

FIG 8. 2



TIPOS DE CORRELACION

FIG 8. 3

Diagramas de dispersion con valores de correlacion positivas

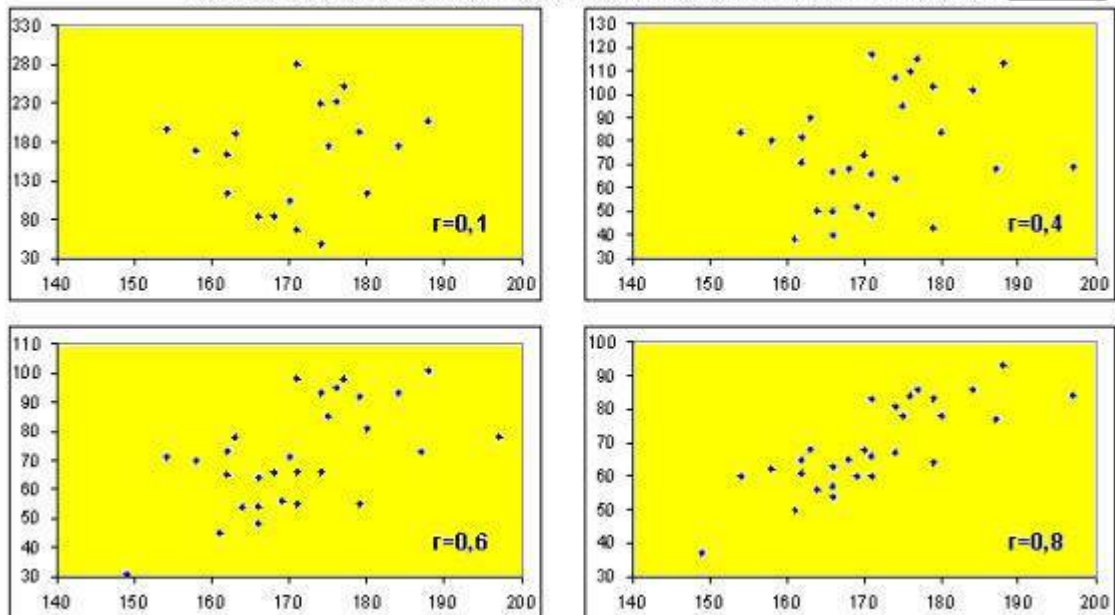
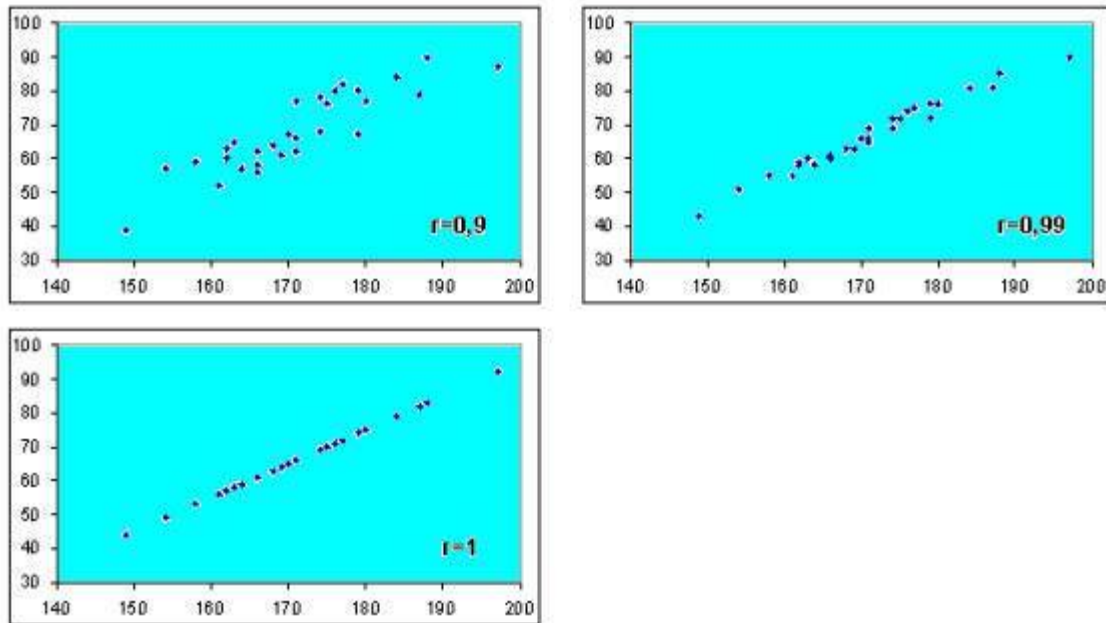
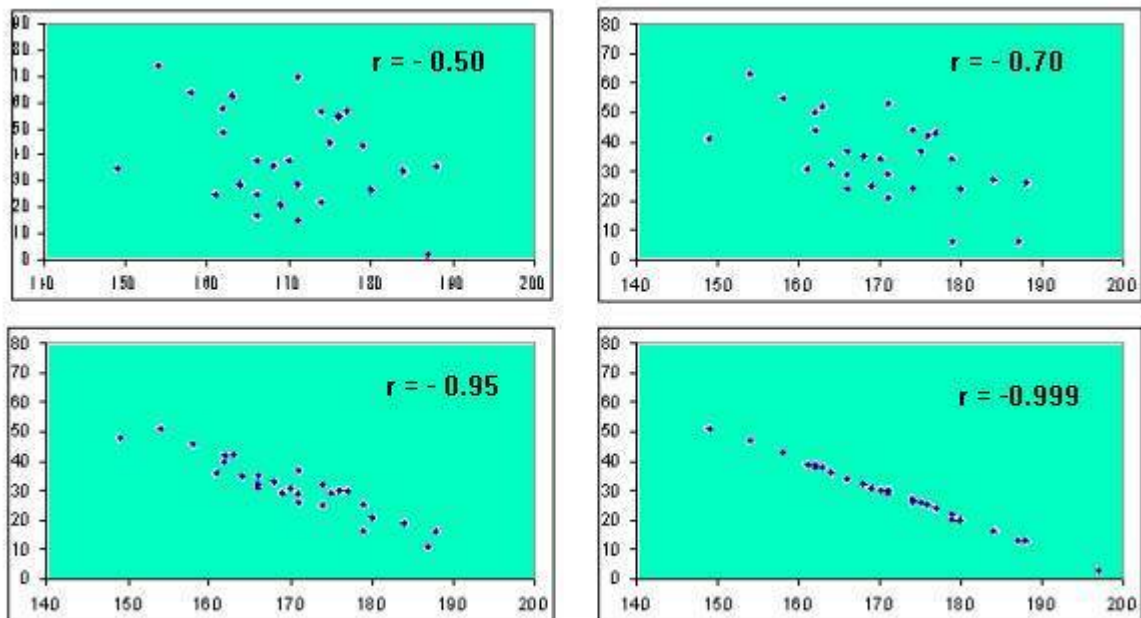


FIG 8. 4



Diagramas de dispersion con correlaciones positivas casi perfectas y perfecta

FIG 8. 5



Diagramas de dispersion con correlaciones negativas

EJEMPLO 1

El gerente técnico del Acueducto de una ciudad, desea establecer la relación entre el consumo mensual domiciliario de agua y el tamaño de las familia. Se recogió una muestra aleatoria con los datos que se muestran en la tabla adjunta. Para los datos de esta tabla desarrolle las siguientes tareas:

- Dibuje un diagrama de dispersión
- Determine manualmente la ecuación de regresión, el coeficiente de determinación y el coeficiente de correlación
- Usando Excel resuelva el ítem 2
- Usando SSPS 11 resuelva el ítem 2
- Compare los resultados y aconseje al gerente respecto a la validez de los resultados.

TABLA 8.1
CONSUMO DE AGUA POTABLE POR GRUPO FAMILIAR

Tamaño de la familia (X)	Galones de agua utilizados (Y)
3	700
7	1200
9	1700
4	800
10	1700
6	1000
9	1800
3	640
3	700
2	500
2	500
2	550
4	650
5	900
5	850
6	1100
6	1200
2	550
3	450
3	640
6	1200
6	1350
7	1320
8	1750

3	400
4	620
5	950
4	850
6	1250

DESARROLLO

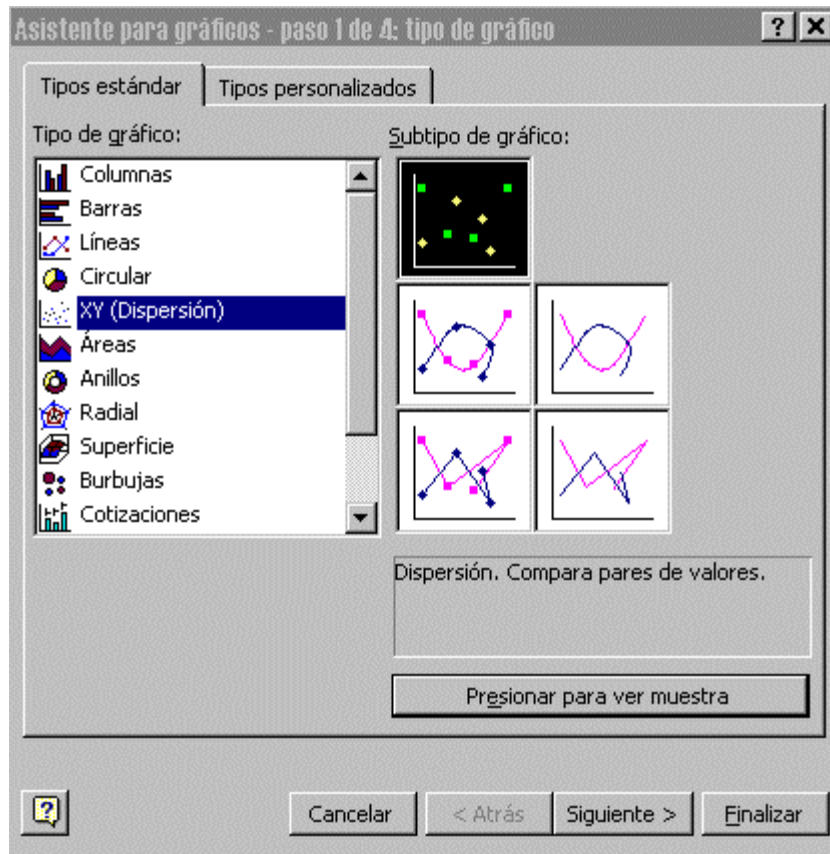
- A) Para la construcción del diagrama de dispersión utilizamos Excel , siguiendo el siguiente proceso:
- Primero digitamos la información en la ventana de Excel, la sombreamos , tal como aparece en la figura adjunta,
 -

FIG 8. 6

	A	B
1	Tamaño flia	gal agua
2	3	700
3	7	1200
4	9	1700
5	4	800
6	10	1700
7	6	1000
8	9	1800
9	3	640
10	3	700
11	2	500
12	2	500
13	2	550
14	4	650
15	5	900
16	5	850
17	6	1100
18	6	1200
19	2	550
20	3	450
21	3	640
22	6	1200

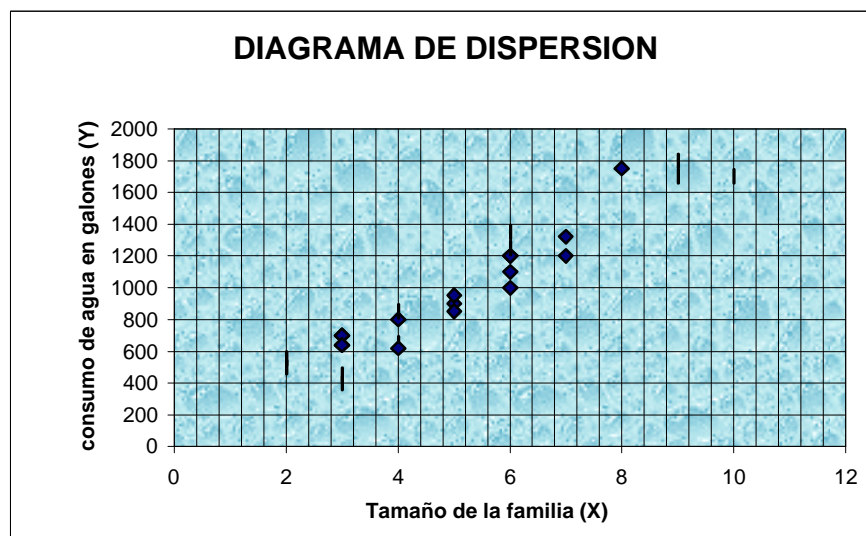
- Seleccionamos en el menú, Gráficos/ Dispersión y obtenemos ventana ,

FIG 8. 7



- En la ventana anterior damos finalizar y obtenemos el diagrama de dispersión; él cual editamos a nuestro gusto.

FIG 8. 8



B) Para resolver el ejemplo manualmente, utilizamos la hoja de calculo y a partir de allí calculamos los datos necesarios para resolver las ecuaciones normales y encontrar los coeficientes de la recta de regresión lineal y calcular los coeficientes de determinación y de correlación como se pueden ver en los cuadros adjuntos que se muestran a continuación.

FIG 8. 9

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	
	X	Y	XY	X ²	Y ²						
	3	700	2100	9	490000	Y = A + BX	Ecuación de regresión lineal				
	7	1200	8400	49	1440000						
	9	1700	15300	81	2890000	$\sum Y = AN + B \sum X$					
	4	800	3200	16	640000	$\sum XY = A \sum X + B \sum X^2$					
	10	1700	17000	100	2890000	$B = \frac{(N \sum XY) - (\sum X)(\sum Y)}{N \sum X^2 - (\sum X)^2}$					
	6	1000	6000	36	1000000	$= \frac{(29)(162710) - (143)(27820)}{(29)(849) - (143)^2} = 177.45$					
	9	1800	16200	81	3240000						
	3	640	1920	9	409600	$A = \frac{\sum Y - B \sum X}{N} = \frac{27820 - (177.45)(143)}{29} = 84.288$					
	3	700	2100	9	490000						
	2	500	1000	4	250000	Y = A + BX ⇒ Y = 84.288 + 177.45X					
	2	500	1000	4	250000						
	2	550	1100	4	302500						
	4	650	2600	16	422500						
	5	900	4500	25	810000						
	5	850	4250	25	722500						
	6	1100	6600	36	1210000						
	6	1200	7200	36	1440000						
	2	550	1100	4	302500						
	3	450	1350	9	202500						
	3	640	1920	9	409600						
	6	1200	7200	36	1440000						
	6	1350	8100	36	1822500						
	7	1320	9240	49	1742400						
	8	1750	14000	64	3062500						
	3	400	1200	9	160000						
	4	620	2480	16	384400						
	5	950	4750	25	902500						
	4	850	3400	16	722500						
	6	1250	7500	36	1562500						
SUM/	143	27820	162710	849	31611000						

FIG 8. 10

$$r = \frac{N \sum XY - \sum X \sum Y}{\left(\sqrt{N \sum X^2 - (\sum X)^2} \right) \left(\sqrt{N \sum Y^2 - (\sum Y)^2} \right)}$$

$$= \frac{(29)(162710) - (143)(27820)}{\left(\sqrt{29(849) - (143)^2} \right) \left(\sqrt{29(31611000) - (27820)^2} \right)} = 0.9592$$

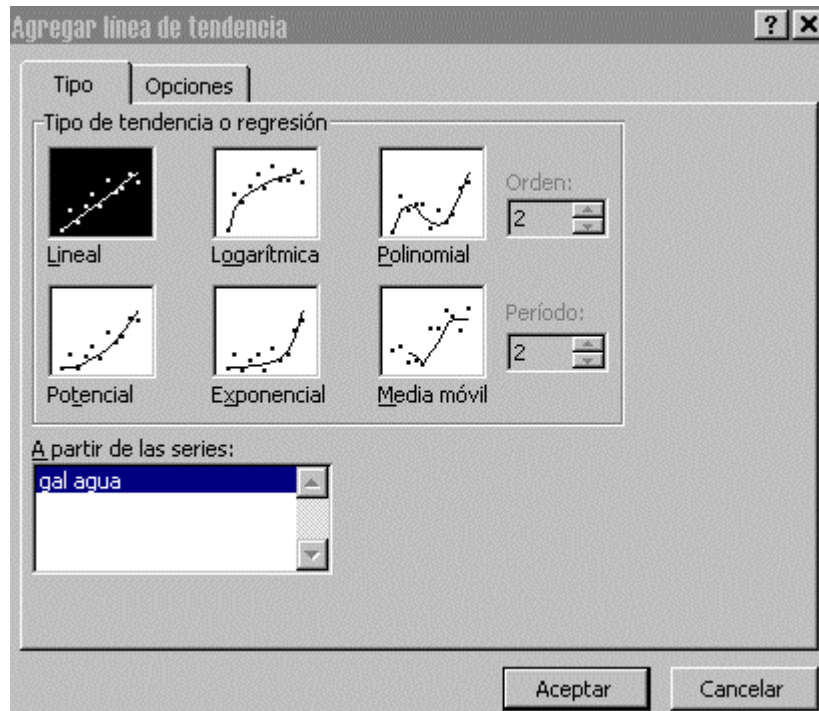
$r = 0.9592$ Coeficiente de Correlación

$r^2 = 0.9202$ Coeficiente de determinación

C) Para resolver utilizando Excel NO CALCULADORA , sino como un software estadístico bajo la premisa de que la recta de regresión es una línea de tendencia, partiremos del grafico de dispersión hallado al principio del ejemplo, que se muestra en (A) y continuaremos así:

- Se pulsa en cualquiera de los puntos del diagrama de dispersión y obtenemos una ventana llamada **Agregar línea de tendencia** donde podemos señalar línea de tendencia, (lineal para nuestro caso)

FIG 8. 11

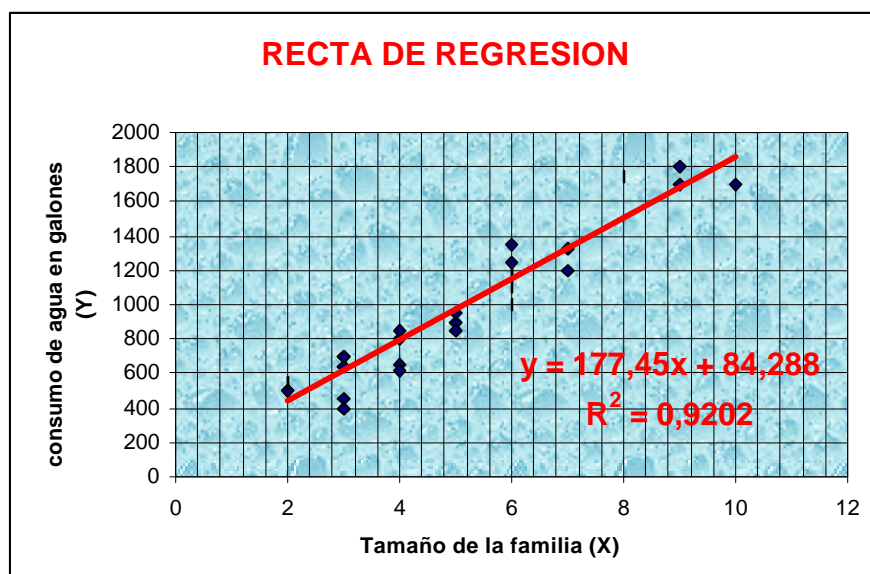


- En la ventana anterior selecciona el tipo de tendencia o regresión lineal y se pulsa opciones y obtenemos esta nueva ventana

FIG 8. 12

- En la ventana anterior escogemos presentar **ecuación en el grafico** y **el coeficiente de determinación R cuadrado**, damos aceptar y obtenemos el grafico con la línea de regresión, el cual editamos según nuestra preferencia.

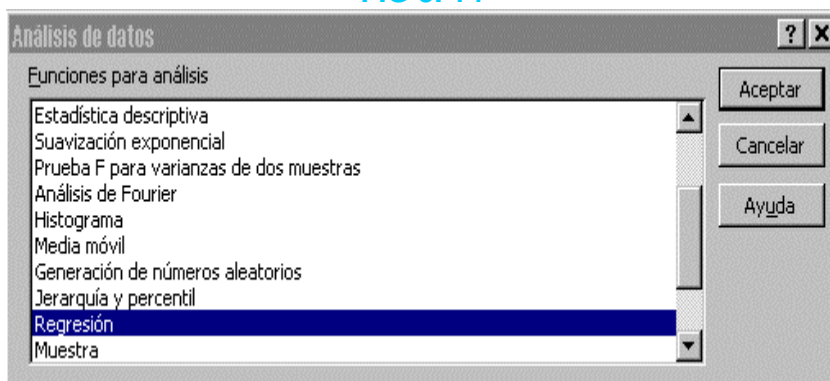
FIG 8. 13



**** Si estamos interesados en conocer mas información seguiremos este otro procedimiento alternativo:**

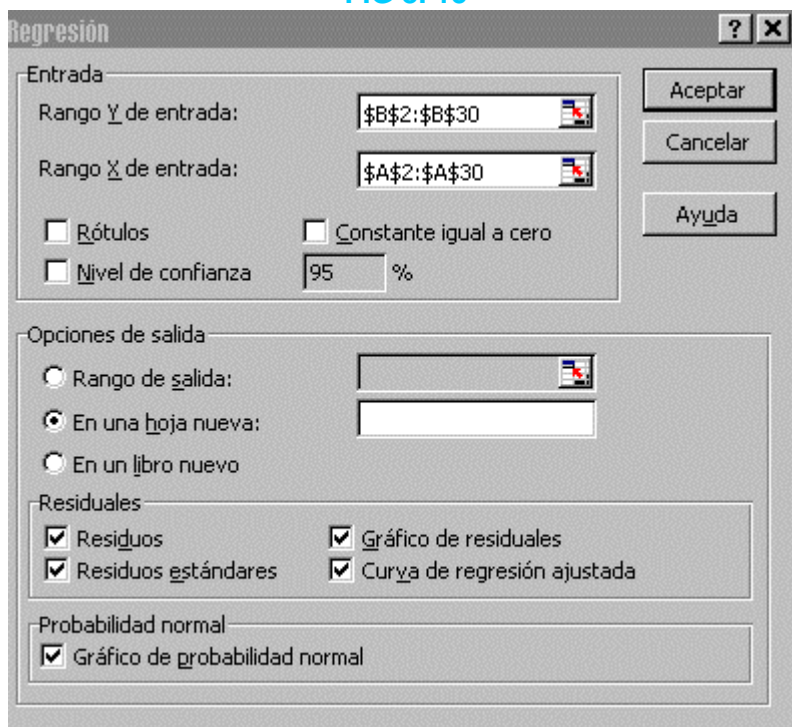
1. Después de haber digitado la información, en la ventana del menú principal seleccionamos **Herramientas / Análisis de datos** y obtenemos la siguiente ventana.

FIG 8. 14



2. En la ventana anterior escogemos **regresión** y obtenemos esta nueva ventana, la que llenamos con la información que pide y que nos interese, como se puede ver.

FIG 8. 15



3. Después de hacer la selección que se muestra en la ventana anterior obtenemos finalmente los resultados que se muestran en las figuras siguientes , incluyendo los gráficos de la línea de regresión, y grafico de los residuos entre otros:

FIG 8. 16

Microsoft Excel - CONSUMO DE AGUA						
Archivo Edición Ver Insertar Formato Herramientas Datos Ventana ?						
D21 =						
	A	B	C	D	E	F
1	Resumen					
2						
3	<i>Estadísticas de la regresión</i>					
4	Coefficiente de correlación múltiple	0,9592679				
5	Coefficiente de determinación	0,9201948				
6	R² ajustado	0,9172391				
7	Error típico	120,62796				
8	Observaciones	29				
9						
10	ANÁLISIS DE VARIANZA					
11		<i>Grados de libertad</i>	<i>Suma de cuadrados</i>	<i>Promedio de los cuadrados</i>	<i>F</i>	<i>Valor crítico de F</i>
12	Regresión	1	4530106,365	4530106,365	311,3238676	2,37919E-16
13	Residuos	27	392879,8418	14551,10525		
14	Total	28	4922986,207			
15						
16		<i>Coefficientes</i>	<i>Error típico</i>	<i>Estadístico t</i>	<i>Probabilidad</i>	<i>Inferior 95%</i>
17	Intercepción	84,288111	54,41638488	1,548947278	0,133037482	-27,3650131
18	Variable X 1	177,45206	10,05714797	17,64437212	2,37919E-16	156,8165121

FIG 8. 17

Análisis de los residuales				
Observación	Pronóstico para Y	Residuos	Residuos estandarizados	
1	616,6442953	83,3557047	0,703695008	
2	1326,462541	-126,4625407	-1,067521677	
3	1681,356663	18,64333653	0,157388422	
4	794,0963567	5,903643337	0,049838993	
5	1858,808725	-158,8087248	-1,340674969	
6	1149,000479	-149,0004794	-1,257873038	
7	1681,356663	118,6433365	1,001595799	
8	616,6442953	23,3557047	0,197170582	
9	616,6442953	83,3557047	0,703695008	
10	439,1922339	60,80776606	0,513343646	
11	439,1922339	60,80776606	0,513343646	
12	439,1922339	110,8077661	0,935447335	
13	794,0963567	-144,0963567	-1,216472072	
14	971,548418	-71,54841802	-0,604017023	
15	971,548418	-121,548418	-1,026120711	
16	1149,000479	-49,00047939	-0,413665661	
17	1149,000479	50,99952061	0,430541715	
18	439,1922339	110,8077661	0,935447335	
19	616,6442953	-166,6442953	-1,406823433	
20	616,6442953	23,3557047	0,197170582	
21	1149,000479	50,99952061	0,430541715	
22	1149,000479	200,9995206	1,69685278	
23	1326,462541	-6,462540748	-0,054472825	
24	1503,904602	246,0953979	2,077555502	
25	616,6442953	-216,6442953	-1,828927121	
26	794,0963567	-174,0963567	-1,469734285	
27	971,548418	-21,54841802	-0,181913334	
28	794,0963567	55,90364334	0,471942681	
29	1149,000479	100,9995206	0,852645403	

FIG 8. 18

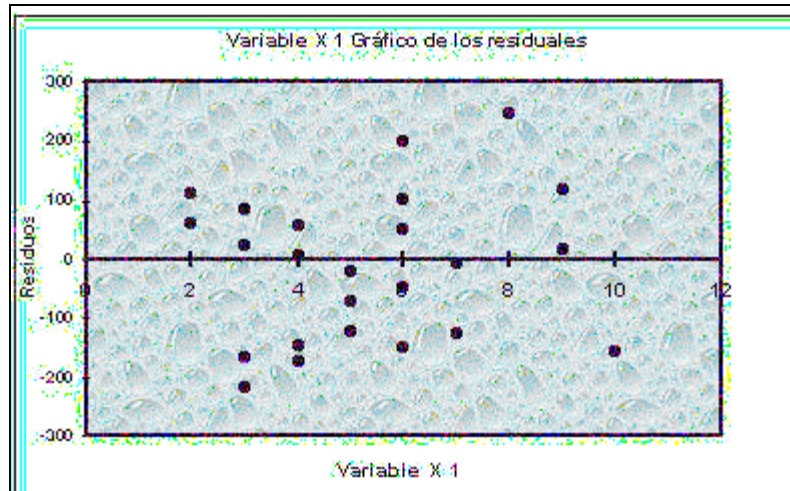
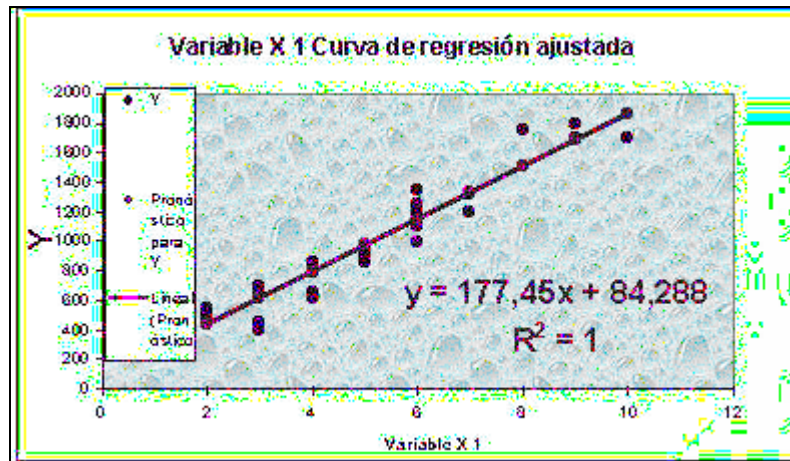


FIG 8. 19



D) Para resolver este ejemplo con SPSS 11 O CUALQUIER VERSIÓN DE SPSS, seguimos el siguiente procedimiento:

1. Digitamos la información en el ventana del editor y obtenemos el siguiente cuadro.

FIG 8. 20

The screenshot shows the SPSS data editor window titled 'CONSUMO DE AGUA - Editor de datos SPSS'. The menu bar includes Archivo, Edición, Ver, Datos, Transformar, Analizar, Gráficos, Utilidades, and Ventanas. The toolbar contains various icons for file operations, editing, and analysis. The data grid has 20 rows and 5 columns. The first column is labeled '1 : x' and the second column is labeled '3'. The data is as follows:

	x	y	var	var	
1	3	700,00			
2	7	1200,00			
3	9	1700,00			
4	4	800,00			
5	10	1700,00			
6	6	1000,00			
7	9	1800,00			
8	3	640,00			
9	3	700,00			
10	2	500,00			
11	2	500,00			
12	2	550,00			
13	4	650,00			
14	5	900,00			
15	5	850,00			
16	6	1100,00			
17	6	1200,00			
18	2	550,00			
19	3	450,00			
20	3	640,00			

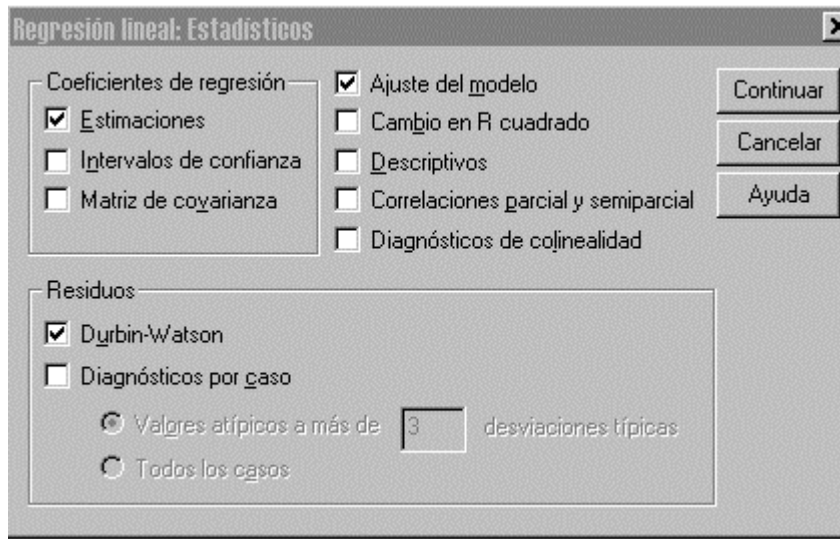
2. En menú principal seleccionamos **Analizar/ Regresión lineal** y obtenemos la siguiente ventana.

FIG 8. 21



3. En ventana anterior llenamos la información referente a las variables y seleccionamos estadísticos y/o gráficos para solicitar la información requerida y obtenemos.

FIG 8. 22



4. En la ventana anterior se llenan los espacios para los estadísticos solicitados ,se pulsa continuar y nos devolvemos a la ventana donde señalamos gráficos

y escogemos los que nos interese y damos aceptar y obtenemos los resultados que se muestran parcialmente aquí.

FIG 8. 23
Coefficientes^a

Modelo	Coeficientes no estandarizados		Coeficientes estandarizados	t	Sig.
	B	Error típ.	Beta		
1 (Constante)	84,288	54,416		1,549	,133
TAMAÑO DE LA FAMILIA	177,452	10,057	,959	17,644	,000

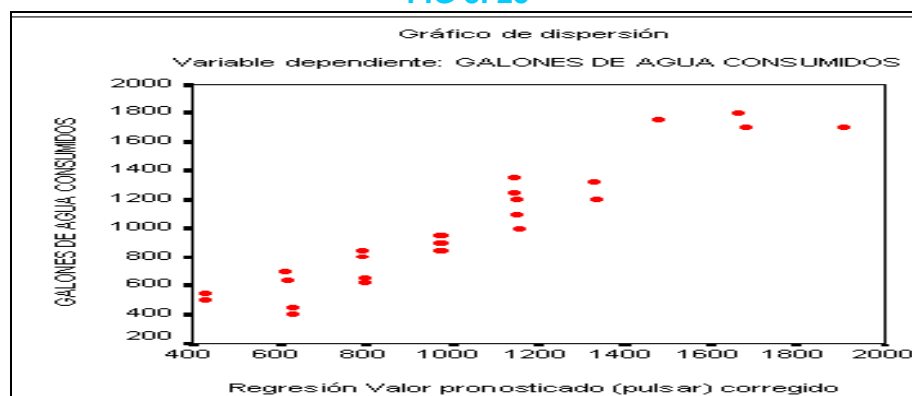
a. Variable dependiente: GALONES DE AGUA CONSUMIDOS

FIG 8. 24
Estadísticos sobre los residuos^a

	Mínimo	Máximo	Media	Desviación típ.	N
Valor pronosticado	439,1922	1858,8087	959,3103	402,23067	29
Valor pronosticado tip.	-1,293	2,236	,000	1,000	29
Error típico del valor pronosticado	22,41079	55,68353	30,60920	8,30544	29
Valor pronosticado corregido	427,6687	1901,8124	958,8017	404,28231	29
Residuo bruto	-216,6443	246,0954	,0000	118,45431	29
Residuo tip.	-1,796	2,040	,000	,982	29
Residuo estud.	-1,853	2,150	,002	1,022	29
Residuo eliminado	-230,5714	273,4248	,5087	128,55083	29
Residuo eliminado estud.	-1,946	2,318	,001	1,050	29
Dist. de Mahalanobis	,001	5,001	,966	1,169	29
Distancia de Cook	,000	,298	,044	,071	29
Valor de influencia centrado	,000	,179	,034	,042	29

a. Variable dependiente: GALONES DE AGUA CONSUMIDOS

FIG 8. 25



E) Como se puede deducir de los resultados anteriores, observamos que al analizar el diagrama de dispersión, este nos muestra una tendencia lineal, por lo tanto la decisión de utilizar la regresión lineal es adecuada como se puede ver en los gráficos de la recta de regresión y de los residuos. Al estudiar los coeficiente: encontramos que el coeficiente de regresión es positivo (a mayor tamaño de la familia mayor consumo de agua) e implica que por cada miembro del grupo familiar hay un incremento de 177.45 galones de consumo; el coeficiente de determinación nos dice que el 92% del consumo de galones de agua (variable dependiente) esta explicado por el tamaño de la familia (variable independiente) y el coeficiente de correlación con un valor de 0.959 nos dice que una muy buena correlación entre las variables. Como el valor de sigma es menor que 0.05, podemos asumir que la estimación es verdadera con un nivel de confianza del 95% (Este tema será tratado a fondo en un curso de estadística III, después de haber adquirido los conocimientos de probabilidad y muestreo) La ecuación de regresión obtenida puede ser le de gran ayuda al gerente técnico del acueducto.

EJEMPLO 2

A partir de la serie de tiempo suministrada en la tabla adjunta utilizando el método de ajuste por mínimos cuadrados encontrar lo siguiente:

1. La ecuación de regresión sin cambio de origen y estimar la producción para el año 2003
2. La ecuación de regresión con cambio de origen y estimar la producción para el año 2003
3. Calcular los coeficientes de corrección y determinación

TABLA 2
PRODUCCIÓN DE COBRE ELECTROLITICO
PERIODO 1990 -2002

AÑO	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
TON	1500	1700	2000	2400	2600	2500	3000	2900	3500	4000	3800	4500	5000

DESARROLLO

1. Este tipo de ejercicio se resuelve de manera similar al ejemplo anterior, con la única diferencia que utilizamos como la variable X independiente los años. Como el ejemplo se debe resolver sin cambio de base, esto significa que el primer año de la serie es el año base (1990) donde para facilitar las operaciones matemáticas, se designa este año como el año cero y a partir de ahí se cuenta los años restantes como se puede ver en el cuadro adjunto.

Después de hallar la ecuación de regresión se estima o pronostica la producción para el año 2003 reemplazando su equivalente 7 en la ecuación de regresión hallada.

FIG 8. 26

PRODUCCION DE COBRE ELECTROLITICO					
PERIODO 1990 - 2002					
AÑO	TON				
	X	Y	XY	X ²	Y ²
1990	0	1500	0	0	2250000
1991	1	1700	1700	1	2890000
1992	2	2000	4000	4	4000000
1993	3	2400	7200	9	5760000
1994	4	2600	10400	16	6760000
1995	5	2500	12500	25	6250000
1996	6	3000	18000	36	9000000
1997	7	2900	20300	49	8410000
1998	8	3500	28000	64	12250000
1999	9	4000	36000	81	16000000
2000	10	3800	38000	100	14440000
2001	11	4500	49500	121	20250000
2002	12	5000	60000	144	25000000
SUMATO	78	39400	285600	650	133260000

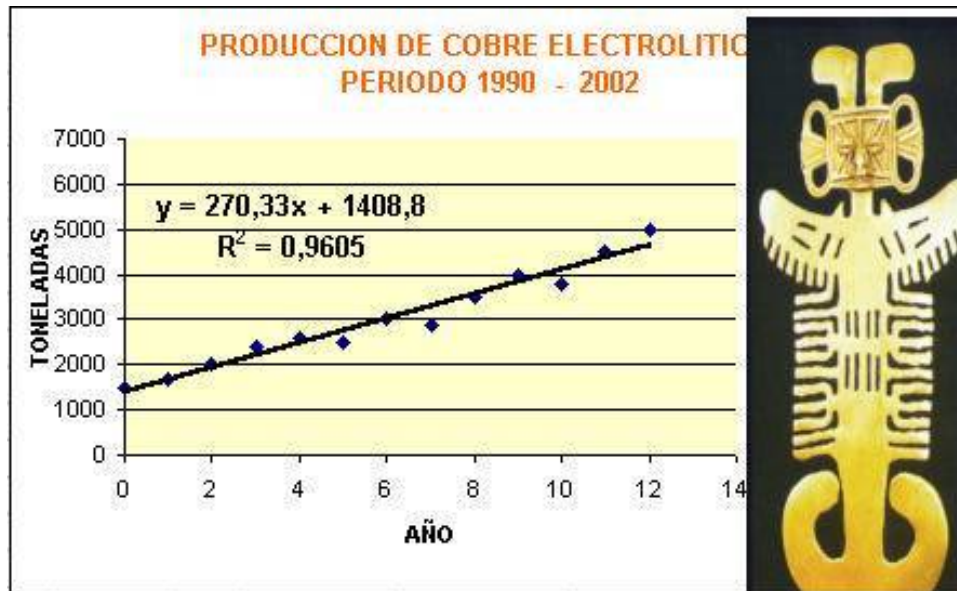
$$B = \frac{(N \sum XY) - (\sum X)(\sum Y)}{N \sum X^2 - (\sum X)^2}$$

$$= \frac{(13)(285600) - (78)(39400)}{(13)(650) - (78)^2} = 270.33$$

$$A = \frac{\sum Y - B \sum X}{N} = \frac{39400 - (270.33)(78)}{13} = 1408.8$$

$$Y = A + BX \Rightarrow Y = 1408.8 + 270.33X$$

FIG 8. 27



- B) Cuando se cambia de origen se hace para facilitar todavía mas los cálculos y se escoge como nuevo año base (1996), al año que se ubica en la mitad de los datos y a partir de ahí se operan matemáticamente los años hacia arriba y hacia abajo , obteniendo finalmente que la sumatoria de los años es igual a cero.

FIG 8. 28

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
PRODUCCION DE COBRE ELECTROLITICO									
PERIODO 1990 - 2002									
AÑO	TON								
	X	Y	XY	X ²	Y ²				
1990	-6	1500	-9000	36	2250000	$B = \frac{(N \sum XY) - (\sum X)(\sum Y)}{N \sum X^2 - (\sum X)^2}$ $= \frac{(13)(49200) - (0)(39400)}{(13)(182) - (0)^2} = 270.33$			
1991	-5	1700	-8500	25	2890000				
1992	-4	2000	-8000	16	4000000				
1993	-3	2400	-7200	9	5760000				
1994	-2	2600	-5200	4	6760000				
1995	-1	2500	-2500	1	6250000	$A = \frac{\sum Y - B \sum X}{N} = \frac{39400 - (270.33)(0)}{13} = 3030.76$ $Y = A + BX \Rightarrow Y = 3030.76 + 270.33X \Rightarrow$ <p>Ecuacion de regresión con cambio de origen</p> $Y_{2003} = 3030.76 + 270.33(7) = 4923.1 \text{ Toneladas}$			
1996	0	3000	0	0	9000000				
1997	1	2900	2900	1	8410000				
1998	2	3500	7000	4	12250000				
1999	3	4000	12000	9	16000000				
2000	4	3800	15200	16	14440000				
2001	5	4500	22500	25	20250000				
2002	6	5000	30000	36	25000000				
SUMATO	0	39400	49200	182	133260000				

- C) Los coeficientes de correlación y determinación calculados por los dos métodos tienen que dar resultados iguales y nos indican que existe una buena correlación entre las variables y que el comportamiento de la variable dependiente producción esta explicada en un 96% por la variable independiente años .

FIG 8. 29

$$r = \frac{N \sum XY - \sum X \sum Y}{\left(\sqrt{N \sum X^2 - (\sum X)^2} \right) \left(\sqrt{N \sum Y^2 - (\sum Y)^2} \right)}$$

Calculado con los datos sin cambio de origen

$$= \frac{(13)(285600) - (78)(39400)}{\left(\sqrt{13(650) - (78)^2} \right) \left(\sqrt{13(133260000) - (39400)^2} \right)} = 0.98$$

$r = 0.98$ Coeficiente de Correlación

$r^2 = 0.96$ Coeficiente de determinación

Calculado con los datos con cambio de origen

$$r = \frac{(6)(49200) - (0)(39400)}{\left(\sqrt{6(182) - (0)^2} \right) \left(\sqrt{6(133260000) - (39400)^2} \right)} = 0.98$$

TALLER DEL MODULO VIII

1. Los habitantes de un pueblo de la Sabana están preocupados por el encarecimiento de las viviendas en la zona. El gerente del instituto de vivienda,

piensa que los precios de la viviendas fluctúan con el valor de los terrenos . En la tabla adjunta se indican en millones de pesos , el costo de 15 viviendas vendidas hace poco y el valor del terreno donde se construyeron .

- a) Construir e interpretar el modelo de regresión a partir de los datos.
- b) Calcular el coeficiente de correlación y el coeficiente de determinación
- c) ¿Tiene razón el gerente del instituto ?

TABLA 8.3

Valor del terreno \$millones	Costo de la casa \$millones
11.1	96
4.2	46
9.5	88
3.7	54
5.9	58
3.8	36
9.2	77
9.6	87
9.9	89
10.2	93
7.5	72
8.5	80
5.6	61
6.8	62
7.1	68

2. La junta de estudiantes de la universidad intenta determinar si el precio de admisión a la sala de juegos del centro estudiantil ejerce algún efecto sobre el numero de estudiantes que utilizan las instalaciones. El precio de admisión y el numero de estudiantes que entran se recogen durante 15 fines de semana sucesivos tal como se muestran en la tabla adjunta. Construir e interpretar el modelo de regresión

TABLA 8.4

Precio \$	Numero de entradas
3750	96
4500	82
5250	76
6000	73
6300	70
3000	102
3000	99
4500	86
6000	76
7500	66

3300	98
4500	87
4000	90
3500	100
8000	60

3. Como presidente del Sistema de Reserva Federal , Alan Greenspan tiene la responsabilidad de controlar la circulación monetaria del país . Sus acciones tienen un efecto directo sobre los tipos de interés de las hipotecas que la gente tiene que pagar para comprar casas. En 1999 su personal recibió instrucciones de estudiar el efecto de los tipos de interés hipotecarios sobre el numero de casas vendidas. Un centro regional de Lexington que recogió datos para el estudio, suministro la información que se muestra en la tabla adjunta. Las unidades de vivienda están en centenares.
- Determinar las variables dependiente e independiente.
 - Si se supone que existe una relación lineal entre las dos variables , elaborar el modelo de regresión
 - Interpretar la constante y el coeficiente
 - Cual es el nivel de unidades vendidas si el tipo hipotecario fuera del 11.5 %
 - Que le ocurriría al numero de unidades si el tipo de interés se incrementara en 2 puntos porcentuales ?

TABLA 8.5

Año	Viviendas vendidas en millares	Tipo de interés hipotecario
1981	20	12.10
1984	17	13.50
1986	13	14.95
1988	14	13.75
1990	15	12.95
1992	14	12.50
1994	15	10.10
1996	16	9.82
1998	17	9.50

4. Con el fin de reducir el índice de delincuencia , el presidente ha presupuestado mas dinero para que haya mas policías en las calles de nuestra ciudad. Que información ofrece el modelo de regresión , a partir de los datos de la tabla adjunta, sobre el numero de policías y el numero diario de delitos declarados ? Encuentre la ecuación de regresión y el coeficiente de correlación.

TABLA 8.6

Numero de policías	Cantidad de delitos
13	8
15	9
23	12
25	18

15	8
10	6
9	5
20	10

- 5 Doce distritos escolares del área de Chicago están interesados en saber si la subida de impuestos sobre la propiedad podría asociarse con el número de alumnos de una clase en las escuelas locales. ¿Parece ser este el caso teniendo en cuenta los datos que se indican en la tabla adjunta.
- a) Si se piensa que a mayor número de alumnos se requieren impuestos más altos, ¿cuál es la variable dependiente? Calcular e interpretar el modelo de regresión, ¿Parece haber relación entre clases más numerosas e impuestos más altos?
- b) Calcular e interpretar el coeficiente de correlación y determinación.

TABLA 8.7

Tipo impositivo	Alumnos por clase
1.2	32
1.2	36
1.1	25
1.3	20
1.1	39
1.2	42
1.3	25
1.3	21
1.2	35
1.4	16
1.4	39
1.3	27

- 6 ¿Merece la pena estudiar? Para contestar esta pregunta un estudiante curioso de una clase de estadística preguntó a otros 10 estudiantes cuántas horas dedicaron al estudio para el último examen y la nota que obtuvieron. Los datos se muestran en la tabla adjunta.
- a) Calcule la ecuación de regresión y el coeficiente de correlación. ¿Cuál es la conclusión? **R/ $C = -11.365 + 3.617T$**
- b) ¿Si usted estudia una hora más, ¿qué le ocurriría a su calificación en virtud del modelo? **R/ Aumentara en 3.617 puntos**

TABLA 8.8

Calificación	Horas (T)
89	25
92	26
32	12
92	32
90	29

30	10
87	21
88	27
34	15
30	18

7. Una importante teoría financiera sostiene que cuando la rentabilidad de los bonos aumentan , los inversores sacan fondos del mercado bursátil y hacen que este caiga y compran deudas(bonos) . A continuaciones indican datos semanales que utilizan los fondos federales como una aproximación del rendimiento de los bonos, datos suministrados por el Departamento de Comercio en 1998

- Si se supone que el tipo de los fondos federales afecta al mercado bursátil , señalar la variable dependiente.
- ¿ Corroboran estos datos aquella teoría financiera ? ¿ De que manera y en que grado servirían los tipos de interés como herramienta de predicción para el mercado bursátil ? R/ **DJ = 2885.21 – 120.93TBF; $r^2 = 0.84$, La teoría financiera es corroborada como prueba el coeficiente negativo TBF**

TABLA 8.9

Semana	Dow Jones DJ	Tipo de los bonos federales (%) TBF
1	2,050	6.8
2	2,010	6.95
3	1,983	7.3
4	2,038	7.5
5	1,995	7.7
6	1,955	7.7
7	1,878	8.3
8	1,802	8.7

8..Los economistas suelen afirmar que las variaciones del PNB real afectan a la rentabilidad de los fondos de inversión. En tabla adjunta se muestran los datos recogidos.

- Calcular la ecuación de regresión
- ¿ Que sugiere el coeficiente de regresión ?
- ¿ Respalda el coeficiente de determinación esta afirmación ?

TABLA 8.10

% de variación del PNB real	Rendimiento de los fondos de inversión (%)
1.3	21
1.5	25
0.2	18
-1.1	7.0
1.9	25
2.1	21
2.6	31
2.4	29

3.1	33
2.7	32

9..Una teoría financiera muy extendida sostiene que hay una relación directa entre el riesgo de una inversión y el rendimiento que promete. El riesgo de una inversión se mide por su valor $\hat{\alpha}$. En la tabla se muestran los rendimientos y los valores $\hat{\alpha}$ de 12 valores ficticios suministrados por una firma de inversiones . ¿ Parecen estos datos respaldar esa teoría financiera ?. Los inversionistas suelen considerar el rendimiento como una función de riesgo . Utilizar una interpretación del coeficiente de regresión y del coeficiente de correlación en la respuesta. **R/ $R = 0.4902 + 3.39 \hat{\alpha}$; $r^2 = 0.804$**

TABLA 8.11

Acción	Rendimiento	Valor de $\hat{\alpha}$
1	5.4	1.5
2	8.9	1.9
3	2.3	1.0
4	1.5	0.5
5	3.7	1.5
6	8.2	1.8
7	5.3	1.3
8	0.5	-0.5
9	1.3	0.5
10	5.9	1.8
11	6.8	1.9
12	7.2	1.9

10..Las autoridades municipales de Nueva Orleans vienen afirmando que los ingresos de los negocios durante el Mardi Gra se pueden predecir por las toneladas de basura que se barren después de las fiesta de cada año. En la tabla se ven los datos de los registros municipales durante los 10 últimos años.

- Calcular el modelo de regresión , ¿ Parece existir relación ? **R/ $I = 8.827 + 6.005T$,**
- Calcular y determinar el coeficiente de determinación y el coeficiente de correlación **R/ $r^2 = 0.698$, Las toneladas de basuras explican el 69.8 %**

TABLA 8.12

Basura (toneladas)	Ingresos del municipio (millones de dólares)
2.10000	21.0000
3.50000	25.0000
1.10000	18.0000
0.50000	7.0000
3.60000	25.0000
2.10000	21.0000
3.50000	31.0000

3.40000	29.0000
3.30000	33.0000
2.50000	32.0000

11..La teoría económica sostiene que cuando los tipos de interés bajan, las empresas pueden invertir mas en bienes de equipo. En la tabla adjunta se dan cifras mensuales de tipos de interés e inversiones de capital en miles de millones de dólares.

- Calcular el modelo de regresión $R/ C = 32.5 - 2.25TI$
- Representar los datos y la recta de regresión . ¿ Respalda el modelo la teoría de que los tipos de interés bajos van asociados a mayores niveles de inversión?

TABLA 8.13

Mes	Tipo de interés (TI)	Inversión de capital (C)
Enero	10.0	10
Febrero	9.5	11
Marzo	9.0	12
Julio	7.5	16
Agosto	7.0	17
Septiembre	6.5	18
Octubre	6.0	19
Noviembre	5.5	20
Diciembre	5.0	21

12. Con los datos mensuales que se indican a que conclusión se puede llegar, a partir de una ecuación de regresión en relación con la capacidad del índice de desempleo para explicar el numero de personas que cursan peticiones a la asistencia publica ?

- Construir e interpretar la ecuación de regresión $R/ P = 6.89 + 2.13 ID$
- Calcular e interpretar el coeficiente de determinación

TABLA 8.14

Índice de desempleo (ID)	Peticionarios (P)
2.5	12
3.6	18
5.4	21
6.5	22
2.7	10
4.6	20
9.1	24
2.9	11
8.7	23
7.4	22

6.4	23
1.8	8

13. En un intento de evaluar los esfuerzos educativos del sistema universitario , el departamento de educación de USA, pidió a los decanos de los programas MBA que calificaran en una escala de 10 a 80 la calidad de la formación recibida en varias de las principales universidades del país. Los resultados se publicaron en *Cronicles of higher education* . También se recogieron datos sobre el salario inicial promedio de los titulados en miles de dólares de cada universidad ; quince de estas observaciones figuran en la tabla adjunta.

- Calcular e interpretar la ecuación de regresión
- Calcular los coeficientes de correlación y de determinación.
- ¿ Sugieren estos resultados que la reputación de la universidad tiene alguna relación con el salario inicial de sus egresados ?

TABLA 8.15

Universidad	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Calificación	25	45	47	31	33	52	59	43	28	61	49	20	73	69	79
Salario	55	100	110	65	67.5	103	120	89	60	125	100	40	150	140	160

14. En la tabla adjunta se muestra la producción de alambroón de cobre electrolítico de 8.0 milímetros de diámetro en toneladas en la ultima década.

- Hallar la recta de regresión e interpretarla
- Estimar la producción para el año 2000
- Calcular el coeficiente de correlación
- Calcular la variación explica e inexplicada
- Hallar el coeficiente de determinación
- Sacar conclusiones.

TABLA

Año	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
Producción	1500	1800	2000	2200	1900	2500	2300	2800	3000	3300

** SUGERENCIA: Trate Inicialmente de resolver los ejercicios manualmente y chequee los resultados de la mayor parte de los ejercicios utilizando cualquier software estadístico, (SSPS 11, Excel , etc)

Copyright © ;Ing. Enrique A Hurtado Minotta, all rights reserved

REVISTAS ELECTRONICAS

- [*Journal of Statistics Education*](#). Excelente revista (¡gratuita!) editada por la American Statistical Association sobre educación estadística (a todos los niveles)
- [*Homepage de la American Statistical Association*](#). La mayor asociación de estadísticos, editora de *Journal of Agricultural, Biological, and Environmental*

Statistics, Journal of the American Statistical Association, Journal of Statistics Education y The American Statistician entre otras revistas.

- 66. [Environmental and Ecological Statistics](#)
- 67. [Community Ecology](#)
- 68. [Journal of Agricultural, Biological, and Environmental Statistics](#)
- 69. [Bulletin of the Ecological Society of America](#) (gratuita; contiene artículos de ecología estadística)
- 70. [Journal of Statistical Software](#) (gratuita)
- 71. [InterStat \(Statistics on the Internet\)](#) (gratuita)
- 72. [Probability and Statistics Journals on the Web](#)

ESTADISTICA ON LINE

- 379. [Aula Virtual de Bioestadística, Universidad Complutense](#)
- 380. [Curso de bioestadística de la Universidad de Málaga](#)
- 381. [Apuntes de Bioestadística. Unidad de Bioestadística Clínica del Hospital Ramón y Cajal](#)
- 382. [Lecciones de Estadística, 5campus.org \(análisis multivariante...\)](#)
- 383. [Curso de Bioestadística de la Universidad Nacional de Misiones \(Argentina\)](#)
- 384. [Curso de estadística \(para ingenieros\) de una universidad mexicana](#)
- 385. [Cursos de estadística de la Universidad de California, Los Angeles](#)
- 386. [Cursos de estadística de la Universidad de Michigan](#)
- 387. [Electronic Statistics Textbook](#)
- 388. [A New View of Statistics](#)
- 389. [HyperStat Statistics Textbook](#)
- 390. [Statistics at Square One](#)
- 391. [Statistics Every Writer Should Know](#)
- 392. [Introductory Statistics: Concepts, Models, and Applications](#)
- 393. [Multivariate Statistics: Concepts, Models, and Applications](#)
- 394. [A complete guide to nonlinear regression](#)
- 395. [Ordination Methods for Ecologists](#)
- 396. [Annotated Bibliography of Canonical Correspondence Analysis and related constrained ordination methods 1986-1993](#)
- 397. [Multivariate Statistics: an Introduction](#)
- 398. [A glossary of ordination-related terms](#)
- 399. [Glossary of Statistical Terms and Medical Citations for Statistical Issues](#)

- 400. [Glossary of over 30 statistical terms](#)
- 401. [EVSC 503 Applied Statistics for the Environmental Sciences](#)
- 402. <http://s9000.furman.edu/mellonj/spss1.htm>
- 403. <http://www.indiana.edu/~statmath/stat/spss/win/index.html>
- 404. <http://www.utexas.edu/cc/stat/tutorials/spss/SPSS1/Outline1.html>
- 405. <http://web.uccs.edu/lbecker/SPSS/content.htm>
- 406. <http://core.ecu.edu/psyc/wuenschk/SPSS/SPSS-Data.htm>
- 407. <http://www.tulane.edu/~panda2/Analysis2/ahome.html>
- 408. <http://www.shef.ac.uk/~scharr/spss/index2.htm>
- 409. <http://calcnet.mth.cmich.edu/org/spss/index.html>
- 410. <http://calcnet.mth.cmich.edu/org/spss/toc.htm>
- 411. <http://www.public.asu.edu/~pythagor/spssworkbook.htm>
- 412. <http://lib.stat.cmu.edu/>
- 413. <http://www.stat.ufl.edu/vlib/statistics.html>
- 414. <http://www.statserv.com/software.html>
- 415. <http://www.maths.uq.edu.au/~gks/webguide/>
- 416. <http://www.statistics.com/>
- 417. <http://www.helsinki.fi/~jpuranen/links.html#stc>
- 418. <http://www.maths.uq.edu.au/~gks/webguide/free.html>
- 419. <http://nhsbig.inhs.uiuc.edu/>
- 420. <http://www.okstate.edu/artsci/botany/ordinate/software.htm>
- 421. <http://life.bio.sunysb.edu/ee/biometry/>
- 422. <http://life.bio.sunysb.edu/morph/software.html>
- 423. <http://pbil.univ-lyon1.fr/ADE-4/ADE-4.html>
- 424. [http://ourworld.compuserve.com/homepages/Rainer_Wuerlaender/statsoft.h
tm](http://ourworld.compuserve.com/homepages/Rainer_Wuerlaender/statsoft.htm)
- 425. <http://www.stat.auckland.ac.nz/~mja/Programs.htm>
- 426. <http://it.stlawu.edu/~rlock/maa99/>
- 427. <http://it.stlawu.edu/~rlock/tise98/java.html>
- 428. <http://www.stat.vt.edu/~sundar/java/applets/>
- 429. <http://www.kuleuven.ac.be/ucs/java/index.htm>
- 430. <http://noppa5.pc.helsinki.fi/koe/>
- 431. <http://www2.kenyon.edu/people/hartlaub/MellonProject/mellon.html>

Demostraciones Java para el aprendizaje de la estadística

432. [Electronic Textbook](#) (UCLA), programa *on-line* de representación y cálculo de funciones de densidad y de distribución (normal, F , ji-cuadrado, números aleatorios...). Equivalente a un libro de tablas

BIBLIOGRAFÍA

148. Montgomery Douglas y Runger George.(1996), Probabilidad y Estadística aplicada a la Ingeniería., Mcgraw-Hill, Mexico
149. Montgomery Douglas y Hines William.(1995), Probabilidad y Estadística aplicada a la Ingeniería. y Administración, segunda edición ,CECSA, México
150. Mendenhall William, Wackerly Dennis y Scheaffer Richard (1994), Estadística Matemáticas con Aplicaciones , segunda edición, Grupo Editorial Iberoamerica. M, México
151. Govinden Portus Lincoyan.(1998), Introducción a la Estadística,. Mcgraw-Hill, Santafé de Bogotá
152. Webster Allen L.(1998), Estadística aplicada a la Empresa y a la Economía, segunda edición, Mcgraw-Hill, Madrid
153. Kohler Heinz.(1996), Estadística para Negocios y Economía, primera edición ,CECSA, México
154. Martinez Bencardino Ciro (1995), Estadística , sexta edición ,ECOE EDICIONES Santafé de Bogotá.
155. Alvarez C Ricardo (1994), Estadística Fundamental Aplicada, primera edición ,PUBLIADCO, Cali
156. Estadística," Enciclopedia Microsoft® Encarta® 2000. © 1993-1999 Microsoft Corporation.
157. Stockburger David W (1996) Introductory Statistics: Concepts, models an applications, , <http://www.psychstat.smsu.edu/sbk00.htm>
158. Mendoza Duran Carlos. (1995)Probabilidad y Estadística, <http://w3.mor.itesm.mx/~cmendoza/ma835/ma83500.html>
159. Valdés Fernando ,Comprensión y uso de la estadística, <http://www.cortland.edu/flteach/stats/glos-sp.html>
160. Hurtado Minotta Enrique A, Reflexiones para el Currículo, <http://www.geocities.com/soho/atrium/7521/tesis.html>
161. Academic Freedom , www.hrw.org/wr2k/issues-01.htm
162. Gonzalez Felipe, Africa : El silencio de los tambores, www.arrakis.es/~trazeg/gonzalez.html.
163. El año 2000, WWW.arrakis.es/~trazeg/anno2000.html
164. Mendenhall, W.; D.D. Wackerly y R.L. Scheaffer. *Estadística Matemática con Aplicaciones*. Grupo Editorial Iberoamérica. México.
165. Freund, John E. y Gary A. Simon. *Estadística elemental*. Prentice-Hall Hispanoamericana, SA. México, 1994. (8ª edición.)
166. Spiegel, M.R. *Estadística*. McGraw-Hill. México. (Serie Schaum.)
167. <http://www.unl.edu.ar/fave/sei/encuestas/index.html>.
168. Wonnacott, Thomas H. y Ronald J. Wonnacott (1998) *Introducción a la estadística*. Limusa/IPN. México.

ESTADISTICA II

Archivo Edición Ver Insertar Formato Herramientas Datos Ventana ?									
Arial 10 N X S [Formato] \$ € % 000 00 0 [Herramientas] 100% [Ayuda]									
I14 =									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Z	A1	Z	A2	ÁREA PEDIDA	FORMULA DESARROLLADA EN EL CALCULO			
2	0	0,5	1,5	0,933	0,433192771	DISTR.NORM.ESTAND(1,5) - DISTR.NORM.ESTAND(0)			
3	0		-1,7		0,455434568	DISTR.NORM.ESTAND(0) - DISTR.NORM.ESTAND(-1,7)			
4	-1,7		2,1		0,937570211	DISTR.NORM.ESTAND(2,1) - DISTR.NORM.ESTAND(-1,7)			
5	0,55		1,65		0,241688204	DISTR.NORM.ESTAND(1,65) - DISTR.NORM.ESTAND(0,55)			
6	-4		0,5		0,691430781	DISTR.NORM.ESTAND(0,5) - DISTR.NORM.ESTAND(-4)			
7	-1,5		4		0,933161085	DISTR.NORM.ESTAND(4) - DISTR.NORM.ESTAND(-1,5)			
8	0,75		2,5		0,2204176	DISTR.NORM.ESTAND(2,5) - DISTR.NORM.ESTAND(0,75)			
9	-2,2		-0,5		0,294634134	DISTR.NORM.ESTAND(-0,5) - DISTR.NORM.ESTAND(-2,2)			

MODULO I

ANÁLISIS COMBINATORIO

El análisis combinatorio es un sistema que permite agrupar y ordenar en diversas formas los elementos de un conjunto.

El análisis combinatorio es la parte fundamental de las reglas de conteo, ya que proporciona las formulas adecuadas para simplificar la engorrosa labor de contar el numero de resultados posibles que pueden darse en un experimento .

Una aplicación fundamental la obtenemos en los millones de subconjuntos que se pueden formar con todos los dígitos que traen las tarjetas débitos, tarjetas de crédito, etc, procesos donde es básico el uso del análisis combinatorio. Actualmente todas las operaciones que anteriormente se hacían manualmente , hoy se realizan utilizando infinidades de software o paquetes estadísticos que facilitan y posibilitan el desarrollo de estas tediosas y largas operaciones. A través de Internet se pueden conseguir cientos de applets gratuitos on line donde ejecutar estas tareas. Además en casi todas las calculadoras viene automatizado el calculo de las formulas que se utilizan en el análisis combinatorio.

Los principales tipos de análisis combinatorio que estudiaremos son las permutaciones y las combinaciones.

Antes de adentrarnos en el análisis combinatorio definiremos algunos conceptos básicos

1.1 FACTORIAL DE UN NUMERO n

Se define el factorial de un numero n, entero no menor que 2 , como el producto de los n primeros números naturales y se denota con n!. El factorial de 0 y de 1 es igual a 1 por definición.

$$\begin{aligned}n! &= n(n-1)(n-2)\dots\dots\dots 1 \\ 0! &= 1 \\ 1! &= 1 \\ n! &= (1)(2)(3)\dots\dots\dots n\end{aligned}$$

EJEMPLO 1

$$3! = 3.2.1 = 6$$

$$5! = 5.4.3.2.1 = 120$$

$$8! = 8.7.6.5.4.3.2.1 = 40320$$

Nótese que los factoriales los podemos escribir asi :

$$3! = 3.2!$$

$$5! = 5.4!$$

$$8! = 8.7!$$

Del anterior ejemplo podemos generalizar y establecer que :

$$n! = n(n-1)!$$

EJEMPLO 2

$$a) \frac{4!}{5!} = \frac{4!}{5.4!} = \frac{1}{5}$$

$$b) \frac{20!}{18!} = \frac{20.19.18!}{18!} = 20.19 = 380$$

$$c) \frac{1500!}{1498!} = \frac{1500.1499.1498!}{1498!} = 1500.1499 = 2248500$$

$$d) \frac{6!}{3!4!} = \frac{6.5.4!}{3.2.1.4!} = \frac{6.5}{3.2.1} = 5$$

$$e) 5! - 2! = 120 - 2 = 118$$

$$f) (5-2)! = 3! = 6$$

$$g) \frac{4!}{5!(6-3)!} = \frac{4!}{5!4!3!} = \frac{1}{5!3!} = \frac{1}{30}$$

$$h) (5+3)! = 8! = 40320$$

1.2 PRINCIPIO FUNDAMENTAL

Si un suceso o evento puede ocurrir de n_1 maneras y cuando esto haya ocurrido; otro suceso puede ocurrir de n_2 formas; podemos decir que el número de maneras (N) en que ambos eventos pueden ocurrir en un orden específico es igual a $N = n_1 \cdot n_2$

Este principio también se conoce como el principio de la multiplicación.

Generalizando podemos decir que si una tarea en una secuencia de r etapas, donde hay n_1 formas de llevar a cabo la primera etapa y n_2 formas de ejecutar la segunda etapa y n_3 formas de realizar la tercera etapa y así sucesivamente; entonces podemos decir que el número total de formas en que se puede realizar la tarea completa está dado por el producto de las maneras individuales como cada uno puede ocurrir y se calcula así:

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_r$$

EJEMPLO 3

Si hay 4 candidatos para gerente de una compañía y 3 para subgerente. De cuántas formas se pueden ocupar los dos cargos?

DESARROLLO

n_1 = formas de ocupar el cargo de gerente = 4
 n_2 = formas de ocupar el cargo de subgerente = 3
 $N = n_1 \cdot n_2$ = formas de ocupar los dos cargos = $(4)(3) = 12$

EJEMPLO 4

Si en una carrera hay 7 caballos. Cuántas ordenaciones de primer lugar, segundo y tercer lugar son posibles?

DESARROLLO

n_1 = formas para ocupar el primer lugar = 7
 n_2 = formas para ocupar el segundo lugar = 6
 n_3 = formas para ocupar el tercer lugar = 5
 $N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ resultados posibles

EJEMPLO 5

Cuántas placas diferentes para automóviles pueden fabricarse si cada placa debe contener 2 letras de 28 posibles y 4 números de 10 posibles, si a) no se impone ninguna restricción b) ni los números ni las letras pueden repetirse.

DESARROLLO

a) Para resolver este problema imaginemos una placa y bajo la premisa de que no hay ninguna restricción podemos disponer de todas las letras y los dígitos cada vez que queramos llenar una celda.

Para formar la placa se realizan 6 etapas

letra	letra	numero	número	número	número
n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6
28	28	10	10	10	10

n_1 = número de formas de llenar la celda 1 = 28
 n_2 = número de formas de llenar la celda 2 = 28
 n_3 = número de formas de llenar la celda 3 = 10
 n_4 = número de formas de llenar la celda 4 = 10
 n_5 = número de formas de llenar la celda 5 = 10

n_6 = número de formas de llenar la celda 6 = 10

N = numero total de placas = $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 \cdot n_5 \cdot n_6 = 28 \cdot 28 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 7.840.000$ placas

b) Para resolver esta parte se debe tener presente que cada vez que se selecciona una letra o un numero este queda descartado, es decir que en este proceso no existe reemplazo.

Letra	letra	numero	número	número	número
n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6
28	27	10	9	8	7

n_1 = número de formas de llenar la celda 1 = 28

n_2 = número de formas de llenar la celda 2 = 27

n_3 = número de formas de llenar la celda 3 = 10

n_4 = número de formas de llenar la celda 4 = 9

n_5 = número de formas de llenar la celda 5 = 8

n_6 = número de formas de llenar la celda 6 = 7

N = numero total de placas = $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 \cdot n_5 \cdot n_6 = 28 \cdot 27 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 3.810.240$ placas.

1.3 DIAGRAMA DE ARBOL

Un diagrama de árbol es una representación grafica de un experimento que consta de varios pasos donde cada paso tiene un numero finito de maneras de llevarse a cabo. El diagrama de árbol es la herramienta mediante la cual visualizamos gráficamente el proceso con todos sus posibles resultados. Esta formado por nodos y ramas que salen de esos nodos . Un nodo equivale a un experimento o ensayo y las ramas equivalen a cada uno de los resultados. El diagrama se puede dibujar de izquierda a derecha o de arriba hacia abajo en la misma secuencia en que suceden los experimentos y cada vez que tiene lugar un experimento se dibuja un nodo del cual saldrán tantas ramas como resultados tenga ese experimento. Encima o al lado de cada rama se colocan los resultados particulares.

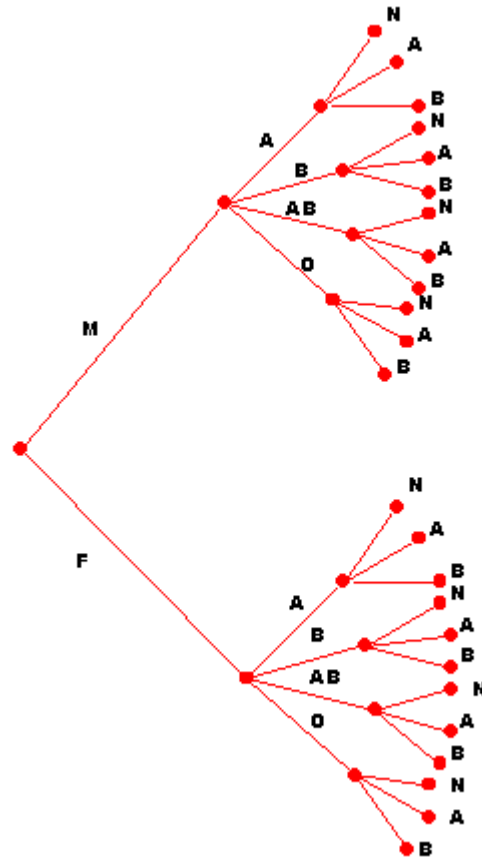


EJEMPLO 6

Un investigador clasifica a sus pacientes de acuerdo a su sexo (Masculino o Femenino) , tipo de sangre (A, B, AB, O) y a su presión sanguínea (Normal, Alta y Baja). Mediante un

diagrama de árbol diga cuantas clasificaciones puede hacer el investigador de sus pacientes?

DESARROLLO

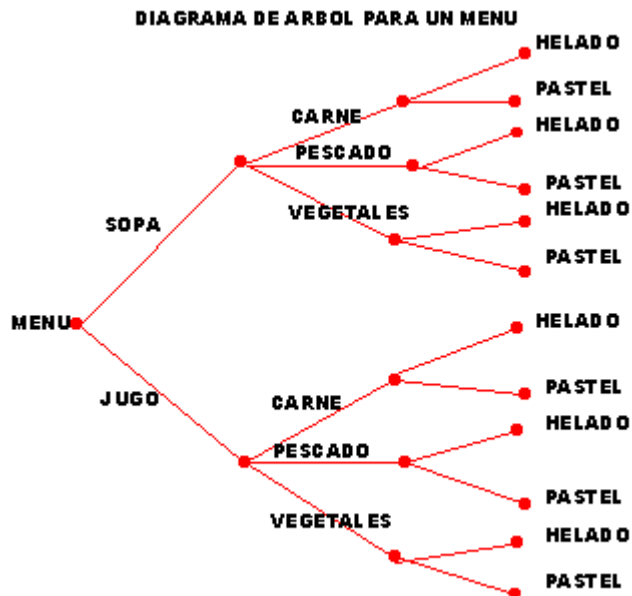


Como se puede observar del diagrama de árbol , el investigador puede hacer 24 clasificaciones que son las mismas que se obtienen cuando se aplica el principio fundamental = $(2)(4)(3) = 24$

EJEMPLO 7

De cuantas forma Rene Fernando puede seleccionar una comida completa en el restaurante internacional **Miriam's**, si este le ofrece como entrada sopa o jugo , como plato principal , carne, pescado o vegetales y como postre, helado o pastel?

DESARROLLO



Del diagrama del árbol obtenemos que René Fernando puede hacer 12 selecciones diferentes de comida completa. ($2 \times 3 \times 2 = 12$)

1.4 PERMUTACIONES

Es el numero de ordenaciones cuando el orden es importante y se define como la elección ordenada de r objetos tomados de entre n objetos de r en r . Se denota por nPr , $P(n,r)$ o $Pn.r$ y se calcula utilizando la siguiente expresión matemática :

$$nPr = \frac{n!}{(n-r)!}$$

En particular si el numero de permutaciones son tomada de n en n , entre n objetos su calculo es igual a :

$$nPn = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Además si el numero de permutaciones de n objetos de los cuales n_1 son iguales, n_2 iguales y n_3 son iguales, su permutación se calcula así:

$$Pn(r : n_1, n_2, n_3) = \frac{n!}{n_1! n_2! n_3!}$$

donde $n = n_1 + n_2 + n_3$

EJEMPLO 8

Cuántas permutaciones se pueden hacer con las letras A, B y C?

DESARROLLO

En general el numero de permutaciones de n objetos es igual $n!$

$$N! = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Esto se llama numero de permutaciones de n objetos distintos tomado de n en n y es igual a ${}_nP_n = n! = 3! = 6$

Nótese las permutaciones :

ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA

EJEMPLO 9

De cuantas maneras se pueden poner en fila 6 individuos de diferentes etnias?

DESARROLLO

$${}_6P_6 = 6! = 720$$

La mayor parte de las calculadoras traen incluidas las teclas para calcular los factoriales , las permutaciones y las permutaciones de una forma muy simple y rápida.

EJEMPLO 10

DE cuantas maneras se puede resolver un examen de estadística que consta de 5 preguntas y se deja en libertad para contestarla en el orden que se desee?

DESARROLLO

$${}_5P_5 = 5! = 120$$

EJEMPLO 11

De cuantas formas se pueden sentar 10 personas si hay 3 puestos disponibles?

DESARROLLO

$${}_{10}P_3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10.9.8.7!}{7!} = 720$$

EJEMPLO 12

De cuantas palabras de 5 letras diferentes se pueden formar con las 27 letras del alfabeto?

DESARROLLO

$${}_{27}P_5 = \frac{27!}{(27-5)!} = \frac{27.26.25.24.23.22!}{22!} = 9.687.600$$

EJEMPLO 13

De cuantas maneras diferentes se pueden contestar 5 preguntas de un examen si solo hay que resolver 3 preguntas?

DESARROLLO

$${}_5P_3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5.4.3.2!}{2!} = 60$$

EJEMPLO 14

Si el futbolista Faustino Asprilla conoce 7 jugadas diferentes y si el entrenador lo instruye para que juegue las 7 jugadas sin que ninguna se repita. Que libertad le queda al jugador?

DESARROLLO

$${}_7P_7 = \frac{7!}{(7-7)!} = \frac{7!}{0!} = 5040$$

EJEMPLO 15

Miriam Xiomara tiene 9 libros y desea ordenar 5 de ellos sobre un estante. De cuantas maneras distintas puede hacerlo?

DESARROLLO

$${}_9P_5 = \frac{9!}{(9-5)!} = \frac{9!}{4!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 15120$$

EJEMPLO 16

Cuantas permutaciones se pueden hacer con las letras XX, YYY?

DESARROLLO

$$P_5(r : 2, 3) = \frac{5!}{2!3!} = 10$$

donde $n = 2 + 3 = 5$

EJEMPLO 17

Los grupos de montañistas aún acostumbran en sus campamentos a enviar señales utilizando las secuencia en que aparecen los colores en una sucesión de banderas colocadas una a continuación de otra. Si cada mensaje esta formado por 12 banderas y se dispone de 6 banderas azules, 4 banderas rojas y 2 banderas verdes. Cuantos mensajes diferentes podrán enviarse?

DESARROLLO

$$P_{12}(r : 6, 4, 2) = \frac{12!}{6!4!2!} = 13.860 \text{ mensajes}$$

donde $n = 6 + 4 + 2 = 12$

EJEMPLO 18

De cuantas maneras se pueden ordenar en un estante 5 litros de ron y 3 botellas de aguardiente, con la condición de que los dos litros estén siempre juntos y las dos botellas siempre juntas?

DESARROLLO

Este es un caso especial de permutaciones

permutación de los 5 litros de ron = ${}_5P_5$

permutación de las 2 botellas de aguardiente = ${}_3P_3$

Numero de permutaciones con los dos grupos = ${}_2P_2$

Numero total de permutaciones = ${}_5P_5 \cdot {}_3P_3 \cdot {}_2P_2 = 5! \cdot 3! \cdot 2! = 120 \cdot 6 \cdot 2 = 1440$ maneras

1.5 COMBINACIONES

Una combinación de n objetos tomados de r en r es una selección de ellos sin importar el orden de los r escogidos. Se denota así ${}_nC_r$ y se calcula usando la siguiente expresión matemática :

$${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Obsérvese que la combinación se puede calcular así en función de las permutaciones :

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!}$$

EJEMPLO 19

Hallar el numero de combinaciones y de permutaciones que se pueden hacer con las letras A, B y C tomadas de 2 en 2?

DESARROLLO

$${}_3C_2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3!}{2!} = 3 \text{ combinaciones}$$

$${}_3P_2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = 6 \text{ permutaciones}$$

AB, AC y BC son iguales en combinaciones a

BA, CA y CB respectivamente ya que el orden no interesa, pero en cambio son diferentes en permutaciones donde el orden si interesa.

EJEMPLO 20

De cuantas maneras se pueden sacar 2 manzanas de una caja que contiene 8 manzanas?

DESARROLLO

$${}_8C_2 = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8!}{2!6!} = 28 \text{ maneras}$$

EJEMPLO 21

Cuantos comités compuestos de 3 diputados y 5 senadores pueden formarse a base de un grupo de 5 diputados y 8 senadores?

DESARROLLO

$${}_5C_3 \cdot {}_8C_5 = \frac{5!}{3!(5-3)!} \cdot \frac{8!}{5!(8-5)!} = \frac{5!}{3!2!} \cdot \frac{8!}{5!3!} = 560 \text{ comités}$$

EJEMPLO 22

Suponga que a partir de un grupo conformado por 10 hombres entre los cuales se encuentra Rene, prominente líder comunitario y 8 mujeres entre las cuales se destaca Xiomara, se desea seleccionar un comité conformado por 5 personas para que estudie la problemática del ruido en la comuna 6 de la ciudad de Cali. De cuantas maneras distintas puede integrarse el comité si :

- a) no se impone ninguna restricción
- b) El comité solo debe ser integrado por hombres
- c) El comité debe estar conformado solo por mujeres
- d) Rene y Xiomara deben estar en el comité
- e) Rene y Xiomara no deben estar en el comité
- f) El comité debe estar conformado 3 mujeres y 2 hombres
- g) El comité debe tener por lo menos una mujer

DESARROLLO

a) El número total de comités es igual a:

$${}_{18}C_5 = \frac{18!}{5!(18-5)!} = 8568$$

b) el número de comités con solo hombres

$${}_{10}C_5 = \frac{10!}{5!(10-5)!} = 252$$

c) el número de comités con solo mujeres

$${}_8C_5 = \frac{8!}{5!(8-5)!} = 56$$

d) Al estar seleccionado Rene y xiomara, nos quedan 16 personas para seleccionar 3

$${}_{16}C_3 = \frac{16!}{3!(16-3)!} = 560 \text{ comités}$$

e) Al estar descartados Rene y Xiomara, nos queda un grupo de 16 para seleccionar 5

$${}_{16}C_5 = \frac{16!}{5!(16-5)!} = 4368 \text{ comités}$$

f) El número de comités formados 3 mujeres y 2 hombres

$${}_8C_3 \cdot {}_{10}C_2 = \frac{8!}{3!(8-3)!} \cdot \frac{10!}{2!(10-2)!} = 56 \cdot 45 = 2520 \text{ comités}$$

g) El número de comités que tienen por lo menos una mujer son aquellos que tienen 1 ó 2 ó 3 ó 4 ó 5 mujeres

$${}_8C_1 \cdot {}_{10}C_4 + {}_8C_2 \cdot {}_{10}C_3 + {}_8C_3 \cdot {}_{10}C_2 + {}_8C_4 \cdot {}_{10}C_1 + {}_8C_5 \cdot {}_{10}C_0 =$$
$$= 1680 + 3360 + 2520 + 700 + 56 = 8316 \text{ comités}$$

Esta parte se puede realizar de una forma mas simple que consiste en restar del total de comités el numero de comités con ninguna mujer asi : ${}_{18}C_5 - {}_{10}C_5 = 8568 - 252 = 8316$.

EJEMPLO 23

De entre 5 contadores y 7 administradores hay que constituir una comisión de 2 contadores y 3 administradores. De cuantas formas podrá hacerse si a) todos son elegibles b) un administrador en particular ha de estar en la comisión c) 2 contadores tienen prohibido pertenecer a la comisión.

DESARROLLO

$$a) {}_5C_2 \cdot {}_7C_3 = \frac{5!}{2!(5-2)!} \cdot \frac{7!}{3!(7-3)!} = 350$$

$$b) {}_5C_2 \cdot {}_6C_2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} \cdot \frac{6!}{2!(6-2)!} = 150$$

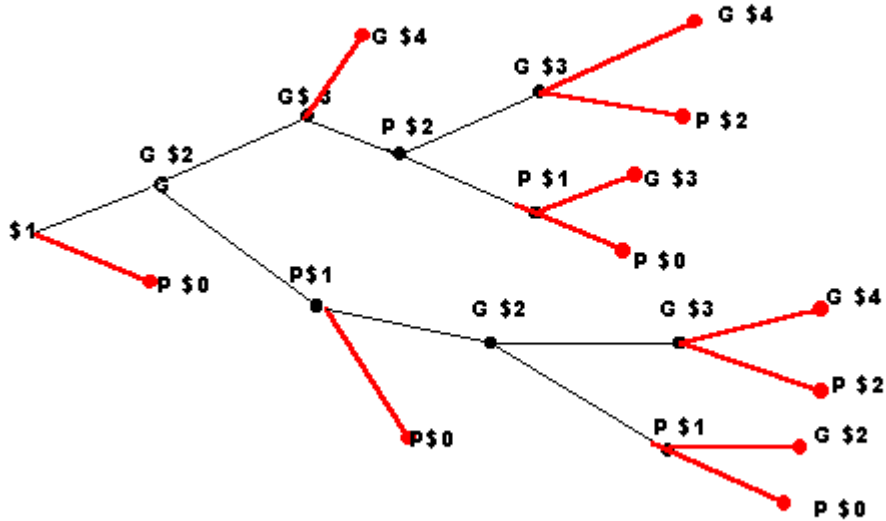
$$c) {}_3C_{2 \cdot 7} C_3 = \frac{3!}{2!(3-2)!} \cdot \frac{7!}{3!(7-3)!} = 105$$

EJEMPLO 24

Enrique Alberto tiene tiempo de jugar ruleta cinco veces como máximo , él empieza a jugar con un dólar , apuesta cada vez un dólar y puede ganar o perder en cada juego un dólar, él se va retirar si pierde todo su dinero , si gana 3 dólares(es decir, si completa un total de 4 dólares) o si completa los cinco juegos. Mediante un diagrama de árbol diga cuantas maneras hay de que efectúe el juego?

DESARROLLO

DIAGRAMA DE ARBOL



Si contamos las ramas terminales nos daremos cuenta que hay 11 maneras de que Enrique Alberto lleve a cabo sus apuestas como se puede ver en diagrama de árbol.

TALLER MODULO 1

SUGERENCIA : Resuelva todos los ejercicios utilizando cualquiera de los múltiples applets que se consiguen en internet, o en su defecto utilice el método antiguo y tradicional.

1. Calcular cada uno de los siguientes factoriales:

- a) $26!$
- b) $52!$
- c) $12!$
- d) $25! - 20!$
- e) $(25 - 20)!$
- f) $22!4!/20!$

2. Calcular las siguientes permutaciones:

- a) ${}_5P_2$
- b) ${}_{10}P_2$
- c) ${}_5P_5$
- d) ${}_{15}P_5$
- e) ${}_8P_3$
- f) ${}_5P_0$

3. Calcular las siguientes combinaciones:

- a) ${}_5C_2$
- b) ${}_{10}C_2$
- c) ${}_5C_5$
- d) ${}_{15}C_5$
- e) ${}_8C_3$
- f) ${}_5C_0$
- g) ${}_{11}C_{11}$

4) Miriam X , vendedora estrella de autos deportivos quiere impresionar a sus potenciales clientes con la gama de combinaciones que dispone . su modelo estrella presenta 3 tipos de motores, 2 transmisiones, 10 colores de carrocería , 5 colores internos y 3 marcas de computadoras . Cuantas posibilidades respecto a este modelo se pueden elegir? $R = 900$

5) El menú del restaurante el Rincón Marino recomienda 20 posibilidades de elección de carne o pescado o pollo, 8 clases de ensaladas y 5 clases de postres. Cuantas comidas diferentes son posibles? $R = 800$

6) En el restaurante Giorgio's Pizza se lista la siguiente variedad de pizzas de 25 centímetros : jamón, camarones, champiñones, pimentones y piña . Juan Carlos solo

tiene dinero para comprar dos bajo la premisa de que todas las pizzas tienen el mismo precio, entre cuantas pizzas tendrá que escoger? $R = 10$

7) Un investigador quiere determinar el efecto de tres variables, presión, temperatura y el tipo de catalizador en la producción de un proceso de refinación. Si el investigador tiene la intención de usar 5 temperaturas, 4 presiones y 3 tipos de catalizadores. Cuantos experimentos tendrá que ejecutar si quiere incluir todas las posibles combinaciones de presión, temperatura y tipos de catalizadores? $R = 60$

8) Tres monedas, cada una con los dígitos del 0 al 9, se disponen como en una maquina tragamonedas, de manera que cada rueda pueda girar en forma individual:

- a) Cuantas ordenaciones de números son posibles? $R = 1000$
- b) Cuantas ordenaciones que tenga un dígito 5 en la posición intermedia son posible? $R = 100$

9) El administrador de un bar revisa botellas de aguardiente y acepta o rechaza cada botella. Si 10 botellas son sometidas a inspección. En cuantas formas diferentes se puede ocurrir lo siguiente donde la única característica distinguible es la aceptación o el rechazo:

- a) Se aceptan 3 botellas? $R = 120$
- b) Se aceptan 2 botellas? $R = 45$
- c) Se acepta una botella? $R = 10$

10) En Cierta curso de estadística a los estudiantes se califica con las letras A, B, C, D, E. De cuantas maneras se pueden calificar si los estudiantes reciben todas calificaciones diferentes? $R = 120$

11) Cuantas comisiones de 3 personas se pueden formar seleccionándolas:

- a) a partir de un grupo de 10 personas? $R = 120$
- b) De 7 personas entre 10? $R = 120$

12) Un caja contiene 7 bolas rojas y 5 negras. Cuantos conjuntos de 5 bolas se pueden extraer si se desea que 3 de ellas sean rojas y 2 negras? $R = 350$

13) Con 7 consonantes y 5 vocales, cuantas palabras se pueden formar que tengan 4 consonantes distintas y 3 vocales distintas. Se admiten palabras sin significado? $R = 1.764.000$

14) Suponga que para viajar entre las ciudades de Cali y Palmira existen 5 diferentes líneas de buses y que para viajar entre Palmira y Buga, existen 3 líneas diferentes de buses:

- a) De cuantas maneras se puede viajar de Cali hasta Buga? $R = 15$
- b) De cuanta maneras se puede realizar el viaje redondo (ida y vuelta)? $R = 225$ (5.3.3.5)
- c) De cuantas formas se puede realizar el viaje redondo pasando siempre por Palmira si ninguna línea se puede utilizar mas de una vez? $R = 120$ (5.3.24)

15) Suponga que a partir de un grupo conformado por 8 hombres y 7 mujeres se desea seleccionar un comité conformado por 6 personas. De cuantas maneras distintas se puede seleccionar el comité si:

- a) No se impone ninguna restricción?
 - b) El comité debe estar integrado solo por hombres?
 - c) El comité solo debe estar conformado por mujeres?
 - d) Un hombre y una mujer determinado deben estar en el comité?
 - e) Un hombre y una mujer determinada no deben estar en el comité?
 - f) El comité debe tener 3 mujeres y 2 hombres?
 - g) El comité debe tener por lo menos una mujer?
- 16) Cuantas placas diferentes para automóvil pueden fabricarse si cada placa debe contener 3 letras (de 28 posibles) y 4 números (de 10 posibles) si :
- a) No se impone ninguna restricción?
 - b) Ni los números ni las letras deben repetirse?
- 17) Cuantos comités de 10 personas integrados por 4 abogados , 3 economistas y 3 ingenieros a partir de un grupo de 8 economistas, 5 ingenieros y 6 abogados? $R = 8400$
- 18) El director ejecutivo de la Dow Chemical Company tiene que elegir 5 personas de una lista de 15 ejecutivos jóvenes que sirvan de ejemplo de talento gerencial extraordinario. Cada ejecutivo recibirá un premio en metálico . el primer clasificado obtendrá la gratificación mas alta, el segundo la mas alta así sucesivamente. El director ejecutivo ha de seleccionar también un comité de 5 miembros de un grupo de 15 planificadores de la empresa que determinen el emplazamiento de una nueva factoría química que Dow planea construir . El director ejecutivo se pregunta cuantos subconjuntos se pueden obtener en cada caso? $R = 360.360$ subconjuntos de ejecutivos y 3.003 subconjuntos de planificadores
- 19) El presidente de una empresa tiene que seleccionar 4 de sus seis vicepresidentes para que se ocupen de los problemas que surjan . De cuantas formas distintas pueden elegir el vicepresidente? $R = 15$
- 20) Se pregunta a un bebedor empedernido de cerveza que ordene sus preferencia por 5 marcas de cervezas enlatadas. Cuantas ordenaciones pueden resultar? $R = 120$

REVISTAS ELECTRONICAS

1. [Journal of Statistics Education](#). Excelente revista (¡gratuita!) editada por la American Statistical Association sobre educación estadística (a todos los niveles)
2. [Homepage de la American Statistical Association](#). La mayor association de estadísticos, editora de *Journal of Agricultural, Biological, and Environmental Statistics*, *Journal of the American Statistical Association*, *Journal of Statistics Education* y *The American Statistician* entre otras revistas.
3. [Environmental and Ecological Statistics](#)
4. [Community Ecology](#)
5. [Journal of Agricultural, Biological, and Environmental Statistics](#)
6. [Bulletin of the Ecological Society of America](#) (gratuita; contiene artículos de ecología estadística)
7. [Journal of Statistical Software](#) (gratuita)

8. [InterStat \(Statistics on the Internet\)](#) (gratuita)
9. [Probability and Statistics Journals on the Web](#)

ESTADISTICA ON LINE

1. [Aula Virtual de Bioestadística, Universidad Complutense](#)
2. [Curso de bioestadística de la Universidad de Málaga](#)
3. [Apuntes de Bioestadística. Unidad de Bioestadística Clínica del Hospital Ramón y Cajal](#)
4. [Lecciones de Estadística, 5campus.org \(análisis multivariante...\)](#)
5. [Curso de Bioestadística de la Universidad Nacional de Misiones \(Argentina\)](#)
6. [Curso de estadística \(para ingenieros\) de una universidad mexicana](#)
7. [Cursos de estadística de la Universidad de California, Los Angeles](#)
8. [Cursos de estadística de la Universidad de Michigan](#)
9. [Electronic Statistics Textbook](#)
10. [A New View of Statistics](#)
11. [HyperStat Statistics Textbook](#)
12. [Statistics at Square One](#)
13. [Statistics Every Writer Should Know](#)
14. [Introductory Statistics: Concepts, Models, and Applications](#)
15. [Multivariate Statistics: Concepts, Models, and Applications](#)
16. [A complete guide to nonlinear regression](#)
17. [Ordination Methods for Ecologists](#)
18. [Annotated Bibliography of Canonical Correspondence Analysis and related constrained ordination methods 1986-1993](#)
19. [Multivariate Statistics: an Introduction](#)
20. [A glossary of ordination-related terms](#)
21. [Glossary of Statistical Terms and Medical Citations for Statistical Issues](#)
22. [Glossary of over 30 statistical terms](#)
23. [EVSC 503 Applied Statistics for the Environmental Sciences](#)
24. <http://s9000.furman.edu/mellonj/spss1.htm>
25. <http://www.indiana.edu/~statmath/stat/spss/win/index.html>
26. <http://www.utexas.edu/cc/stat/tutorials/spss/SPSS1/Outline1.html>
27. <http://web.uccs.edu/lbecker/SPSS/content.htm>

28. <http://core.ecu.edu/psyc/wuenschk/SPSS/SPSS-Data.htm>
29. <http://www.tulane.edu/~panda2/Analysis2/ahome.html>
30. <http://www.shelf.ac.uk/~scharr/spss/index2.htm>
31. <http://calcnet.mth.cmich.edu/org/spss/index.html>
32. <http://calcnet.mth.cmich.edu/org/spss/toc.htm>
33. <http://www.public.asu.edu/~pythagor/spssworkbook.htm>
34. <http://lib.stat.cmu.edu/>
35. <http://www.stat.ufl.edu/vlib/statistics.html>
36. <http://www.statserv.com/software.html>
37. <http://www.maths.uq.edu.au/~gks/webguide/>
38. <http://www.statistics.com/>
39. <http://www.helsinki.fi/~jpuranen/links.html#stc>
40. <http://www.maths.uq.edu.au/~gks/webguide/free.html>
41. <http://nhsbig.inhs.uiuc.edu/>
42. <http://www.okstate.edu/artsci/botany/ordinate/software.htm>
43. <http://life.bio.sunysb.edu/ee/biometry/>
44. <http://life.bio.sunysb.edu/morph/software.html>
45. <http://pbil.univ-lyon1.fr/ADE-4/ADE-4.html>
46. http://ourworld.compuserve.com/homepages/Rainer_Wuerlaender/statsoft.htm
47. <http://www.stat.auckland.ac.nz/~mja/Programs.htm>
48. <http://it.stlawu.edu/~rlock/maa99/>
49. <http://it.stlawu.edu/~rlock/tise98/java.html>
50. <http://www.stat.vt.edu/~sundar/java/applets/>
51. <http://www.kuleuven.ac.be/ucs/java/index.htm>
52. <http://noppa5.pc.helsinki.fi/koe/>
53. <http://www2.kenyon.edu/people/hartlaub/MellonProject/mellon.html>

Demostraciones Java para el aprendizaje de la estadística

54. *Electronic Textbook (UCLA)*, programa *on-line* de representación y cálculo de funciones de densidad y de distribución (normal, F , ji-cuadrado, números aleatorios...). Equivalente a un libro de tablas

BASES DE DATOS:

1. Political Database of the Americas ... the Western Hemisphere. Base de datos con información política de los 25 países de la hemisferia del oeste. <http://www.georgetown.edu/pdba/>

<http://www.georgetown.edu/pdba/spanish.html>
<http://www.georgetown.edu/pdba/Elecdata/Col/colombia.html>

2.FAOSTAT es una base de datos estadísticos integrada on-line que actualmente contiene más de 1 millón de series anuales internacionales en las siguientes materias: <http://apps.fao.org/inicio.htm>

3.DEPARTAMENTO ADMINISTRATIVO NACIONAL DE ESTADISTICA.
<http://www.dane.gov.co/Enlaces/enlaces.html>
<http://www.dane.gov.co/index.html>
http://www.dane.gov.co/Enlaces/Organismos_Estadisticos/America/america.html
http://www.dane.gov.co/Enlaces/Organismos_Estadisticos/Europa/europa.html
http://www.dane.gov.co/Enlaces/Organismos_Estadisticos/Asia/asia.html
http://www.dane.gov.co/Enlaces/Organismos_Estadisticos/Africa/africa.html

4.. PROEXPORT COLOMBIA promueve las exportaciones colombianas. Apoya y asesora empresarios colombianos ... 091)5242015. Proexport. Quienes Somos Sobre ...
www.proexport.com.co/
<http://www.proexport.com.co/VBeContent/home.asp?Perfil=1>

5. DEPARTAMENTO NACIONAL DE PLANEACION
http://www.dnp.gov.co/03_PROD/PUBLIC/13P_MS.HTM
http://www.dnp.gov.co/03_PROD/BASES/BASES.HTM

6 BANCO DE LA REPUBLICA
<http://www.banrep.gov.co/>
http://www.banrep.gov.co/economia/ctanal1sec_ext.htm#tasa

7. ICFES El Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior **ICFES**
<http://www.icfes.gov.co/>

BIBLIOGRAFÍA

1. Montgomery Douglas y Runger George.(1996), Probabilidad y Estadística aplicada a la Ingeniería., McGraw-Hill, México
2. Montgomery Douglas y Hines William.(1995), Probabilidad y Estadística aplicada a la Ingeniería. y Administración, segunda edición ,CECSA, México
3. Mendenhall William, Wackerly Dennis y Scheaffer Richard (1994), Estadística Matemáticas con Aplicaciones , segunda edición, Grupo Editorial Iberoamerica. M, México
4. Govinden Portus Lincuyan.(1998), Introducción a la Estadística,. McGraw-Hill, Santafé de Bogotá
5. Webster Allen L.(1998), Estadística aplicada a la Empresa y a la Economía, segunda edición, McGraw-Hill, Madrid
6. Kohler Heinz.(1996), Estadística para Negocios y Economía, primera edición ,CECSA, México

7. Martinez Bencardino Ciro (1995), Estadística , sexta edición ,ECOE EDICIONES Santafé de Bogotá.
8. Alvarez C Ricardo (1994), Estadística Fundamental Aplicada, primera edición ,PUBLIADCO, Cali
9. Estadística," Enciclopedia Microsoft® Encarta® 2000. © 1993-1999 Microsoft Corporation.
10. Stockburger David W (1996) Introductory Statistics: Concepts, models an applications, , <http://www.psychstat.smsu.edu/sbk00.htm>
11. Mendoza Duran Carlos. (1995)Probabilidad y Estadística, <http://w3.mor.itesm.mx/~cmendoza/ma835/ma83500.html>
12. Valdés Fernando ,Comprensión y uso de la estadística, <http://www.cortland.edu/flteach/stats/glos-sp.html>
13. Hurtado Minotta Enrique A, Reflexiones para el Currículo, <http://www.geocities.com/soho/atrium/7521/tesis.html>
14. Academic Freedom , www.hrw.org/wr2k/issues-01.htm
15. Gonzalez Felipe, Africa : El silencio de los tambores, www.arrakis.es/~trazeg/gonzalez.html.
16. El año 2000, WWW.arrakis.es/~trazeg/anno2000.html
17. Mendenhall, W.; D.D. Wackerly y R.L. Scheaffer. *Estadística Matemática con Aplicaciones*. Grupo Editorial Iberoamérica. México.
18. Freund, John E. y Gary A. Simon. *Estadística elemental*. Prentice-Hall Hispanoamericana, SA. México, 1994. (8ª edición.)
19. Spiegel, M.R. *Estadística*. McGraw-Hill. México. (Serie Schaum.)
20. <http://www.unl.edu.ar/fave/sei/encuestas/index.html>.
21. Wonnacott, Thomas H. y Ronald J. Wonnacott (1998) *Introducción a la estadística*. Limusa/IPN. México.

ehurtado@usc.edu.co

MODULO II

PROBABILIDAD

2.1 GENERALIDADES

La probabilidad es una rama de la estadística que estudia los experimentos cuyos resultados no se pueden precisar con exactitud antes de realizarlos. La probabilidad se utiliza para expresar cuan probable es determinado evento. La probabilidad se plantea con respecto a algún evento . Un evento en cuestión puede ser que gane el semestre, que consiga trabajo, que obtenga utilidades del 20%, que llueva, que gane la lotería, etc.

La probabilidad de un evento A se representa como $P(A)$ y es un número que va desde 0 hasta 1 (0 a 100%) que indica cuan probable es un evento.

Cuanto mas cerca este el número de 1. tanto mayor es la probabilidad de que el evento ocurra. Cuanto mas cerca este de 0 menor es la probabilidad de que ocurra ; mientras que el evento que se tiene certeza que ocurrirá su probabilidad será de 1.0 (100%).

La probabilidad se puede expresar en decimales, fracciones ó porcentajes principalmente, por ejemplo la probabilidad de que se gradúe Rene el próximo año es del 90% , 0.9 ó 9/10

2.2 ESPACIO MUESTRAL Y EVENTOS

Uno de los conceptos matemáticos fundamentales , utilizados en el estudio de las probabilidades es el de conjunto.

Conjunto es un grupo bien definido de elementos u objetos que tienen ciertas características comunes . Existen dos formas de describir los elementos de un

conjuntos ; una consiste en enumerar todos ó los suficientes elementos de ellos de manera que quede claro que forman parte del conjunto. Una segunda forma consiste en establecer una regla o definir las características comunes de los elementos del conjunto. Consideremos los siguientes ejemplos:

Conjunto A = { Los alumnos del curso de estadística }

Conjunto B = { Miriam, Xiomara, Enrique,..... }

Conjunto C = { todos los enteros positivos < 25 }

La probabilidad solo tiene significado en el contexto de un espacio muestral, que es el conjunto de todos los posibles resultados de una muestra o un experimento.

El espacio muestral de tirar un dado es : $EM = \{ 1,2,3,4,5,6 \}$

El espacio muestral de lanzar una moneda al aire es $EM = \{ \text{cara, sello} \}$

Experimento es toda actividad que genera un conjunto de resultados posibles. El termino experimento sugiere que el resultado es incierto antes de llevarse a cabo las observaciones..

Los resultados de un experimento se denominan eventos . Los eventos son subconjuntos del espacio muestral

El espacio muestral de lanzar un dado y registrar el numero de pares es un subconjunto del espacio muestral de tirar un dado

$EM = \{ 2, 4, 6 \}$

El experimento de tirar una moneda 100 veces y anotar en cuantas ocasiones cayo cara, otro ejemplo podría consistir en inspeccionar las medidas de seguridad contra accidentes de una fabrica , donde el espacio muestral se compone de la cantidad de posibles accidentes o peligros que pudieran descubrirse.

EJEMPLO 1

Escoger un estudiante del curso 5b y registrar su nombre en un espacio muestral?

$EM = \{ \text{Miriam} \}$

EJEMPLO 2

Lanzar un dado y registrar el numero que aparece en la cara superior y sobre el anterior espacio muestral definir los siguientes subconjuntos :

$A = \{ \text{el número es divisible por 3} \} = \{ 3, 6 \}$

$B = \{ \text{el número es divisible por 5} \} = \{ 5 \}$

$C = \{ \text{el número es impar} \} = \{ 1, 3, 5 \}$

$D = \{ \text{el número es par} \} = \{ 2, 4, 6 \}$

2.3 AXIOMAS DE LA PROBABILIDAD

Sea EM el espacio muestral de un determinado experimento, en el cual se define un evento A que tiene como probabilidad $P(A)$.

Para que $P(A)$ sea una función de probabilidad debe cumplir lo siguiente:

- a) La probabilidad del evento A será un número en el campo de los números reales y estará comprendido entre 0 y 1 ó 0 a 100%

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad \text{ó} \quad 0 \leq P(A) \leq 100\%$$

Este principio excluye la posibilidad de que la probabilidad asuma valores negativos o superiores a 1 (100 %)

- b) Si $P(A) = 0$ significa que el evento nunca ocurrirá
- c) Si $P(A) = 1$ indica que con certeza el evento ocurrirá
- d) Si A y B son dos eventos mutuamente excluyentes, es decir, que no ocurren simultáneamente, la probabilidad de ocurrencia del evento A y/o B es igual a la probabilidad de A mas la probabilidad de B

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- e) Si A y B son dos eventos que no son mutuamente excluyentes , la probabilidad de ocurrencia del evento A y/o B es igual a la probabilidad de A mas la probabilidad de B menos la intersección de A y B

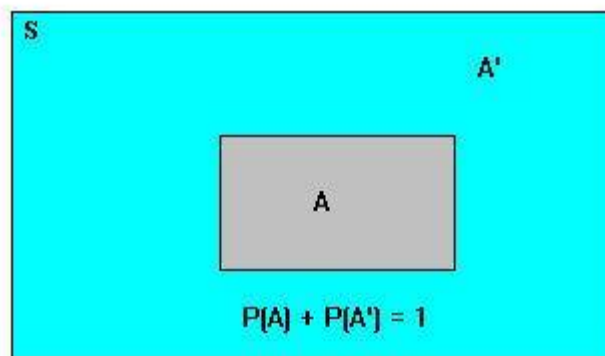
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- f) La probabilidad de que no ocurra un evento A ($P(A)'$) mas la probabilidad que ocurra es igual a 1

$$P(A)' + P(A) = 1$$

Suele ser muy útil representar gráficamente un espacio muestral, dado que esto simplifica la visualización de los elementos del espacio muestral . Esto se puede llevar a cabo utilizando un diagrama de Venn, que indica los espacios muestrales y los eventos mediante círculos, cuadrados o cualquier otra forma geométrica conveniente.

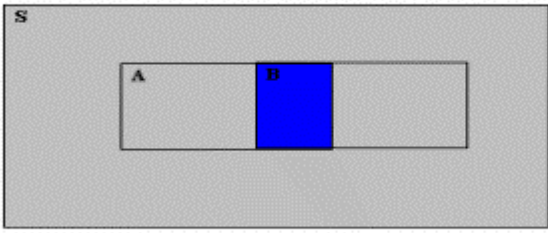
En la grafica siguiente se muestra eventos mutuamente excluyente y no excluyente en un espacio muestral



Usando el applet que aparece en esta dirección podemos calcular probabilidades usando los diagramas de Venn,
[C:\www\ SticiGui Home\Venn Diagrams and Probability.htm](http://C:\www\SticiGui Home\Venn Diagrams and Probability.htm)

Venn Diagrams and Probability

Venn Diagrams



☐ A ☐ A^c

☐ B ☐ B^c

☐ A or B ☒ AB

☐ AB^c ☐ A^cB

☐ S ☐ {}

P(A) (%)

P(B) (%)

P(AB): 5.3%

P(A or B): 24.7%

Venn diagrams are a way of visualizing sets. This applet lets you highlight the set A, the set B, the universal set S, the empty set {}, the complement of A (A^c), the complement of B (B^c), the intersection of A and B (AB), the union of A and B ($A \cup B$), the intersection of the complement of A with B (A^cB), and the intersection of A with the complement of B (AB^c). One can think of the relative area of a set to the area of S as a probability. The picture uses that analogy: the numbers $P(A)$ and $P(B)$ are proportional to the area of A and the area of B, respectively; $P(AB)$ is the area of the intersection of A and B, and $P(A \cup B)$ is the area of the union of A and B.

You can drag the **events** A and B around, which changes the probability of their intersection and of their union. When A and B do not overlap, they are said to be **disjoint or mutually exclusive**. When the probability of the intersection of A and B equals the product of the probability of A and the probability of B (when $P(AB) = P(A) \times P(B)$), A and B are **independent**. Try to drag A or B to make $P(AB) = P(A) \times P(B)$; notice how hard it is to make the overlap just right: independence is a very special relationship between events. The scrollbars let you adjust the probability of A and the probability of B.

2.4 CALCULO DE LA PROBABILIDAD DE UN EVENTO

Existen 3 formas de calcular o estimar la probabilidad de un evento a saber: El enfoque clásico, que se emplea cuando los espacios muestrales tienen resultados igualmente probables; el enfoque empírico basado en la frecuencia relativa de ocurrencia de un evento con respecto a un gran número de ensayos repetidos y el enfoque subjetivo que utiliza estimaciones personales de las probabilidades basado en el grado de confianza acerca de eventos que nunca han ocurrido.

Los dos primeros enfoques se denominan objetivos y el último como su nombre lo indica subjetivo. Seleccionar un enfoque depende de la naturaleza de la situación.

2.4.1 ENFOQUE CLÁSICO

Aquí se considera que todos los eventos o todos los espacios muestrales son equiprobables, es decir, que tienen la misma probabilidad de ocurrencia. generalmente un espacio equiprobable se identifica al decir que la escogencia de cualquier elemento es aleatoria o al azar.

La probabilidad de un evento A se calcula así:

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{\text{casos favorables del evento A}}{\text{casos totales}} \quad \text{ó} \\ P(A) &= \frac{\text{número de resultados asociados con el evento A}}{\text{número total de resultados posibles}} \quad \text{ó} \\ P(A) &= \frac{\text{número de formas en que puede ocurrir A}}{\text{número total de formas en que puede ocurrir EM}} \end{aligned}$$

EJEMPLO 3

Hallar la probabilidad de que al tirar una moneda caiga cara?

DESARROLLO

$$P(\text{CARA}) = \frac{\text{casos favorables del evento CARA}}{\text{casos totales}} = \frac{1}{2}$$

EJEMPLO 4

Calcular la probabilidad de sacar un número par al tirar un dado?

DESARROLLO

$$P(\text{PAR}) = \frac{\text{casos favorables del evento PAR}}{\text{casos totales}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$\text{EM} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = 6$$

$$\text{PAR} = \{2, 4, 6\} = 3$$

EJEMPLO 5

En un curso de estadística de 50 estudiantes , hay 20 mujeres . Calcular la probabilidad de a) escoger una mujer b) escoger un hombre?

DESARROLLO

$$\text{a) } P(M) = \frac{\text{casos favorables del evento M}}{\text{casos totales}} = \frac{20}{50} = 0.4 = 40\%$$

$$\text{b) } P(A_s) = \frac{\text{casos favorables del evento H}}{\text{casos totales}} = \frac{30}{50} = 0.6 = 60 \%$$

$$\text{EM} = \{50 \text{ estudiantes} \}$$

$$M = \{20\} \quad H = \{30\}$$

EJEMPLO 6

Una maquina tiene 3 botones y hay dos secuencia que ponen en funcionamiento la maquina. Determinar la probabilidad de que usted que no sabe operar la maquina, la ponga en funcionamiento?

DESARROLLO

Como el orden es fundamental para poner a operar la maquina, debemos utilizar las permutaciones para hallar el numero de secuencias totales

$$\text{secuencias totales} = {}_3P_2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$$

$$\text{a) } P(\text{poner en funcionamiento}) = \frac{\text{secuencias favorables}}{\text{secuencias totales}} = \frac{2}{6} = 33.3\%$$

EJEMPLO 7

Un distribuidor de computadoras tiene un procedimiento que consiste en tomar una muestra de 4 computadoras por cada lote de 15 unidades. Si encuentra una mala o mas devuelve el lote . Hallar la probabilidad de aceptar un lote que trae 5 malas?

DESARROLLO

$$\text{casos favorables} = {}_{10}C_4 = \frac{10!}{4!(10-4)!} = 210$$

$$\text{casos totales} = {}_{15}C_4 = \frac{15!}{4!(15-4)!} = 1365$$

$$P(\text{aceptar un lote}) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}} = \frac{210}{1365} = 15 \%$$

2.4.2 ENFOQUE DE FRECUENCIA RELATIVA

En este enfoque se utilizan los datos históricos, obtenidos en el pasado en observaciones empíricas. Se tiene en cuenta la frecuencia con la que ha ocurrido un evento en el pasado y se estima la probabilidad de que vuelva a ocurrir a partir de estos datos. Según este enfoque la probabilidad de un evento A se calcula así:

$$P(A) = \frac{\text{número de veces que el evento A ha ocurrido en el pasado}}{\text{número total de ensayos u observaciones}}$$

Obsérvese que este enfoque empírico considera la probabilidad como la proporción o frecuencia relativa en la ocurrencia de un evento. Cuando se use este enfoque es importante tener en cuenta los siguientes puntos:

- La probabilidad obtenida de esta manera es únicamente una estimación del valor real
- Cuanto mayor sea el tamaño de la muestra, tanto mejor será la estimación de la probabilidad
- La probabilidad es propia de solo un conjunto de condiciones idénticas a aquellas en la que se obtuvieron los datos.

EJEMPLO 8

Del análisis de los datos históricos de los nacimientos del último año en la ciudad de Cali, se encontró que de los 10.000 nacimientos registrados, 4.500 de los recién nacidos fueron niños. ¿Cuál es la probabilidad de que cualquier recién nacido tomado al azar sea a) niño b) niña?

DESARROLLO

$$\text{a) } P(\text{niño}) = \frac{\text{número de niños nacidos el año pasado}}{\text{número total de nacimientos}} = \frac{4.500}{10.000} = 0.45 = 45 \%$$

$$\text{b) } P(\text{niña}) = \frac{\text{número de niñas nacidos el año pasado}}{\text{número total de nacimientos}} = \frac{5.500}{10.000} = 0.55 = 55 \%$$

EJEMPLO 9

Enrique AHG Jr, candidato a futuro magnate de las finanzas, reflexiona sobre la compra de un paquete de acciones de XYZ, Cia Ltda., en la bolsa de valores de Occidente. Desea determinar la probabilidad de que a) su precio baje en la sesión de hoy, b) su precio suba en la sesión de hoy y c) Su precio no se altere. Para

resolver lo anterior toma y estudia los datos de las 100 últimas sesiones de la bolsa de occidente y encuentra que en 25 sesiones bajó el precio de las acciones, en 35 sesiones subió y no se alteró en el resto de los días.

DESARROLLO

Basado en los resultado histórico la probabilidad de que en la negociación de hoy ocurra los eventos en consideración son :

- a) $P(\text{precio baje}) = \frac{\text{número de veces que el precio ha bajado}}{\text{número total de observaciones}} = \frac{25}{100} = 0.25 = 25 \%$
- b) $P(\text{precio suba}) = \frac{\text{número de veces que el precio ha subido}}{\text{número total de observaciones}} = \frac{45}{100} = 0.45 = 45 \%$
- c) $P(\text{precio no se altere}) = \frac{30}{100} = 0.30 = 30 \%$

EJEMPLO 10

De acuerdo a la datos suministrados por el Dane , se ha determinado que de un total de 250.000 hombres con 70 años solamente sobreviven un año mas 120.000 hombres. Calcular la probabilidad de que un hombre de 70 años a) viva un año mas? B) no sobreviva?

DESARROLLO

- a) $P(\text{hombre viva un año mas}) = \frac{120.000}{250.000} = 0.48 = 48 \%$
- b) $P(\text{hombre no viva un año mas}) = \frac{130.000}{250.000} = 0.52 = 52 \%$

EJEMPLO 11

La Agencia de protección ambiental en USA , esta tratando de establecer el impacto ambiental de la polución de un molino de papel que se va a construir cerca de un pueblo . Estudios en 15 plantas similares durante el último año arrojaron los siguientes resultados de polución.

Planta N°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Nivel de polución (ppm de SO ₂)	9	15	10	12	11	10	14	19	18	8	20	21	18	15	14

La Agencia define como polución excesiva cuando se tiene una emisión de $\text{SO}_2 \geq 18 \text{ ppm}$ Determinar la probabilidad de que la nueva planta genere una polución excesiva de SO_2 ?

DESARROLLO

$$P(\text{genere polución}) = \frac{\text{plantas con polucion de } \text{SO}_2 \geq 18 \text{ ppm}}{\text{total de plantas}} = \frac{5}{15} = 0.333 = 33.3 \%$$

2.4.3 ENFOQUE SUBJETIVO

Cuando no se dispone de datos históricos y la posibilidad de calcular la probabilidad a partir de un comportamiento anterior no es posible, utilizamos el enfoque subjetivo y nos basamos en nuestra experiencia, creencias y suposiciones para hacer la estimación de que el evento ocurra. Este enfoque es muy utilizado por los hombres de negocios, los abogados, inclusive los médicos, etc. La probabilidad subjetiva es un esfuerzo por cuantificar nuestros sentimientos y/o creencias respecto a un evento que nunca ha ocurrido.

Este enfoque presenta ciertas desventajas tales como:

- La estimación subjetiva suele ser difícil de comprobar si son cuestionadas
- Los prejuicios pueden influir, las ideas preconcebidas respecto a lo que debería ser pueden afectar la objetividad, al igual que los sentimientos acerca de lo que uno quiere que suceda
- Casi siempre es difícil eliminar los prejuicios ya que por lo regular son inconscientes.

La capacidad, la experiencia y actitud profesional pueden ayudar a superar estas dificultades.

2.5 PROBABILIDAD DE APUESTAS CON VENTAJAS

Si la ventaja de que ocurra un evento E se establece en A:B, la probabilidad de ocurrencia es

$$P(E) = \frac{A}{A + B}$$

Si se estima que la ventaja de que un evento o suceso E ocurra es de 4 a 1 y se escribe 4:1, la probabilidad de que ocurra es $P(E) = \frac{4}{4 + 1} = 0.8$

La ventaja de que el evento E no ocurra es de 1:4, decimos que su probabilidad es de $P(\text{no ocurra}) = P(E)' = \frac{1}{4 + 1} = 0.2$

Los jugadores profesionales y los corredores de apuestas confían mucho en las leyes de la probabilidades cuando establecen ventajas en las apuestas sobre los acontecimientos deportivos. Si las apuestas de que América gane la copa libertadores de América se establece en 15:1, significa que si usted es jugador y las apuestas son limpias, tendrá que pagar 15 pesos para ganar 1, es decir que si apuesta por América y el equipo gana, obtendrá 16 pesos, si pierde, perderá los 15 apostados. Si usted apuesta en contra de América ganará 15 pesos si ellos pierden la copa. Los jugadores profesionales no juegan. Siempre establecen la ventaja de las apuestas para asegurarse la ganancia. Si la ventaja de un equipo fuera de 15:1, tendríamos una probabilidad de $P(\text{ganar}) = \frac{15}{15 + 1} = 0.9375$

Por lo tanto la ventaja para la apuesta se establecerá en un nivel mayor que 15:1, por ejemplo 20:1 o 25:1. En su esfuerzo para asegurarse la ganancia los corredores de apuestas establecerán la ventaja en un valor mayor que el

calculado por las probabilidades reales . De ahí que no se pueda determinar la verdadera probabilidad de ganar a partir de la ventaja utilizada para las apuestas porque los jugadores profesionales añadirán alguna cantidad desconocida a la probabilidad real.

EJEMPLO 12

En Buenaventura , la emisora de radio local estableció la ventaja de que lloviera un día cualquiera en 1 a 20 Cual es la probabilidad de que llueva hoy?

DESARROLLO

$$P(\text{ llueva hoy }) = \frac{1}{20 + 1} = 0.0476 = 4.76\%$$

2.6 LEYES DE LAS PROBABILIDADES

Para el calculo de las probabilidades se utilizan frecuentemente dos reglas básicas: la regla de la Adición y la regla de la multiplicación

2.6.1 REGLA DE LA ADICION O DE LA SUMA

Se utiliza para hallar la probabilidad de un evento A o de un evento B puede ser de dos clases según la naturaleza de los eventos o sucesos en consideración:

- Si dos o mas eventos son mutuamente excluyentes , es decir, que uno y solamente uno de ellos puede ocurrir en un solo ensayo, su probabilidad es adictiva y es igual a la suma de las probabilidades de cada evento.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Genericamente podemos decir que la probabilidad total es igual a la sumatoria de las probabilidades de cada uno de los eventos del espacio muestral

$$P(\text{TOTAL}) = \sum_{i=1}^n P_i = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_N = 1$$

- Si los eventos no son mutuamente excluyentes, la probabilidad para los eventos A y B se calcula como la unión de sus probabilidades y es igual la suma de las probabilidades de cada evento menos la probabilidad de su intersección

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Si hubiera 3 elemento A, B y C se calcula así.

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Extensiones mas amplias se hacen del mismo modo

2.6.2 REGLA DE LA MULTIPLICACIÓN

Se utiliza para determinar la probabilidad conjunta de dos o mas eventos y su aplicación depende de la naturaleza de los eventos o sucesos en consideración:

- Si los eventos A y B son eventos independientes, es decir , que la ocurrencia del uno no afecta la ocurrencia del otro, la probabilidad de que

ocurran conjuntamente es igual al producto de las probabilidades de cada uno de los eventos.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Genericamente podemos decir que la probabilidad total de dos o mas eventos independientes es igual a el producto de las probabilidades de cada uno de los eventos del espacio muestral

$$P(TOTAL) = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \dots P_N$$

- Dos a mas eventos son dependientes si la ocurrencia de uno sirve para predecir la ocurrencia del otro, es decir , la probabilidad del segundo depende de la primero y la del tercero de la del segundo y así sucesivamente. Su probabilidad se calcula como el producto de sus probabilidades individuales. Los requisitos previos de que hayan ocurridos los eventos anteriores se basa en el principio de la probabilidad condicional, que representa la probabilidad de que ocurra un suceso o evento siempre que o a condición de que otro determinado suceso haya ocurrido ya

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/AB)$$

2.7 PROBABILIDAD CONDICIONAL

Dados dos eventos A y B definidos sobre el mismo espacio muestral , su probabilidad condicional dada por $P(A/B)$ corresponde a la probabilidad de ocurrencia del evento A una vez haya ocurrido el evento B y se lee la probabilidad de A dado B y se calcula así:

$$P(A/B) = \frac{\text{casos favorables de } A \cap B}{\text{casos favorables de B}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \rightarrow P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B)$$

$$P(A/B) = \frac{\text{casos favorables de } B \cap A}{\text{casos favorables de A}} = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \rightarrow P(B \cap A) = P(A/B) \cdot P(A)$$

EJEMPLO 13

Hallar la probabilidad de que al tirar un dado se obtenga un 5 ó un 2?

DESARROLLO

$$P(5 \cup 2) = P(5) + P(2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 33.3\%$$

EJEMPLO 14

En una caja hay 16 bolas de 4 colores, 3 azules , 6 negras, 2 blancas y verdes. Que probabilidad tenemos de ganar o perder si las premiadas son las blancas y las azules?

DESARROLLO

$$P(\text{ganar}) = P(\text{blancas} \cup \text{azules}) = P(B) + P(A) = \frac{2}{16} + \frac{3}{16} = \frac{5}{16} = 0.3125 = 31.25\%$$

$$P(\text{perder}) = 1 - p(\text{ganar}) = 1 - 0.3125 = 0.6875 = 68.75\%$$

EJEMPLO 15

6 corredores A, B, C, D, E y F compiten entre si frecuentemente y han ganado respectivamente 35%, 24%, 15%, 14%, 7% y 5%. En la próxima carrera cual será el espacio muestral, que valores podemos asignar a los puntos muestrales y cual será la probabilidad de que pierda A?

DESARROLLO

ESPACIO MUESTRAL = EM = {A, B, C, D, E, F} = {35%, 24%, 15%, 14%, 7%, 5%}

La probabilidad de que pierda A es .

$$P(A') = 100 - P(A) = 100 - 35 = 65\%$$

EJEMPLO 16

Un estudio de una compañía de seguros, revela que la población de un país puede clasificarse según sus edades como sigue: Un 30% menores o iguales a 15 años, un 20% entre 16 y 30 años, un 25% entre 31 y 45 años, un 10% entre 46 y 60 años y un 15% mayores de 61 años. Suponga que se puede elegir un individuo de tal manera que cualquier habitante pueda ser elegido. Empleando la información, describir el espacio muestral, asignar valores a los puntos muestrales y calcular la probabilidad de que un individuo sea mayor de 30 años?

DESARROLLO

$$EM = \{ \leq 15, 16 - 30, 31 - 45, 46 - 60, \geq 61 \}$$

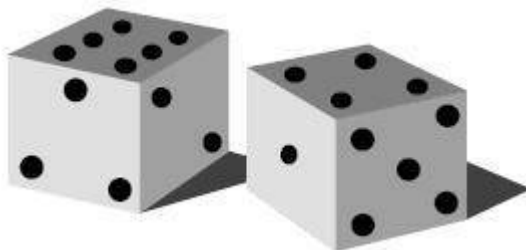
$$EM = \{30\%, 20\%, 25\%, 10\%, 15\% \}.$$

$$P(>30) = P(31 - 45) + P(46 - 60) + P(\geq 61) = 25 + 10 + 15 = 50\%$$

EJEMPLO 17

Describir el espacio muestral para una tirada de un par de dados y determinar a partir de el de que la suma de los dados sea 5 o 10?

DESARROLLO



El espacio muestral EM esta conformado por todas las parejas ordenadas de puntos que se puedan obtener al combinar los dados. Estas son 36 parejas y la probabilidad de cada pareja o punto muestral es de 1/36

1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6
3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6
4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6

5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6
6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6

$$P(5 \cup 10) = P(5) + P(10) = \frac{4}{36} + \frac{3}{36} = \frac{7}{36} = 0.1944 = 19.44\%$$

EJEMPLO 18

Entre 200 empleados de un departamento hay 150 graduados, 60 del total consagran parte de su tiempo por lo menos a trabajos de estadística y 40 de los 150 graduados dedican parte de su tiempo por lo menos a trabajos de estadística. Si se toma al azar uno de los empleados, cual es la probabilidad de que no sea graduado y que no trabaje en estadística?

DESARROLLO

USANDO EL DIAGRAMA DE VENN TENEMOS:

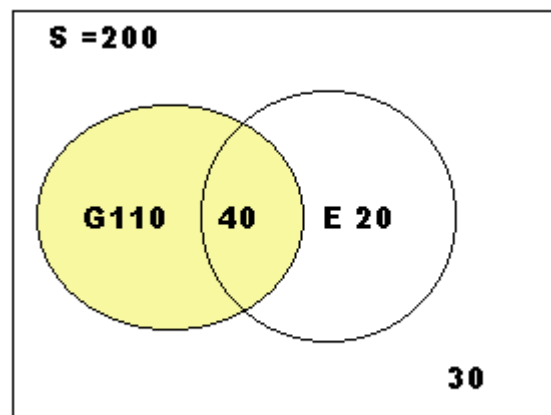
$$EM = \{200\}$$

$$GRADUADOS = G \{150\}$$

$$TRABAJAN EN ESTADISTICA = E = \{60\}$$

$$GRADUADOS QUE TRABAJAN EN ESTADISTICA = G \cap E = \{40\}$$

$$P(G \cup E)' = \frac{30}{200} = 0.15 = 15\%$$



Este ejemplo, también lo podemos resolver utilizando la ley de la adición para eventos que no son mutuamente excluyentes

$$P(G \cup E) = P(G) + P(E) - P(G \cap E) = \frac{150}{200} + \frac{60}{200} - \frac{40}{200} = \frac{170}{200} = 0.85 = 85\%$$

$$P(G \cup E)' = 100 - 85 = 15\%$$

EJEMPLO 19

El 35% de los votantes registrados en Buenaventura son mujeres y 70 % de ellas votaron en la ultima elección presidencial . Suponiendo que estos dos eventos son independientes . Hallar la probabilidad de seleccionar aleatoriamente de un lista global a una mujer que haya votado en la ultima elección presidencial?

DESARROLLO

$$P(\text{MUJER Y HALLA VOTADO}) = P(M \cap V)$$

$$P(M \cap V) = P(M) \cdot P(V) = 0.35 \cdot 0.70 = 0.245 = 24.5\%$$

EJEMPLO 20

Enrique llega tarde a su casa para cenar el 45% de las veces . La cena se retrasa el 20% de las veces . Si los dos sucesos no están relacionados, que probabilidad hay de que los dos sucesos ocurran?

DESARROLLO

$$P(\text{ENRIQUE SE RETRASE Y LA CENA SE RETRASE}) = P(E \cap C)$$

$$P(E \cap C) = P(E) \cdot P(C) = 0.45 \cdot 0.20 = 0.09 = 9\%$$

EJEMPLO 21

Hallar la probabilidad de sacar 3 ases sucesivamente de una baraja de 52 cartas sin volverlos a incluir en la baraja?

DESARROLLO

Como Estos son eventos dependiente su probabilidad se calcula así.

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P\left(\frac{A_2}{A_1}\right) \cdot P\left(\frac{A_3}{A_1 A_2}\right) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{2}{50} = 0.018 \%$$

EJEMPLO 22

En un reinado de belleza compiten 8 rubias, 3 negras y 9 trigueñas . Si se seleccionan al azar 3 de ellas para una entrevista en el canal de mayor audiencia . Determinar la probabilidad de que :

- a) las 3 sean rubias
- b) las 3 sean negras
- c) 2rubias y una negra
- d) Al menos una negra
- e) Sean una de cada color
- f) Salgan en el orden rubia , negra y trigueña.

DESARROLLO

$P(R)$ = Probabilidad de escoger una rubia

$P(N)$ = Probabilidad de escoger una negra

$P(T)$ = Probabilidad de escoger una trigueña

$P(R_1)$ = Probabilidad de que la primera sea rubia

$P(R_2)$ = Probabilidad de que la segunda sea rubia

$P(R_3)$ = Probabilidad de que la tercera sea rubia.

$$P(R_1, R_2, R_3) = P(R_1) \cdot P(R_2/R_1) \cdot P(R_3/R_1R_2) = \left(\frac{8}{20}\right) \left(\frac{7}{19}\right) \left(\frac{6}{18}\right) = \frac{14}{285} = 4.9\%$$

Lo podemos resolver utilizando el enfoque clasico con las combinaciones así:

$$P(3R) = \frac{\text{numero de escogencia de 3 entre 8}}{\text{número de selecciones de 3 entre 20}} = \frac{{}_8C_3}{{}_{20}C_3} = \frac{14}{285} = 4.9\%$$

b) Teniendo en cuenta que son eventos dependientes tenemos:

$$P(N_1, N_2, N_3) = P(N_1) \cdot P(N_2/N_1) \cdot P(N_3/N_1N_2) = \left(\frac{3}{20}\right) \left(\frac{2}{19}\right) \left(\frac{1}{18}\right) = 0.09\%$$

También lo podemos resolver utilizando el enfoque clasico con las combinaciones así:

$$P(3N) = \frac{\text{numero de escogencia de 3 entre 3}}{\text{número de selecciones de 3 entre 20}} = \frac{{}_3C_3}{{}_{20}C_3} = 0.09\%$$

c) Teniendo en cuenta que son eventos dependientes tenemos:

$$\begin{aligned} P(2R1N) &= P(R1R2N3) \cup P(R1N2R3) \cup P(N1R2R3) = \\ &= \left(\frac{8}{20}\right) \left(\frac{7}{19}\right) \left(\frac{3}{18}\right) + \left(\frac{8}{20}\right) \left(\frac{3}{19}\right) \left(\frac{7}{18}\right) + \left(\frac{3}{20}\right) \left(\frac{8}{19}\right) \left(\frac{7}{18}\right) = 3 \left(\frac{8}{20}\right) \left(\frac{7}{19}\right) \left(\frac{3}{18}\right) = 7.4\% \end{aligned}$$

También lo podemos resolver utilizando el enfoque clasico con las combinaciones así:

$$P(2R1N) = \frac{(\text{casos de 2 rubias entre 8})(\text{casos 1 negra entre 3})}{{}_{20}C_3} = \frac{({}_8C_2)({}_3C_1)}{{}_{20}C_3} = 7.4\%$$

$$d) P(\text{ninguna negra}) = P(N)' = \frac{({}_{17}C_3)}{{}_{20}C_3} = 59.6\%$$

$$P(\text{al menos una negra}) = 100 - P(\text{ninguna negra}) = 100 - 59.6 = 40.4\%$$

$$e) P(\text{sacar una de cada color}) = P(RNT) = \frac{({}_8C_1)({}_3C_1)({}_9C_1)}{{}_{20}C_3} = 18.9\%$$

$$f) P(\text{sacar una de cada color en el siguiente orden :RNT}) = \left(\frac{8}{20}\right) \left(\frac{3}{19}\right) \left(\frac{9}{18}\right) = 3.2\%$$

EJEMPLO 23

El juego del LOTTO DE Puerto Rico consisten acertar 6 números entre el 1 y el 38 . El primer premio se otorga a los que aciertan los 6 números , el segundo premio a los que aciertan 5 de los 6 números y el tercer premio a los que aciertan 4 de los 6 números . Si una persona compra un boleto del Lotto. Cual es la probabilidad de que se gane :

- El primer premio?
- El segundo premio?
- El tercer premio?

DESARROLLO

$$a) \text{ casos favorables} = {}_6C_6 = \frac{6!}{6!(6-6)!} = 1$$

$$\text{casos totales} = {}_{38}C_6 = \frac{38!}{6!(38-6)!} = 2.760.681$$

$$P(G^{1\text{er premio}}) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}} = \frac{1}{2.760.681} = 0.00000036$$

$$b) P(G^{2^\text{o} \text{ premio}}) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}} = \frac{({}_6C_5)({}_{32}C_1)}{{}_{38}C_6} = \frac{192}{2.760.681} = 0.000069$$

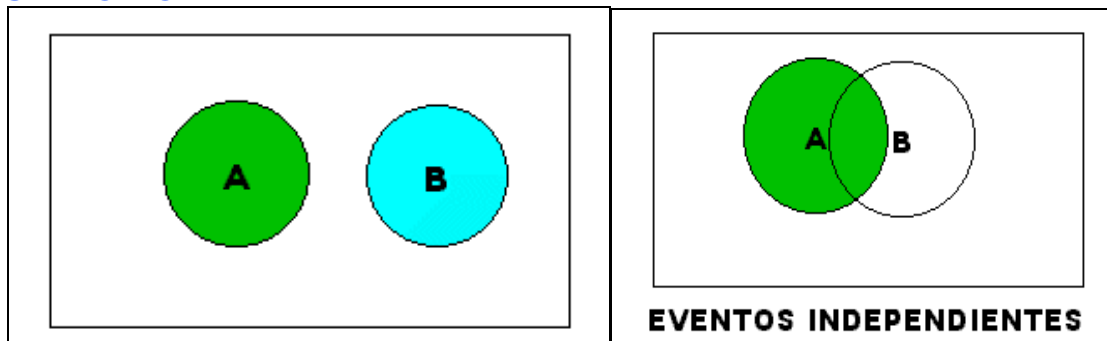
$$c) P(G^{3^\text{er premio}}) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}} = \frac{({}_6C_4)({}_{32}C_2)}{{}_{38}C_6} = \frac{7440}{2.760.681} = 0.00269$$

EJEMPLO 24

Si A y B son eventos tales que $P(A \cap B) = 0.75$ y $P(B) = 0.50$. Hallar $P(A)$

- a) Si A y B son eventos mutuamente excluyentes?
- b) Si A y B son eventos independientes?
- c) Si el evento B esta contenido en A?

DESARROLLO



a) EVENTOS MUTUAMENTE

EXCLUYENTE $\Rightarrow P(A \cap B) = 0$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) + P(A \cap B)$$

$$P(A) = P(A \cup B) - P(B) = 0.75 - 0.50 = 0.25$$

b) EVENTOS INDEPENDIENTES

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

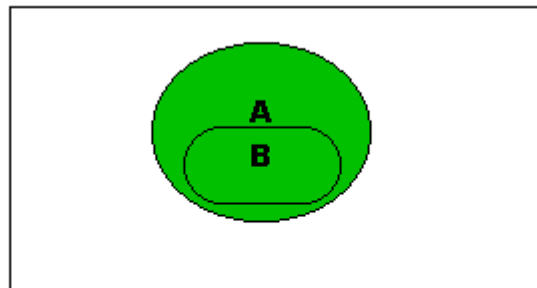
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

$$P(A \cup B) - P(B) = P(A) - P(A)P(B)$$

$$0.75 - 0.5 = P(A) - P(A)0.5 = 0.5P(A)$$

$$P(A) = \frac{0.75 - 0.5}{0.5} = 0.5$$



EVENTO B CONTENIDO EN A

c) SI $B \subset A \Rightarrow P(B \cup A) = P(A) = 0.75$

EJEMPLO 25

América y Cali juegan 12 partidos de fútbol. América gana 6, Cali gana 4 y 2 salen empatados. Acuerdan jugar un torneo relámpago de 3 partidos . Hallar la probabilidad de que :

- a) América gane los 3 partidos
- b) Empatén en dos de ellos
- c) América y Cali ganen alternadamente
- d) Cali gane por lo menos 1 partido

DESARROLLO

		P(A ₁) = Probabilidad de que América gane el primer partido
2		el segundo partido
3		el tercer partido
1		que empaten el primer partido
2		segundo partido
		el tercer partido
1		primer partido
		segundo partido
3		tercer partido

P(A₁) = Probabilidad de que América gane el primer partido

Utilizando el enfoque de frecuencia relativa a partir de los datos históricos obtenemos lo siguiente:

$$P(A) = \text{Probabilidad de que América gane el cualquier partido} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$P(E) = \text{Probabilidad de que empaten cualquier partido} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$P(C) = \text{Probabilidad de que Cali gane cualquier partido} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

a) Se asume que los partidos son eventos independientes por lo tanto lo calculamos así:

$$P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) \cdot P(A_1) \cdot P(A_1) = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} = 12.5\%$$

$$b) P(2\text{empate}) = P(E_1 E_2 E_3') \text{ ó } P(E_1 E_2' E_3) \text{ ó } P(E_1' E_2 E_3) = 3 P(E_1 E_2 E_3')$$

$$= 3 P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot P(E_3') = 3 \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{5}{6}\right) = 6.9\%$$

$$c) P(\text{AyC ganen alternadamente}) = P(ACA) \text{ ó } P(CAC)$$

$$= P(A_1) \cdot P(C_2) \cdot P(A_3) + P(C_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{5}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{5}{3}\right) = 13.88\%$$

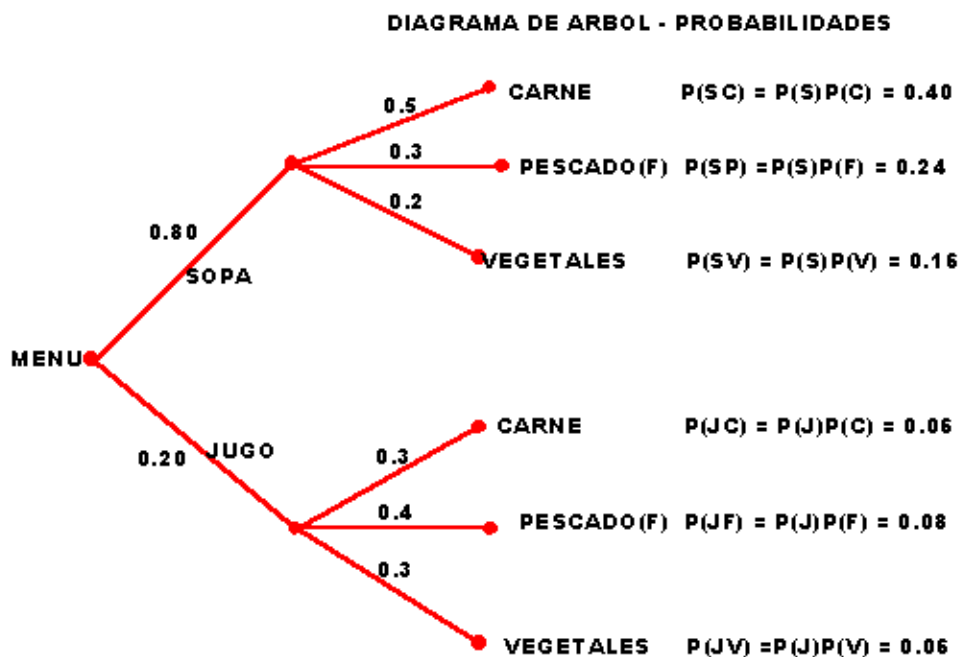
$$d) P(\text{Cali pierde los 3 partidos}) = P(C_1' C_2' C_3') = \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right) = 29.63\%$$

$$P(\text{Cali al menos gane un partido}) = 100 - P(\text{pierde los 3 partidos}) = 100 - 29.63 = 70.37 \%$$

2.8 ÁRBOLES DE PROBABILIDADES

Cuando se tiene que calcular las probabilidades de varios eventos conjuntos, suele ser muy útil utilizar un árbol de probabilidades. Un árbol de probabilidades o diagrama de árbol indica todas las probabilidades asociadas a un conjunto completo de eventos específicos. Una vez dibujado el árbol, podemos tomar de él cualquiera de las probabilidades que nos interesen. En siguiente gráfico se puede

observar un diagrama de árbol en donde se muestran las diferentes posibilidades de un menú que ofrece como entrada sopa y jugo donde el 80% de los clientes prefieren sopa y el 20% jugo. De los que piden sopa, el 50% prefiere carne, el 30% pescado y el 20% vegetales como plato principal. De los que prefieren jugo, el 30% prefiere carne, el 40% pescado y el 30% vegetales. También podemos apreciar la distribución de probabilidades para cada rumbo a través del árbol como producto de las probabilidades de cada rama. Observe que la suma total de las probabilidades es igual 1.0 (100%). Si queremos saber la probabilidad de que un cliente escoja carne tenemos $P(\text{carne}) = P(\text{SC}) + P(\text{JC}) = 0.40 + 0.06 = 0.46$



2.9 TEOREMA DE BAYES

Es una técnica que se utiliza para verificar las estimaciones iniciales de la probabilidad basado en los datos de la muestra. La esencia del teorema de Bayes es la revisión de las estimaciones iniciales de la probabilidad a priori, dada la evidencia de la muestra. Las estimaciones revisadas reciben el nombre de probabilidades a posteriori. Las bases para la verificación son los resultados de una muestra particular más el conocimiento de las probabilidades condicionales, es decir, las probabilidades respecto a cada resultado muestral, suponiendo un estado específico de la naturaleza.

Dado un número de estados de naturaleza de cada uno con uno ó mas resultados o eventos de muestreo posible asociado con ellos cuya representación tabular es.

	E₁	E₂	.	.	.	E_j
EM₁	P(E ₁ /EM ₁)	P(E ₂ /EM ₁)	.	.	.	P(E _j /EM ₁)
EM₂	P(E ₁ /EM ₂)	P(E ₂ /EM ₂)	.	.	.	P(E _j /EM ₂)
.
.
.
EM_i	P(E ₁ /EM _i)	P(E ₂ /EM _i)	.	.	.	P(E _j /EM _i)

La probabilidad de que un resultado muestral, por ejemplo **E₂** ocurra como consecuencia de un estado particular de la naturaleza , digamos **EM₁** se puede calcular así:

$$P(EM_1/E_2) = \frac{P(EM_1) \cdot P(E_2/EM_1)}{P(EM_1) \cdot P(E_2/EM_1) + P(EM_2) \cdot P(E_2/EM_2) + \dots + P(EM_i) \cdot P(E_2/EM_i)}$$

En terminos generales sería :

$$P(EM_i/E_j) = \frac{P(EM_i) \cdot P(E_j/EM_i)}{P(EM_1) \cdot P(E_j/EM_1) + P(EM_2) \cdot P(E_j/EM_2) + \dots + P(EM_i) \cdot P(E_j/EM_i)}$$

EJEMPLO 26

Se tienen 4 urnas con 10 bolas cada una de ella, tal como se muestra en la tabla . Se elige una en forma arbitraria y de ella se saca una bola. Si la bola es roja, cual es la probabilidad de que se halla sacado de la urna B.

URNA	COLORES	DE	LAS	BOLAS
	ROJA	BLANCA	AZUL	TOTAL
A	1	6	3	10
B	6	2	2	10
C	8	1	1	10
D	0	6	4	10

DESARROLLO

Para resolver este problemas necesitamos conocer dos cosas , la primera es estimar la probabilidad a priori al seleccionar cada urna y la calculamos utilizando

el enfoque clásico, la segunda consiste en calcular la probabilidad de que el evento en cuestión (bola roja) ocurra.

PROBABILIDAD A PRIORI	URNA	P(ROJA)	P(BLANCA)	P(AZUL)	TOTAL
0.25	A	0.1	0.6	0.3	1.0
0.25	B	0.6	0.2	0.2	1.0
0.25	C	0.8	0.1	0.1	1.0
0.25	D	0	0.6	0.4	1.0

La probabilidad de sacar bola roja de la urna B es :

$$P(B/ROJA) = \frac{(0.25)(0.60)}{(0.25)(0.10) + (0.25)(0.60) + (0.25)(0.80) + (0.25)(0.00)} = 0.4$$

Las probabilidades de sacar bola roja para cada una de las otras urnas son :

$$P(A/ROJA) = \frac{(0.25)(0.10)}{(0.25)(0.10) + (0.25)(0.60) + (0.25)(0.80) + (0.25)(0.00)} = 0.067$$

$$P(C/ROJA) = \frac{(0.25)(0.80)}{(0.25)(0.10) + (0.25)(0.60) + (0.25)(0.80) + (0.25)(0.00)} = 0.533$$

$$P(D/ROJA) = \frac{(0.25)(0.00)}{(0.25)(0.10) + (0.25)(0.60) + (0.25)(0.80) + (0.25)(0.00)} = 0.0$$

$$P(TOTAL) = P(A/ROJA) + P(B/ROJA) + P(C/ROJA) + P(D/ROJA) = 0.4 + 0.067 + 0.533 + 0.0 = 1.0$$

Los resultados de las pruebas son considerados como evidencia de la muestra.

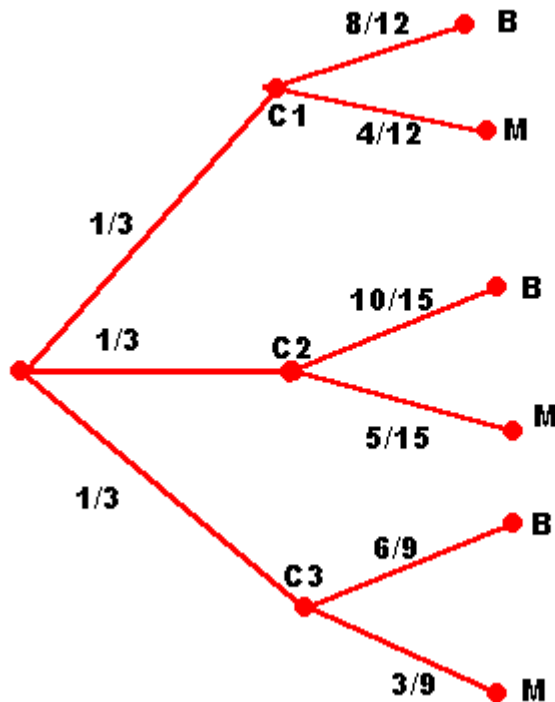
EJEMPLO 27

Se tienen 3 cajas así : La caja 1 tiene 12 artículos de los cuales 4 son malos; la caja 2 tiene 15 artículos de los cuales 5 son malos y la caja 3 tiene 9 artículos de los cuales 3 son malos . a) Cual es la probabilidad de escoger un articulo malo b) Cual es la probabilidad de escoger un articulo malo de la caja 1, de la caja2, de la caja 3 ?

DESARROLLO

Probabilidad a priori		P(B)	P(M)
P(C1) = 1/3	Caja 1	8/12	4/12
P(C2) = 1/3	Caja 2	10/15	5/15
P(C3) = 1/3	Caja 3	6/9	3/9

DIAGRAMA DE ARBOL



$$a) P(M) = P(C1) \cdot P(M1) + P(C2) \cdot P(M2) + P(C3) \cdot P(M3)$$

$$P(M) = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{12}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{5}{15}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{9}\right) = \left(\frac{1}{3}\right) = 0.333 = 33.3\%$$

La probabilidad de sacar un artículo malo de la caja 1 es

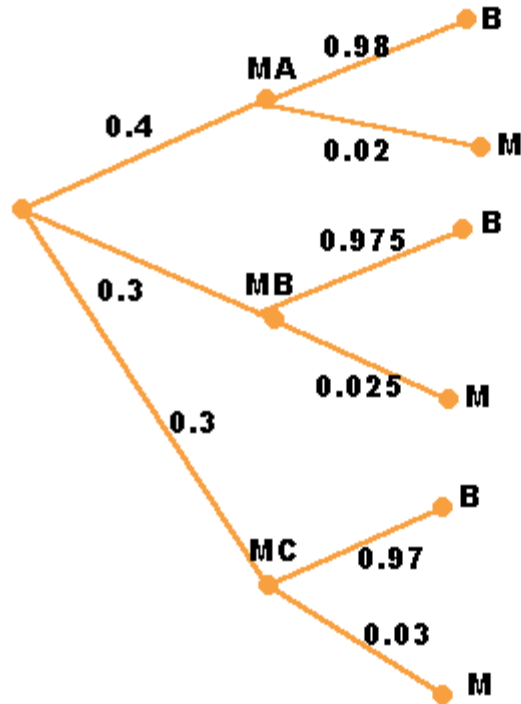
$$P(C1/M) = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{12}\right)}{\left(\frac{1}{3}\right)} = \left(\frac{1}{3}\right) = 0.333 = 33.3\%$$

EJEMPLO 28

Tres maquinas producen piezas fundidas de cobre . La maquina A produce el 2% de las piezas defectuosas ; la maquina B el 2.5% y la maquina C el 3% . La maquina A produce el 40% de la producción total y el resto lo producen las maquinas B y C en partes iguales. Un inspector de control de calidad examina una pieza fundida y determina que no esta defectuosa .Calcular la probabilidad de que :

- dicha pieza haya sido producida por cada maquina?
- de seleccionar una pieza defectuosa ?

DESARROLLO



Probabilidad apriori		P(B)	P(M)
P(MA) = 0.4	Maquina A	0.98	0.02
P(MB) = 0.3	Maquina B	0.975	0.025
P(MC) = 0.3	Maquina C	0.97	0.03

a) Las probabilidades de que la pieza no defectuosa (B) haya sido producida por cada maquina son :

$$P(MA/B) = \frac{(0.4) \cdot (0.98)}{(0.4) \cdot (0.98) + (0.3) \cdot (0.975) + (0.3) \cdot (0.97)} = 40.2\%$$

$$P(MB/B) = \frac{(0.3) \cdot (0.975)}{(0.4) \cdot (0.98) + (0.3) \cdot (0.975) + (0.3) \cdot (0.97)} = 30\%$$

$$P(MC/B) = \frac{(0.3) \cdot (0.97)}{(0.4) \cdot (0.98) + (0.3) \cdot (0.975) + (0.3) \cdot (0.97)} = 29.8\%$$

b) La probabilidad de seleccionar una pieza defectuosa se calcula así:

$$P(D) = (0.4) \cdot (0.02) + (0.3) \cdot (0.025) + (0.3) \cdot (0.03) = 0.0245 = 2.45\%$$

Tambien se puede calcular así:

$$P(D) = 1 - P(B) = 1 - ((0.4) \cdot (0.98) + (0.3) \cdot (0.975) + (0.3) \cdot (0.97)) = 1 - 0.9755 = 0.0245 = 2.45\%$$

EJEMPLO 29

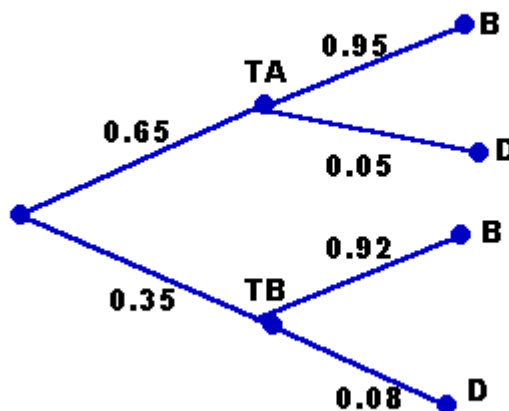
En sus esfuerzos por contener la ola de importaciones , los fabricantes gringos de automóviles han tomado medidas para mejorarla calidad y la fiabilidad de sus coches . Automobile News , publicación comercial muy leída dentro del sector , describía el procedimiento usado en una fabrica de la GM que producía baterías de coches Delco para detectar y eliminar productos defectuosos . En la fabrica se trabaja en dos turnos , uno A de mañana (8:00 a 4:30 de la tarde) y otro B(5:30 de la tarde a medianoche) para producir baterías.

El departamento de control de calidad realiza inspecciones periódicas de las baterías después de haberlas tenido inactivas durante seis meses como mínimo para determinar si mantiene la carga. El turno de la mañana produce el 65% de todas las baterías y el de la tarde el resto. Estudios previos del departamento de control de calidad habían revelado que el 5% de las baterías producidas por el turno A salían defectuosas , mientras que las producidas durante el turno B salían defectuosas en un 8%. Durante una inspección sobre el terreno , el director de la fabrica, eligió una batería al azar y la encontró defectuosa . Dado que era defectuosa , quiere conocer:

- la probabilidad de que la batería fuera producida por el turno A?
- La probabilidad de que fuera producida por el turno B?

DESARROLLO

DIAGRAMA DE ARBOL



Probabilidad a priori		P(B)	P(D)
P(TA) = 0.65	TURNOS A	0.95	0.05
P(TB) = 0.35	TURNOS B	0.92	0.08

a) La probabilidad de que la pieza defectuosa (D) fuera producida en el turno A

$$P(TA/D) = \frac{(0.65) \cdot (0.05)}{(0.65) \cdot (0.05) + (0.35) \cdot (0.08)} = 54\%$$

b) La probabilidad de que la pieza defectuosa (D) fuera producida en el turno B

$$P(TB/D) = \frac{(0.35) \cdot (0.08)}{(0.65) \cdot (0.05) + (0.35) \cdot (0.08)} = 46\%$$

Nótese que a pesar de que a pesar del alto índice de defectos del turno B, es mas probable que la batería defectuosa fuera fabricada en el turno A.

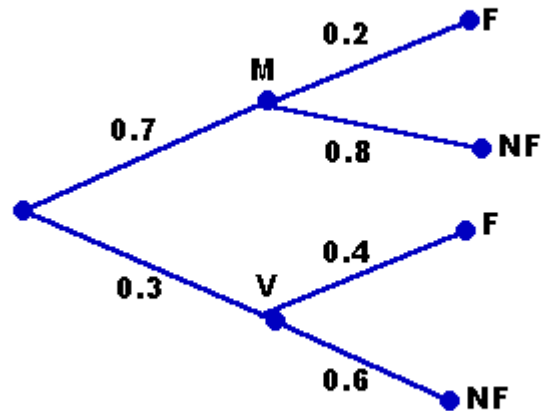
EJEMPLO 30

El 70% de los pacientes de un hospital son mujeres y el 20% de ellas son fumadoras. Por otro lado el 40% de los pacientes hombres son fumadores. Se elige al azar un paciente del hospital :

- a) Cual es la probabilidad de que sea fumador?
- b) Cual es la probabilidad de que no sea fumador?
- c) Cual es probabilidad de que sea mujer y fumadora?
- d) Cual es la probabilidad de que sea hombre no fumador?

DESARROLLO

DIAGRAMA DE ARBOL



a) $P(F)$ = PROBABILIDAD QUE EL PACIENTE SEA FUMADOR

$$P(F) = (0.7)(0.2) + (0.3)(0.4) = 0.26$$

b) $P(NF)$ = PROBABILIDAD QUE EL PACIENTE SEA NO FUMADOR

$$P(NF) = 1 - P(F) = 1 - 0.26 = 0.74$$

c) $P(M/F)$ = PROBABILIDAD QUE SEA MUJER

Y FUMAR

$$P(M/F) = \frac{P(M \cap F)}{P(F)} = \frac{(0.7) \cdot (0.2)}{(0.26)} = 0.5385$$

d) $P(V/NF)$ = PROBABILIDAD QUE SEA HOMBRE

Y NO FUMAR

$$P(V/NF) = \frac{P(V \cap NF)}{P(NF)} = \frac{(0.3) \cdot (0.6)}{(0.74)} = 0.2432$$

EJEMPLO 31

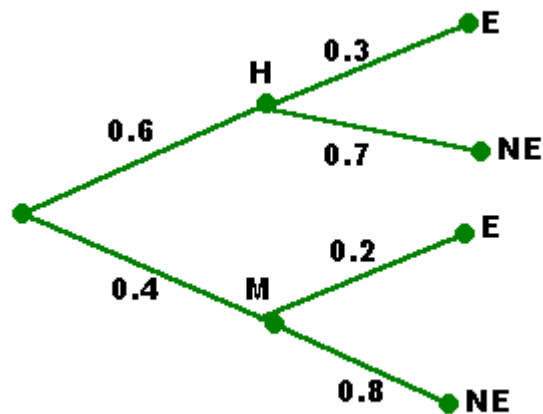
En la Usaca el 30% de los hombres y el 20% de las mujeres estudian estadística . Las mujeres constituyen el 40% de total de los estudiantes. Se selecciona al azar un estudiante:

- Halle la probabilidad de que el estudiante estudie estadística?
- Halle la probabilidad de que el estudiante no estudie estadística?

- c) Si el estudiante dice que estudia estadística , cual es la probabilidad de que sea mujer?
- d) Si el estudiante dice que estudia estadística , cual es la probabilidad de que sea hombre?
- e) Si el estudiante dice que no estudia estadística , cual es la probabilidad de que sea mujer?
- f) Si el estudiante dice que no estudia estadística , cual es la probabilidad de que sea hombre?

DESARROLLO

DIAGRAMA DE ARBOL



a) $P(E)$ = PROBABILIDAD QUE ESTUDIE ESTADISTICA

$$P(E) = (0.6)(0.3) + (0.4)(0.2) = 0.26$$

b) $P(E)$ = PROBABILIDAD QUE NO ESTUDIE ESTADISTICA

$$P(NE) = (0.6)(0.7) + (0.4)(0.8) = 0.74$$

TAMBIEN SE PUEDE CALCULAR ASI :

$$P(NE) = 1 - P(E) = 1 - 0.26 = 0.74$$

c) $P(M/E)$ = PROBABILIDAD QUE SEA MUJER
Y ESTUDIE ESTADISTICA

$$P(M/E) = \frac{P(M \cap E)}{P(E)} = \frac{(0.4) \cdot (0.2)}{(0.26)} = 0.3077$$

d) $P(H/E)$ = PROBABILIDAD QUE SEA HOMBRE
Y ESTUDIE ESTADISTICA

$$P(H/E) = \frac{P(H \cap E)}{P(E)} = \frac{(0.6) \cdot (0.3)}{(0.26)} = 0.6923$$

e) $P(M/NE)$ = PROBABILIDAD QUE SEA MUJER
Y NO ESTUDIE ESTADISTICA

$$P(M/NE) = \frac{P(M \cap NE)}{P(NE)} = \frac{(0.4) \cdot (0.8)}{(0.74)} = 0.4324$$

f) $P(H/NE)$ = PROBABILIDAD QUE SEA HOMBRE
Y NO ESTUDIE ESTADISTICA

$$P(H/NE) = \frac{P(H \cap NE)}{P(NE)} = \frac{(0.6) \cdot (0.7)}{(0.74)} = 0.5676$$

2.10 PROCESOS ESTOCASTICOS

Un proceso estocástico es aquel en el cual se representan todos y cada uno de los pasos necesarios para llevar a cabo una actividad, además de las formas o maneras en que cada uno de los pasos puede ser realizado y sus respectivas probabilidades. En otras palabras cualquier proceso en el que se involucren probabilidades es un proceso estocástico

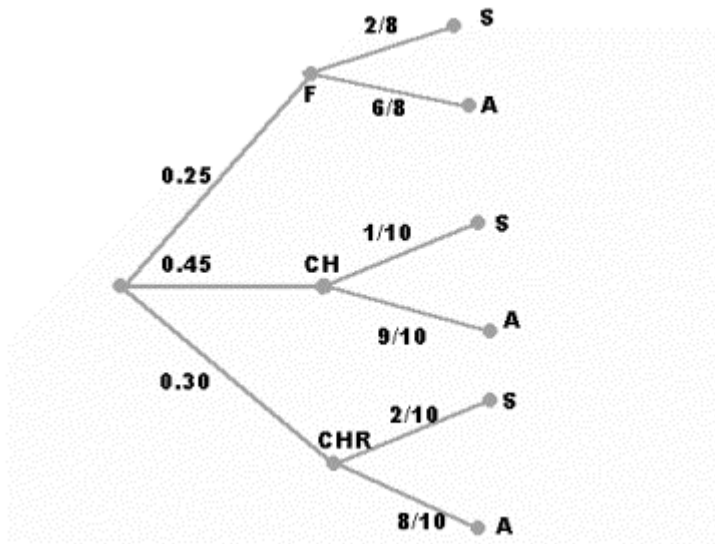
EJEMPLO 32

En un lote de autos usados, el 25% son de la marca Ford, el 45% son Chevrolet y el 30% son Chrysler, de los cuales 2 de cada 8 Ford son estándar, 1 de cada 10 autos Chevrolet y 2 de cada 10 autos Chrysler son estándar. Enrique Jr compra un auto de este lote:

- Cual es la probabilidad de que auto seleccionado sea estándar?
- Cual es la probabilidad de que el auto seleccionado no sea estándar , sea automático?
- Cual es la probabilidad de que haya seleccionado un auto Chevrolet estándar?

- d) Cual es la probabilidad de que haya seleccionado un auto Ford o Chrysler automático?

DESARROLLO



- a) $P(S)$ = PROBABILIDAD DE SELECCIONAR UN AUTO ESTANDAR

$$P(S) = (0.25)\left(\frac{2}{8}\right) + (0.45)\left(\frac{1}{10}\right) + (0.30)\left(\frac{2}{10}\right) = 0.1675$$

- b) $P(A)$ = PROBABILIDAD DE SELECCIONAR UN AUTO AUTOMATICO

$$P(A) = 1 - P(S) = 1 - 0.1675 = 0.8325$$

- c) $P(CH/S)$ = PROBABILIDAD DE SELECCIONAR UN CHEVROLET ESTANDAR

$$P(CH/S) = (0.45)\left(\frac{1}{10}\right) = 0.045$$

- d) $P(F \cup CHR)$ = PROBABILIDAD DE SELECCIONAR UN FORD O UN CHRYSLER AUTOMATICO

$$P(F \cup CHR) = (0.25)\left(\frac{6}{8}\right) + (0.30)\left(\frac{8}{10}\right) = 0.427$$

EJEMPLO 33

En un lote de producción de 100 artículos, 50 son del tipo A, 30 del tipo B y el resto del tipo C, de los cuales el 10% del tipo A, 25% del tipo B y 5% del tipo C

no cumplen con los estándares de calidad . Si se selecciona un artículo de este lote al azar:

- a) Cual es la probabilidad de que el producto seleccionado no cumpla con los estándares?
- b) Cual es la probabilidad de que el producto seleccionado no cumpla con los estándar?
- c) Cual es la probabilidad de que sea un producto del tipo B y no cumpla con las especificaciones?
- d) Cual es la probabilidad de que un producto sea del tipo B y cumpla con las especificaciones de calidad?

DESARROLLO

a) $P(NC)$ = PROBABILIDAD DE QUE EL ARTICULO NO CUMPLA CON LOS ESTANDARES

$$P(M) = (0.5)(0.1) + (0.3)(0.25) + (0.2)(0.05) = 0.135$$

b) $P(C)$ = PROBABILIDAD DE QUE EL ARTICULO CUMPLA CON LOS ESTANDARES

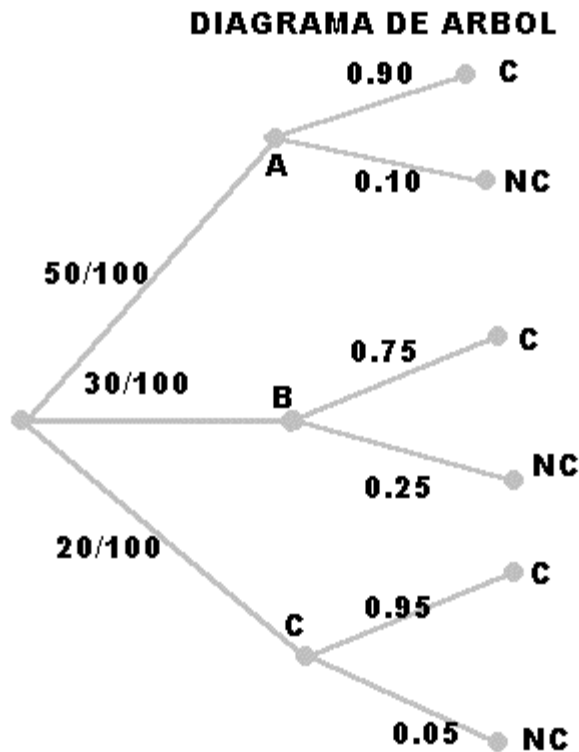
$$P(C) = 1 - P(NC) = 1 - 0.135 = 0.865$$

c) $P(B/NC)$ = PROBABILIDAD QUE EL ARTICULO SELECCIONADO NO CUMPLA Y SEA DEL TIPO B

$$P(B/NC) = \frac{P(B \cap NC)}{P(NC)} = \frac{(0.3)(0.25)}{(0.135)} = 0.56$$

d) $P(B/C)$ = PROBABILIDAD QUE EL ARTICULO SELECCIONADO CUMPLA Y SEA DEL TIPO B

$$P(B/C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{(0.3)(0.75)}{(0.865)} = 0.26$$



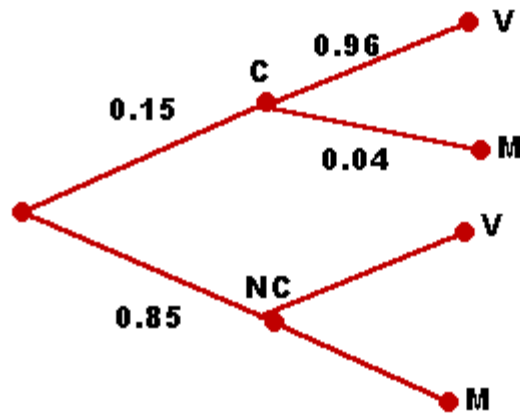
EJEMPLO 34

En un hospital el 98% de bebés nacen vivos mientras el 15% de todos los partos son por cesárea y de ellos el 96% sobreviven al parto. Se elige al azar una mujer a la que no se va a practicar cesárea.

- ¿Cuál es la probabilidad de que el bebé viva?
- ¿Cuál la probabilidad de que nazca los bebés muertos en el hospital?
- Si se selecciona un bebé vivo ¿cuál es la probabilidad de que haya nacido por cesárea?
- Si se selecciona un bebé vivo, ¿cuál es la probabilidad de que haya nacido sin cesárea?
- Si se selecciona un bebé muerto ¿cuál es probabilidad de que haya nacido por cesárea?
- Si se selecciona un bebé muerto ¿cuál es probabilidad de que haya nacido sin cesárea?

DESARROLLO

DIAGRAMA DE ARBOL



a) $P(V)$ = PROBABILIDAD QUE EL BEBE NAZCA VIVO

$$P(V) = (0.15)(0.96) + (0.85)P(V/NC) = 0.98$$

$$\text{DE DONDE } P(V/NC) = \frac{0.98 - (0.15)(0.96)}{(0.85)} = 0.9835$$

b) $P(M)$ = PROBABILIDAD QUE EL BEBE NAZCA MUERTO

$$P(M) = 1 - P(V) = 1 - 0.98 = 0.02$$

c) $P(NC/V)$ = PROBABILIDAD QUE EL BEBE SELECCIONADO NAZCA VIVO SIN CESAREA

$$P(NC/V) = \frac{P(NC \cap V)}{P(V)} = \frac{(0.85) \cdot (0.9835)}{(0.98)} = 0.853$$

d) $P(NC/V)$ = PROBABILIDAD QUE EL BEBE SELECCIONADO NAZCA VIVO POR CESAREA

$$P(C/V) = \frac{P(C \cap V)}{P(V)} = \frac{(0.15) \cdot (0.96)}{(0.98)} = 0.147$$

e) $P(C/M)$ = PROBABILIDAD QUE EL BEBE MUERTO SELECCIONADO NACIERA POR CESAREA

$$P(C/M) = \frac{P(C \cap M)}{P(M)} = \frac{(0.15) \cdot (0.04)}{(0.02)} = 0.30$$

f) $P(NC/M)$ = PROBABILIDAD QUE EL BEBE MUERTO SELECCIONADO NACIERA SIN CESAREA

$$P(NC/M) = 1 - P(C/M) = 1 - 0.30 = 0.70$$

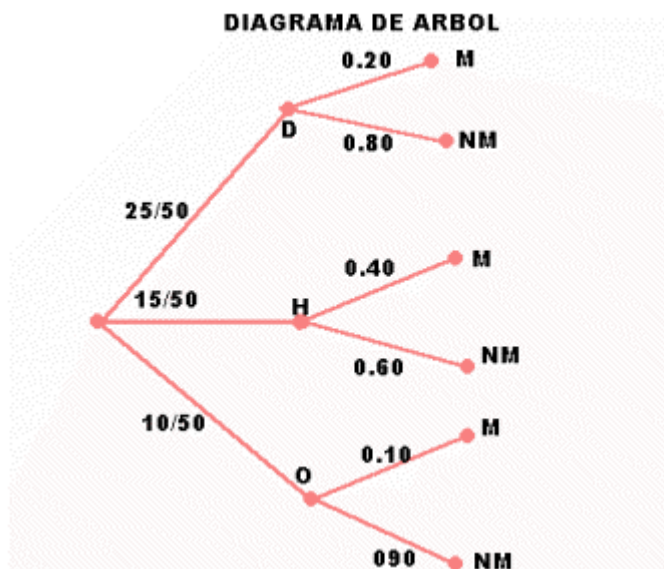
$$\text{O ASI : } P(NC/M) = \frac{P(NC \cap M)}{P(M)} = \frac{(0.85) \cdot (1 - 0.9835)}{(0.02)} = 0.7$$

EJEMPLO 35

Un grupo de 50 personas con enfermedades diversas son sometidas a un programa de ejercicios diarios. Las personas que tuvieron disposición a ser apoyadas con el programa se clasifican de siguiente manera: 25 diabéticos (D), 15 hipertensos (H) y el resto con problemas diversos (O). Se observó que después de un trimestre el 20% de los diabéticos sometidos al programas tuvieron resultados notables, el 40% de los hipertensos mejoraron y del resto de las diversas enfermedades, el 10% tuvieron resultados favorables. Al término del programa se elige un paciente al azar con el fin de preguntar sobre la visión del programa:

- a) Cual es la probabilidad de elegir a un paciente que haya respondido al programa?
- b) Cual es la probabilidad de elegir a un paciente que haya no respondido al programa?
- c) Cual es la probabilidad de que uno de los entrevistados, además de haber respondido favorablemente al programa sea diabético?
- d) Cual es la probabilidad de que uno de los entrevistados, además de haber respondido favorablemente al programa sea hipertenso?

DESARROLLO



a) $P(M)$ = PROBABILIDAD DE QUE EL PACIENTE
RESPONDIO BIEN AL PROGRAMA

$$P(M) = \left(\frac{25}{50}\right)(0.2) + \left(\frac{15}{50}\right)(0.4) + \left(\frac{10}{50}\right)(0.1) = 0.24$$

b) $P(NM)$ = PROBABILIDAD DE QUE EL PACIENTE
NO RESPONDIO BIEN AL PROGRAMA

$$P(NM) = 1 - P(M) = 1 - 0.24 = 0.76$$

c) $P(D/M)$ = PROBABILIDAD QUE EL PACIENTE
SELECCIONADO MEJORO Y ES DIABETICO

$$P(D/M) = \frac{P(D \cap M)}{P(M)} = \frac{\left(\frac{25}{50}\right)(0.2)}{(0.24)} = 0.42$$

d) $P(H/M)$ = PROBABILIDAD QUE EL PACIENTE
SELECCIONADO MEJORO Y ES HIPERTENSO

$$P(H/M) = \frac{P(H \cap M)}{P(M)} = \frac{\left(\frac{15}{50}\right)(0.4)}{(0.24)} = 0.50$$

TALLER MODULO II

1. Una tracto mula cargada con 20.000 cajas de pañuelos desechables, llega a un hipermercado . En las cajas hay un letrero que dice 500 pañuelos pero al hacer una revisión de 400 cajas revela que 50 de ellas contienen menos de 500 pañuelos. Calcule la probabilidad de que cualquier otra caja de la carga contenga menos de 500 pañuelos? **R/ 12.5%**
2. En una encuesta acerca del transito que hay de las 6 a las 8. A.M a 200 metros de la glorieta de la autopista Cali – Yumbo se observó que los 150 automóviles sometidos a una revisión de seguridad al azar , 30 tenían el seguro obligatorio vencido . Estime la probabilidad de que un auto que se detiene en ese mismo lapso en la misma sección de la autopista tenga el seguro obligatorio vigente? **R/ 20%**
3. Las fallas de las maquinas son independientes entre si. Si se tienen 4 maquinas cuyas respectivas probabilidades de averías son 1%, 2%, 5% y 10% en un día particular. Calcule la probabilidad de que ninguna maquina se dañe? **R/ 82.95%**
4. Una compañía de exploración petrolera perfora un pozo si considera que existe por lo menos un 25% de posibilidades de encontrar petróleo. Si

- perfora 4 pozos a los que se le asigna las siguientes probabilidades de 0.3, 0.4, 0.7 y 0.8
- Encontrar la probabilidad de que ninguno de los pozos produzca petróleo utilizando las cifras de la compañía? **R/ 0.0252**
 - Calcular la probabilidad de que los 4 produzcan petróleo? **R/ 0.0672**
 - Cual es la probabilidad de que los pozos con probabilidades del 30% y 70% produzcan petróleo y los otros no? **R/ 0.0252**
- La probabilidad de que un hombre este vivo en el año 2050 es del 25% y la de su mujer del 50%. Determinar la probabilidad
 - De que solo este vivo el hombre? **R/ 12.5%**
 - Que ambos estén vivos? **R/ 12.5%**
 - Que ambos estén muertos? **R/ 37.5%**
 - Un automóvil puede fallar por combustión de las escobillas , obstrucción del carburador y daño del motor. La probabilidad de la combustión es 4 veces la de la obstrucción y esta a su vez es la mitad de la del motor . Asumiendo que los mecanismos son independientes. Cual es la probabilidad para cada uno de ellos? **R/ 14.3%, 57.1% y 28.7%**
 - En la clase de estadística hay 11 varones y 7 mujeres. Si se escogen al azar 3 estudiantes. Determinar la probabilidad de:
 - Que los 3 sean varones? **R/ 20.2 %**
 - Que las 3 sean mujeres? **R/ 4.2%**
 - Que haya una mujer? **R/47.2%**
 - Que haya un varón? **R/ 28.3%**
 - Tres distribuidores surten con la marca XXX de leche empacada en bolsas a todos los expendios de una zona de la ciudad . El distribuidor A suministra el 60% , el B el 30% y el C el 10%. Una inspección de salubridad comprueba que el 1% de la leche que surte A es adulterada, el 3% de B y el 5% de C. Un niño de la Zona en mención fallece como consecuencia de haber tomado leche adulterada de la marca XXX. Determinar la s probabilidades de que la leche causante de la tragedia haya sido suministrada por A, B o C y compruebe los cálculos? **R/30%, 45% y 25%**
 - Los registros policíacos revelan que solo el 10% de las victimas de accidentes que llevaban cinturones de seguridad sufrieron heridas graves , en tanto, que el 50% de los que no lo usaron sufrieron también heridas serias. La policía estima que el 60% de las personas que viajan en automóvil emplean cinturones de seguridad . Se llama a la policía para investigar un accidente en que una persona resulta herida seriamente. Estime la probabilidad de que llevara puesto el cinturón de seguridad en el momento del choque. El conductor del otro auto no sufrió heridas graves . Determinar la probabilidad de que este ultimo llevara puesto el cinturón de seguridad? **R/ 0.23 y 0.73**
 - Enrique Jr conoce una nueva chica en la mitad de las fiestas a las que asiste. Las $\frac{3}{4}$ de las veces en que conoce una nueva chica , se divierte , pero la probabilidad de que se divierta cuando no conoce una nueva chica

- es solamente el 10%. Enrique JR acaba de decirle que se esta divirtiendo . Cual es la probabilidad de que haya conocido una nueva chica? **R/ 88.2%**
11. Tres maquinas producen piezas de metales no ferrosos. La maquina A produce el 1% de las piezas defectuosas, la maquina B el 2% y la maquina C el 5%. Cada maquina produce un la tercera parte de la producción total. Un inspector examina una pieza fundida y determina que no esta defectuosa -. Estime las probabilidades de que la pieza haya sido producida por cada maquina? **R/ 33.9%, 33.6% y 32.5%**
 12. Un Agricultor estima que cuando un jardinero experimentado planta árboles , el 90 % crecerá , en tanto cuando lo hace un novato, solo crece el 50%. Si un árbol plantado anteriormente no crece , encontrar la probabilidad de que lo haya plantado el jardinero novato , dado que este tipo de jardinero generalmente siembran el 10% de los árboles? **R/ 35.7%**
 13. La probabilidad de que una película gane un premio por la mejor actuación es del 30% , 20% por dirección y de ser premiada en ambos casos es del 5%. Cual es la probabilidad de :
 - a) Que no obtenga premio? **R/ 55%**
 - b) De que al menos gane un premio? **R/ 45%**
 14. El director del Transito municipal estima que el 5% de los automóviles estacionados en el centro de la ciudad se quedan con las llaves en el encendido . Considera que hay un 10% de probabilidades de que estos autos sean robados en oposición con el 0.005% de probabilidad de que se roben un auto al que no se le hayan dejado las llaves. De haberse robado un auto , cual es la probabilidad de que las llaves estuviesen en el encendido? **R/ 99% .**
 15. El juego del LOTTO DE Colombia consisten acertar 6 números entre el 1 y el 42 . El primer premio se otorga a los que aciertan los 6 números , el segundo premio a los que aciertan 5 de los 6 números y el tercer premio a los que aciertan 4 de los 6 números . Si una persona compra un boleto del Lotto. Cual es la probabilidad de que se gane :
 - a) El primer premio?
 - b) El segundo premio?
 - c) El tercer premio?
 16. La fabrica de jugo de chontaduro utiliza en su producción solo 3 maquinas X, Y, Z, las que producen 5%, 6% y 8% de botellas defectuosas respectivamente de lo que cada una procesa . Por tal razón la maquina X procesa el 60% de la producción total, , La Y el 25% y la Z el resto de la producción. Los productos terminados son almacenado indiscriminadamente en una bodega sin tener en cuenta lo que procesa cada maquina. De esta bodega se selecciona al azar una botella :
 - a) Cual es la probabilidad de que la botella seleccionada sea defectuosa? **R/ 5.7%**
 - b) Cual es la probabilidad de que la botella seleccionada no sea defectuosa? **R/ 94.3%**

- c) Si es defectuosa cual es la probabilidad de que haya sido embotellada por la maquina X, Y o Z? R/ 52.63%, 26.31% y 21.05%

ehurtado@usc.edu.co

MODULO III

DISTRIBUCIONES PROBABILÍSTICAS

3.1 INTRODUCCION

En este modulo estudiaremos los conceptos de las variables aleatorias , utilizaremos las leyes básicas de los probabilidades las formas como se relacionan con los experimentos. Resaltaremos que todos los conjuntos de resultados se pueden representar y expresar en forma de variable aleatoria.

Bajo el hecho de que las distribuciones probabilísticas se basan en los valores de las variables aleatorias, estudiaremos las principales distribuciones que provienen de las variables discretas , tales como las distribuciones binomiales, de Poisson, hipergeometricas y multinomiales y nos adentraremos un poco por algunas de las provenientes de las variables continuas tales como la uniforme y la exponencial , dejando para el próximo modulo el estudio de la principal distribución de las variables continuas , como es la distribución normal .

Insistiremos en la necesidad de utilizar los applets estadísticos, que se consiguen gratuitamente en Internet para resolver los ejercicios, siendo lo ideal aprendizaje y utilización de los múltiples paquetes estadísticos comerciales tales como El Spss, Minitab, Sas, Statgraphics, Excel, etc, En el peor de los casos hay que resolver los ejercicios de la forma tradicional mediante el uso de las tablas de distribuciones.

La enseñanza de la estadística debe ir acorde con el desarrollo de las ciencias y debe ser una herramienta eficaz para todo el proceso que se genera en la toda de decisiones , por lo tanto el computador y los software estadísticos deben ser parte fundamental en este proceso

3.2 VARIABLES ALEATORIAS

Una variable aleatoria es una función valorada numéricamente , cuyo valor esta regido por factores en los que interviene el azar.

Una variable aleatoria esta representada por un símbolo o letra tales como X, Y , Z , etc, que esta asociado a un experimento probabilístico. Por ejemplo, como se muestra a continuación podemos representar las siguientes variables así:

- X = ventas mensuales de computadores de una compañía
- Y = exportaciones mensuales de sacos de café
- Z = ingresos mensuales de los docentes de la universidad
- A = producción de tornillos diaria en una fabrica
- B = cocaína decomisada por mes en toneladas.

Las variables aleatorias como sabemos del curso anterior, pueden ser discretas o continuas.

Son variables discretas aquellas que toman valores enteros provenientes de la enumeración o del conteo como por ejemplo:

- M = numero de accidentes en una semana
- N = numero de defectos en un proceso productivo
- O = numero de cosechas perdidas
- P = numero de terremotos
- Q = numero de hijos de una familia

Una variable aleatoria es continua cuando asume cualquier valor dentro de un determinado intervalo. Tiene un numero infinito de valores posibles . Ejemplos de estas variables son:

- V = peso de los racimos de chontaduro
- W = Altura de los estudiantes de la universidad
- Z = duración de una conversación telefónica
- Y = Tiempo requerido para hacer un examen
- X = temperatura de un cuerpo

Téngase en cuenta que la diferencia existen entre variables discretas y continuas es muy importante debido a que los diferentes modelos de distribuciones probabilísticas se utilizan según el tipo de variable en consideración.

3.3. ESPERANZA MATEMÁTICA

Si una variable aleatoria X asume los valores $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ con las correspondientes probabilidades $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$; el valor esperado de la variable aleatoria o esperanza matemática se define como $E(x)$ y se calcula así:

$$E(X) = X_1 \cdot P_1 + X_2 \cdot P_2 + X_3 \cdot P_3 + \dots + X_n \cdot P_n$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^n X_i P_i$$

$E(x)$ representa el valor mas probable a largo plazo y es el valor promedio.

EJEMPLO 1

La probabilidad de que Xiomara gane \$10.000.000 en un concurso es de 0.25. Hallar la esperanza matemática de ganar en el concurso.

DESARROLLO

$$E(X) = X_1 \cdot P_1 = (10.000.000)(0.25) = 2.500.000$$

La esperanza matemática dice que Xiomara a la larga ganará \$ 2.500.000 en el concurso

EJEMPLO 2

En las casas de juego o casinos , todos los juegos de azar están diseñados de manera que tengan un valor esperado negativo para los jugadores o apostadores y un valor positivo para la casa. Un juego de apuesta muy popular en el Caribe se llama **Two-Fers**. Se le permite al jugador sacar dos cartas sin restitución . Si las dos cartas son de la misma figura, el jugador gana 5 dólares . Si saca cualquier otra cosa pierde los 5 dólares que hay que apostar para el juego. **Jugaría usted?**

DESARROLLO

Primero debemos averiguar como podemos obtener dos cartas de la misma figura y cual es el conjunto de donde hago la extracción cada vez

Si C indica corazones, T tréboles, D diamantes y P picas, la probabilidad de ganar es :

$$P(\text{ganar}) = (C_1 \wedge C_2) \vee (T_1 \wedge T_2) \vee (D_1 \wedge D_2) \vee (P_1 \wedge P_2) =$$

$$P(\text{ganar}) = \left(\frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51}\right) + \left(\frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51}\right) + \left(\frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51}\right) + \left(\frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51}\right) = 0.2353$$

La probabilidad de perder es :

$$P(\text{perder}) = 1 - P(\text{ganar}) = 1 - 0.2353 = 0.7647$$

El valor esperado del juego es:

$$E(X) = X_1 P_1 + X_2 P_2 = (5)(0.2353) + (-5)(0.7647) = -0.29$$

Jugaría usted?

Jugaría solamente si me siento con suerte, una vez ganaré y otras perderé, pero si juego muchas veces perderé a la larga 0.29 dólares en promedio cada vez que juegue.

Nótese que si hay muchas personas que jueguen solo una vez , que es lo que generalmente ocurre , el casino ganará una media de 0.29 dólares por cada jugador que pruebe su suerte

EJEMPLO 3

Suponga Que tiene pagar 5 dólares para tirar un dado una vez . Recibirá un 1.50 dólares por cada punto que aparezca. Debe jugar?

DESARROLLO

RESULTADOS	GANANCIA O	P(X)	E(X)
------------	------------	------	------

DEL DADO	PERDIDA		
1	1.5	1/6	1.5/6
2	3.0	1/6	3.0/6
3	4.5	1/6	4.5/6
4	6.0	1/6	6.0/6
5	7.5	1/6	7.5/6
6	9	1/6	9.0/6
		E(X) =	5.25

El valor esperado es de 5.25 dólares el cual es mayor que valor de la apuesta que es de 5 dólares, por lo tanto debe jugar que a la larga ganará.

EJEMPLO 4

Un boleto de una rifa ofrece 2 premios , uno de 5.000 dólares y el otro de 2.000 dólares con probabilidades de 0.001 y 0.003. Cual debe ser precio justo a pagar por el boleto?

DESARROLLO

$$E(X) = X_1.P_1 + X_2.P_2 = (5.000)(0.001) + (2.000)(0.003) = 11 \text{ dólares}$$

El precio del boleto debe ser de 11 dólares

EJEMPLO 5

En un negocio riesgoso, René puede ganar 5.000 dólares con probabilidad del 60% o perder 1.000 dólares con probabilidad del 40%. Hallar su esperanza matemática?

DESARROLLO

$$E(X) = X_1.P_1 + X_2.P_2 = (5.000)(0.6) + (-1.000)(0.4) = 1.800 \text{ dólares}$$

René ganará a la larga en el negocio 1800 dólares

EJEMPLO 6

Un inversionista se da cuenta de que tiene una probabilidad del 40% de obtener una utilidad de 25.000 dólares y una probabilidad del 60% de perder 15.000 dólares en una inversión. Hallar la ganancia esperada?

DESARROLLO

$$E(X) = X_1.P_1 + X_2.P_2 = (25.000)(0.4) + (-15.000)(0.6) = 1.000 \text{ dólares}$$

La ganancia esperada del inversionista será de 1.000 dólares

EJEMPLO 7

Un contratista hace las siguientes estimaciones que se muestran a continuación para la terminación de una cancha múltiple . Hallar el numero esperado de días para terminar la cancha?

Probabilidad	Tiempo de terminación
0.3	10 días
0.2	15 días
0.5	22 días

DESARROLLO

$$E(X) = X_1.P_1 + X_2.P_2 + X_3.P_3 = (10)(0.3) + (15)(0.2) + (22)(0.5) = 17 \text{ DÍAS}$$

La cancha estará terminada en 17 días

EJEMPLO 8

Un jugador de dados hace una apuesta en la siguiente forma ; si el dado cae en 2 le pagan 20 dólares por cada dólares de apuesta, si cae en 4 le pagan 40 y en 6 paga 30 dólares . Si cae en un numero impar no paga nada. Hallar el valor esperado ,es decir, cuanto va a ganar o perder a largo plazo el jugador?

DESARROLLO

RESULTADOS DEL DADO	GANANCIA O PERDIDA	P(X)	E(X)
1	0	1/6	0
2	20	1/6	20/6
3	0	1/6	0
4	40	1/6	40/6
5	0	1/6	0
6	-30	1/6	-30/6
		E(X)	5

El jugador a la larga se va a ganar 5 dólares por cada dólar de apuesta.

3.4 DISTRIBUCIONES PROBABILÍSTICAS

Una distribución probabilística es una distribución de frecuencias relativas a resultados del espacio muestral; señala la proporción de veces en que la variable aleatoria tiende a adoptar diversos valores. La esencia de un análisis estadístico

es hacer corresponder las suposiciones de cierta distribución probabilística con los datos específicos de un problema determinado.

Las distribuciones probabilísticas pueden ser discontinuas o continuas. Entre las discontinuas que comprenden las variables aleatorias discretas, como el número de acontecimientos por muestra o cantidad de ocurrencia por unidad con respecto a una a un intervalo de tiempo, área o distancia, tenemos la binomial, la de Poisson, las hipergeométricas, uniformes y exponenciales como las más importantes.

3.4.1 DISTRIBUCION BINOMIAL

Si P es la probabilidad de que ocurra un evento en un solo intento (probabilidad de éxito) y $Q = 1 - P$ la probabilidad de que no ocurra en un solo intento (probabilidad de fracaso); la probabilidad de que el suceso ocurra exactamente X veces en n intentos se calcula así:

$$P(X) = {}_n C_x \cdot P^x \cdot Q^{n-x}$$

$$\text{Donde } X = 0, 1, 2, 3, \dots, N$$

$$P(X) = {}_n C_x \cdot P(\text{éxito})^x \cdot P(\text{fracaso})^{n-x}$$

Para utilizar la distribución binomial es necesario satisfacer los siguientes supuestos:

- Existen n observaciones o ensayos idénticos
- Cada ensayo tiene dos resultados posibles, uno denominado éxito y el otro fracaso
- Las probabilidades de éxito P y de fracaso Q se mantienen constante en todos los ensayos
- Los resultados de los ensayos son independientes entre sí.

Existen dos métodos para obtener las probabilidades de una variable aleatoria que está distribuida binomialmente; uno de ellos consiste en utilizar la fórmula y el otro en consultar una tabla de probabilidades binomiales. Actualmente los métodos mencionados han sido reemplazados por el uso de los paquetes estadísticos como el SPSS, SAS, MINITAB, EXCELL, etc que simplifican enormemente esta labor.

EJEMPLO 9

Hallar la probabilidad de obtener 2 caras en 6 tiradas de una moneda?

DESARROLLO

$$P = 0.5 \quad Q = 1 - 0.5 = 0.5 \quad N = 6$$

$$P(X = 2) = {}_6 C_2 (0.5)^2 (0.5)^{6-2} = {}_6 C_2 (0.5)^2 (0.5)^4 = 0.2347$$

La probabilidad de obtener 2 caras en 6 tiradas es del 23.47%

EJEMPLO 10

Hallar la probabilidad de obtener al menos 4 caras en 6 tiradas de una moneda?

DESARROLLO

$$P = 0.5 \quad Q = 1 - 0.5 = 0.5 \quad N = 6$$

$$P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) =$$

$$P(X \geq 4) = {}_6C_4(0.5)^4(0.5)^2 + {}_6C_5(0.5)^5(0.5)^1 + {}_6C_6(0.5)^6(0.5)^0 = 0.34375$$

EJEMPLO 11

Un estudiante se presenta a un examen de opciones múltiples sin la suficiente preparación . El examen consta de 10 preguntas cada una independiente de la otra . Si para ganar el examen se deben contestar 6 preguntas buenas . Cual es la probabilidad de que por azar gane el examen?

DESARROLLO

$$P = 0.5 \quad Q = 1 - 0.5 = 0.5 \quad N = 10$$

$$P(X = 6) = {}_{10}C_6(0.5)^6(0.5)^4 = 0.20$$

La probabilidad de que gane el examen es del 20%.

EJEMPLO 12

Se sabe que en la manufactura de cierto producto , uno de cada 10 sale defectuoso. Cual es la probabilidad de que una muestra aleatoria de 4 artículos contenga:

- a) ninguno defectuoso
- b) exactamente uno defectuoso
- c) exactamente dos defectuosos
- d) no mas de dos defectuosos

DESARROLLO

$$P = 0.1 \quad Q = 1 - 0.1 = 0.9 \quad N = 4$$

$$a) P(X = 0) = {}_4C_0(0.1)^0(0.9)^4 = 0.6561$$

$$b) P(X = 1) = {}_4C_1(0.1)^1(0.9)^3 = 0.2916$$

$$c) P(X = 2) = {}_4C_2(0.1)^2(0.9)^2 = 0.0486$$

$$d) P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0.6561 + 0.2916 + 0.0486 = 0.9963$$

EJEMPLO 13

Los registros hospitalarios indican que el 10% de los casos de cierta enfermedad es fatal. Si hay 5 pacientes que sufren de la enfermedad, encontrar la probabilidad de que :

- a) todos sanen
- b) por lo menos 3 mueran
- c) que exactamente 3 mueran

DESARROLLO

$$P = 0.1 \quad Q = 1 - 0.1 = 0.9 \quad N = 5$$

$$a) P(X = 0) = {}_5C_0 (0.1)^0 (0.9)^5 = 0.5904$$

$$b) P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$$

$$P(X \geq 3) = {}_5C_3 (0.1)^3 (0.9)^2 + {}_5C_4 (0.1)^4 (0.9)^1 + {}_5C_5 (0.1)^5 (0.9)^0$$

$$P(X \geq 3) = 0.00810 + 0.0045 + 0.00001 = 0.00856$$

$$c) P(X = 3) = {}_5C_3 (0.1)^3 (0.9)^2 = 0.00810$$

3.4.1.1 TABLAS BINOMIALES INDIVIDUALES

Las tablas de probabilidades ofrecen un método muy práctico para el análisis estadístico; proporcionan las probabilidades con muy poco esfuerzo. Hay dos tipos de tablas binomiales. Una proporciona las probabilidades individuales de una variable aleatoria en tanto que el otro establece las probabilidades de un conjunto de resultados.

Cuando el interés radica en la determinación de la probabilidad individual como la de obtener 4 resultados satisfactorios en 6 observaciones, utilizamos las tablas binomiales individuales. Al igual que en la fórmula se requieren 3 factores de información: **N** que es el número de observaciones, **P** que es la probabilidad de éxito y **X** que es la cantidad específica de éxitos.

EJEMPLO 14

Utilizando las tablas binomiales del apéndice encontrar la probabilidad de obtener en 10 observaciones para una probabilidad de éxito $P(X) = 0.4$:

- a) 0 éxitos
- b) 1 éxito
- c) 3 éxitos
- d) 5 éxitos
- e) 7 éxitos
- f) 9 éxitos
- g) 10 éxitos

DESARROLLO

La tabla se emplea como sigue:

- 1) en la parte superior se encuentran los valores de P y allí se busca el que se quiere, para nuestro caso 0.4
- 2) En la parte lateral de arriba hacia abajo se localiza el valor de N, para nuestro ejemplo 10 colateral a este valor se encuentran los valores de X
- 3) La probabilidad de X éxitos se encuentra en la intersección de la fila situada en 2) y la columna de la parte 1)

- a) $P(X = 0) = 0.0060$
- b) $P(X = 1) = 0.0403$
- c) $P(X = 3) = 0.2150$
- d) $P(X = 5) = 0.2007$
- e) $P(X = 7) = 0.0425$
- f) $P(X = 9) = 0.0016$
- g) $P(X = 10) = 0.0001$

		P										
N	X	0.01	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
10	0									0.0060		
	1									0.0403		
	2									0.1209		
	3									0.2150		
	4									0.2508		
	5									0.2007		
	6									0.1115		
	7									0.0425		
	8									0.0106		
	9									0.0016		
	10									0.0001		

3.4.1.2 TABLAS BINOMIALES ACUMULADAS

Muchos problemas requieren el empleo de las probabilidades combinadas de un grupo de resultados en lugar de un resultado único. Por lo general los resultados de interés son aquellos que están por encima o mayores que cierto número especificado. Por ejemplo obtener 5 o menos éxitos en 10 observaciones se puede resolver como la suma de las probabilidades individuales de $P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$; pero una alternativa más eficaz es utilizar una tabla de probabilidades

acumulativas ya que aquí los valores individuales están sumado o acumulados , lo cual ahorra tiempo y reduce la posibilidad de cometer errores en el calculo.

Una tabla acumulativa se puede utilizar en diferentes formas . Puede emplearse para encontrar directamente la probabilidad de que X sea igual a cierto numero especificado de éxitos o menor a este y se puede utilizar indirectamente para obtener la probabilidad de X sea mayor a cierto numero de éxitos , como la probabilidad de obtener exactamente X éxitos. Esto se debe a que los resultados son mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos, por lo tanto sus probabilidades en cualquier ejemplo dado sumaran 1.0. De ahí que si se encuentra que $P(\leq 6) = 0.72$ entonces $P(X > 6) = 1 - 0.72 = 0.28$.

Un pequeño truco que ayuda a evitar cierta confusión consiste en enumerar o listar los resultados posibles para una situación dada y subrayar los resultados posibles para los cuales se desean obtener las probabilidades .

Por ejemplo supóngase que se quiere determinar la probabilidad de 4 o menos éxitos en 10 observaciones; primero enumeramos los éxitos posibles

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

A continuación se resaltan los de interés

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

Como la tabla muestra la probabilidad de X o menos éxitos se puede buscar directamente la probabilidad de 4 o menos éxitos dado N y P

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

Es decir para obtener la probabilidad de cualquier evento , por ejemplo mayor de 4 éxitos (5,6,7,8,9,10) se deberá encontrar la probabilidad de 4 o menos éxitos y restarla de 1.0

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
VALOR TABULAR					1.0 – VALOR TABULAR					
100% = 1.0										

la tabla siguiente muestra el uso de una tabla acumulada binomial

N =10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	LEER EN LA TABLA ACUMULADA
$P(X < 4)$	0	1	2	3								P(3)
$P(X \leq 4)$	0	1	2	3	4							P(4)
$P(X > 4)$						5	6	7	8	9	10	1 – P(4)
$P(X \geq 4)$					4	5	6	7	8	9	10	1 – P(3)
$P(X = 4)$					4							P(4) – P(3)

Utilizando la tablas acumulativas para $N = 10$, y $P = 0.4$ obtendremos lo siguiente
 $P = 0.4$

N =10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	LEER EN LA TABLA ACUMULADA
$P(X < 4)$	0	1	2	3								P(3) = 0.3823
$P(X \leq 4)$	0	1	2	3	4							P(4) = 0.6331
$P(X > 4)$						5	6	7	8	9	10	1 – P(4) = 1 – 0.6331 = 0.3669
$P(X \geq 4)$					4	5	6	7	8	9	10	1 – P(3) = 1 – 0.3823 = 0.6177
$P(X = 4)$					4							P(4) – P(3) = 0.6331 – 0.3823 = 0.2508

EJEMPLO 15

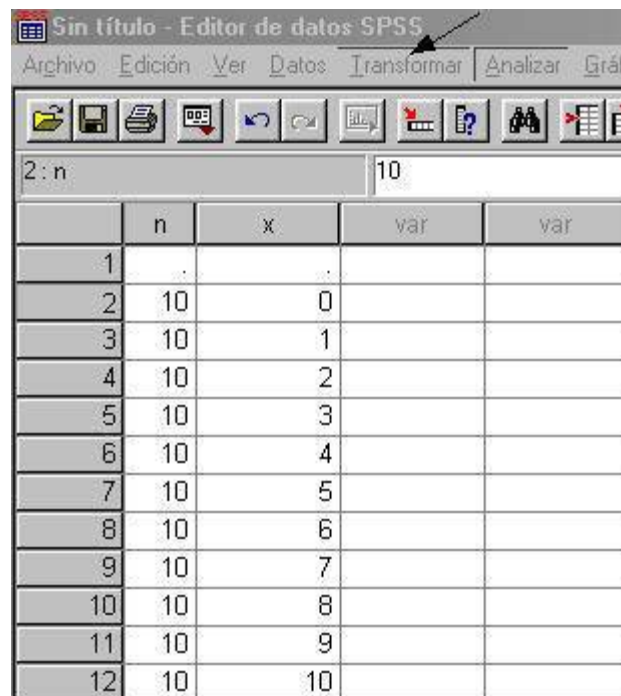
Utilizando el software estadístico SPSS (Cualquier versión), calcular todas las probabilidades binomiales individuales en 10 observaciones dada una probabilidad de éxito **$P(X) = 0.4$**

a) 0 éxitos
b) 1 éxito
c) 2 éxitos
d) 3 éxitos
e) 4 éxitos
f) 5 éxitos
g) 6 éxitos

h) 7 éxitos
i) 8 éxitos
j) 9 éxitos
k) 10 éxitos

DESARROLLO

En el editor de datos de SPSS escriba los valores de **n** y **x** luego pulse transformar y se abrirá una ventana donde aparece calcular, haga clic en calcular y aparecerá la ventana **Calcular variable**, busque la función (**PDF.BINOM(x,n,p)**) y llévela a la ventanilla de expresión numérica, introduzca los datos y pulse aceptar y obtendrá en el editor de datos los valores de probabilidad pedidos, tal como se ve en los cuadros adjuntos.



The screenshot shows the SPSS Data Editor window titled 'Sin título - Editor de datos SPSS'. The 'Transformar' menu is highlighted. Below the menu bar, there is a toolbar with various icons. The data table has columns labeled 'n', 'x', and 'var'. The 'n' column contains the value 10 for all rows. The 'x' column contains values from 0 to 10. The 'var' column is empty.

	n	x	var	var
1	.	.		
2	10	0		
3	10	1		
4	10	2		
5	10	3		
6	10	4		
7	10	5		
8	10	6		
9	10	7		
10	10	8		
11	10	9		
12	10	10		



Sin título - Editor de datos SPSS

Archivo Edición Ver Datos Transformar Analizar Gráficos Utilidades

13:

	n	x	p0.40	var	var
1					
2	10	0	.0060		
3	10	1	.0403		
4	10	2	.1209		
5	10	3	.2150		
6	10	4	.2508		
7	10	5	.2007		
8	10	6	.1115		
9	10	7	.0425		
10	10	8	.0106		
11	10	9	.0016		
12	10	10	.0001		
13					

EJEMPLO 16

Utilizando el software estadístico SPSS (Cualquier versión), calcular todas las probabilidades binomiales individuales en 10 observaciones dada una probabilidad de éxito $P(X) = 0.6$.

a) 0 éxitos

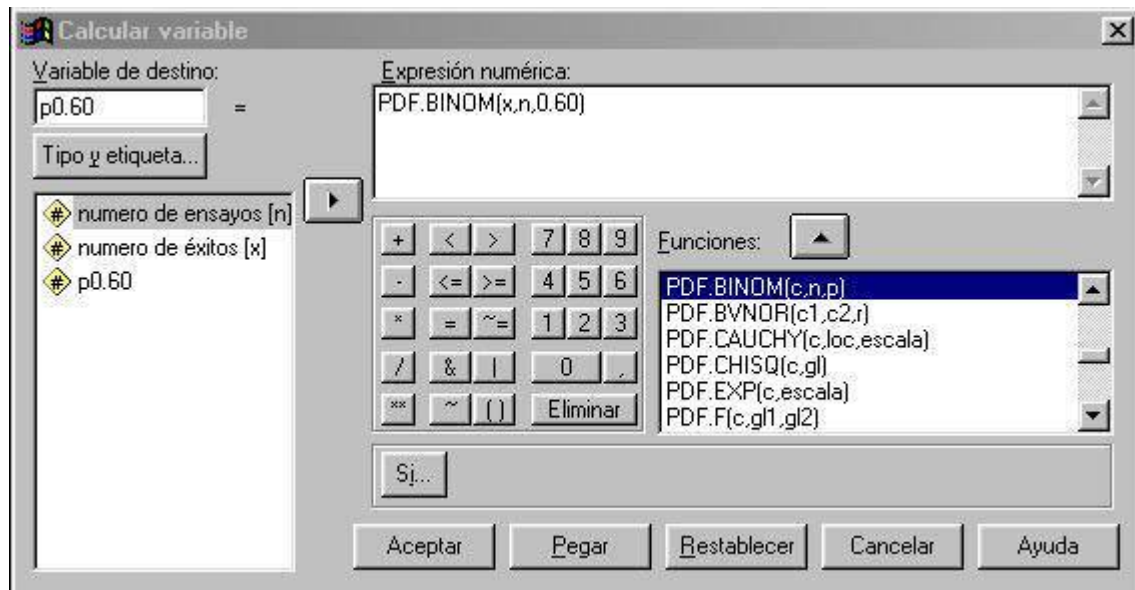
b) 1 éxitos

c) 2 éxitos
d) 3 éxitos
e) 4 éxitos
f) 5 éxitos
g) 6 éxitos
h) 7 éxitos
i) 8 éxitos
j) 9 éxitos
k) 10 éxitos

l)

DESARROLLO

Siguiendo el mismo procedimiento del ejemplo anterior, solamente cambiamos la función por **PDF.BINOM(x,n, p)** encontramos lo siguiente:



The screenshot shows the SPSS data editor window titled 'Sin título - Editor de datos SPSS'. The menu bar includes Archivo, Edición, Ver, Datos, Transformar, Analizar, and Gráfico. The toolbar contains icons for file operations, editing, and analysis. The data grid shows 12 rows of data for a binomial distribution with n=10 and p=0.60. The columns are labeled n, x, p0.60, and var.

	n	x	p0.60	var
1
2	10	0	.0001	
3	10	1	.0016	
4	10	2	.0106	
5	10	3	.0425	
6	10	4	.1115	
7	10	5	.2007	
8	10	6	.2508	
9	10	7	.2150	
10	10	8	.1209	
11	10	9	.0403	
12	10	10	.0060	

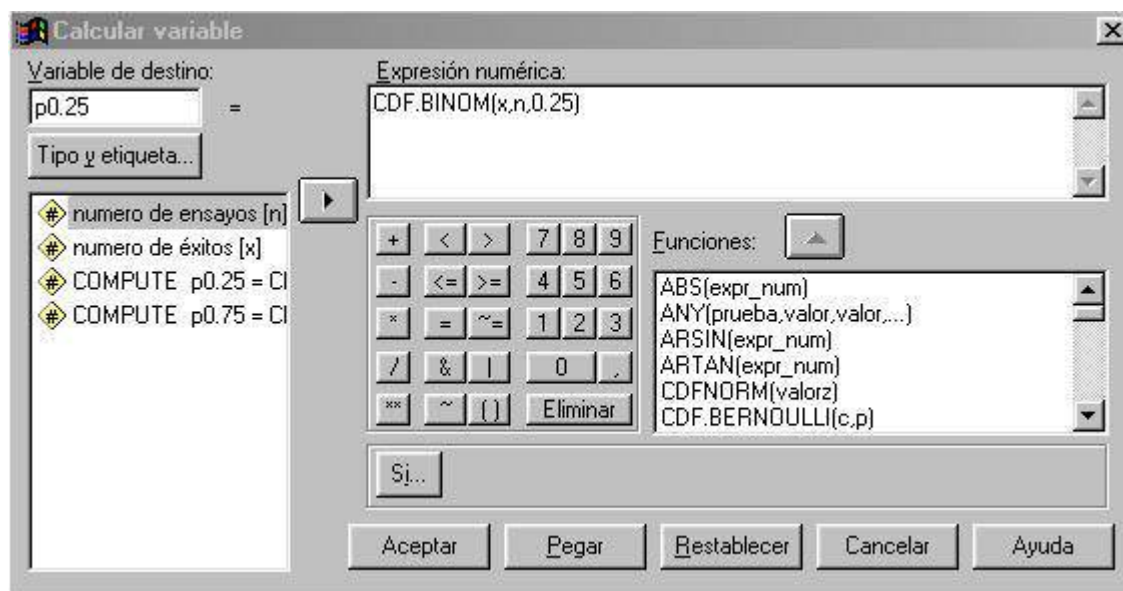
EJEMPLO 17

Utilizando el software estadístico SPSS (Cualquier versión), calcular todas las probabilidades binomiales acumuladas en 10 observaciones dada una probabilidad de éxito $P(X) = 0.25$ y $P(X) = 0.75$ respectivamente

P (x) = 0.25	P (x) = 0.75
0 éxitos	0 éxitos
1 éxito	1 éxito
2 éxitos	2 éxitos
3 éxitos	3 éxitos
4 éxitos	4 éxitos
5 éxitos	5 éxitos
6 éxitos	6 éxitos
7 éxitos	7 éxitos
8 éxitos	8 éxitos
9 éxitos	9 éxitos
10 éxitos	10 éxitos

DESARROLLO

Siguiendo el mismo procedimiento del ejemplo anterior, solamente cambiamos la función por **CDF.BINOM(x,n, p)** encontramos lo siguiente



Sin título - Editor de datos SPSS

Archivo Edición Ver Datos Transformar Analizar Gráficos Utilidad

1 : p0.25

	n	x	p0.25	p0.75	var
1
2	10	0	.0563	.0000	
3	10	1	.2440	.0000	
4	10	2	.5256	.0004	
5	10	3	.7759	.0035	
6	10	4	.9219	.0197	
7	10	5	.9803	.0781	
8	10	6	.9965	.2241	
9	10	7	.9996	.4744	
10	10	8	1.0000	.7560	
11	10	9	1.0000	.9437	
12	10	10	1.0000	1.0000	

3.4.2 DISTRIBUCION DE POISSON.

La probabilidad de considerar cualquier dado de eventos por unidad de medición (minutos, horas, centímetros, metros, kilómetros, etc) se puede obtener mediante la siguiente fórmula :

$$P(X) = \frac{e^{-m} m^x}{X!}$$

Donde

X = numero de eventos

I = razón media por unidad de tiempo

$I t$ = cantidad media de eventos respecto al intervalo t

t = numero de unidades

$I t = m$

EJEMPLO 18

Mediante Un proceso mecánico se producen alfombras de lana que presentan un promedio de 2 defectos por metro cuadrado . Encuentre la probabilidad de que un metro cuadrado tenga exactamente :

- a) cero defectos
- b) 1 defecto
- c) 2 defectos
- d) 3 defectos

DESARROLLO

$$m = 2$$

$$a) P(X = 0) = \frac{e^{-m} m^x}{X!} = \frac{e^{-2} 2^0}{0!} = 0.1353$$

$$b) P(X = 1) = \frac{e^{-m} m^x}{X!} = \frac{e^{-2} 2^1}{1!} = 0.2707$$

$$c) P(X = 2) = \frac{e^{-m} m^x}{X!} = \frac{e^{-2} 2^2}{2!} = 0.2707$$

$$d) P(X = 3) = \frac{e^{-m} m^x}{X!} = \frac{e^{-2} 2^3}{3!} = 0.1804$$

EJEMPLO 19

Suponga que los buques arriban al puerto de Buenaventura a razón de $\lambda = 1$ buque por día y que esta proporción esta bien aproximada mediante el proceso

de Poisson. Si se observa este proceso durante un periodo de 10 días. Hallar la probabilidad de que:

- a) no arribe ningún buque
- b) arribe un buque
- c) arriben 2 buques
- d) arriben 3 buques
- e) arriben 4 buques
- f) arriben 5 buques
- g) arriben 10 buques
- h) arriben menos de 6 buques
- i) arriben mas de 5 buques

DESARROLLO

$$m = I t = (1 \text{ buque} / \text{día}) \cdot (10 \text{ días}) = 10 \text{ buques}$$

$$a) P(X = 0) = \frac{e^{-m} m^X}{X!} = \frac{e^{-10} 2^0}{0!} = 0.0000$$

$$b) P(X = 1) = \frac{e^{-m} m^X}{X!} = \frac{e^{-10} 2^1}{1!} = 0.0005$$

$$c) P(X = 2) = \frac{e^{-m} m^X}{X!} = \frac{e^{-10} 2^2}{2!} = 0.0023$$

$$d) P(X = 3) = \frac{e^{-m} m^X}{X!} = \frac{e^{-10} 10^3}{3!} = 0.0076$$

$$e) P(X = 4) = \frac{e^{-m} m^X}{X!} = \frac{e^{-10} 10^4}{4!} = 0.0189$$

$$f) P(X = 5) = \frac{e^{-m} m^X}{X!} = \frac{e^{-10} 10^5}{5!} = 0.0378$$

$$g) P(X = 10) = \frac{e^{-m} m^X}{X!} = \frac{e^{-10} 10^{10}}{10!} = 0.1251$$

$$h) P(X \leq 5) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$$

$$P(X \leq 5) = P(X < 6) = 0.0000 + 0.0005 + 0.0023 + 0.0076 + 0.0189 + 0.0378 = 0.0671$$

$$i) P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - 0.0671 = 0.9329$$

EJEMPLO 20

Si la probabilidad de que un individuo sufra una reacción por una inyección de cierta vacuna es de 0.001-. Determinar la probabilidad de que de un total de 5.000 personas :

- a) exactamente ninguna tenga reacción
- b) exactamente 1 tenga reacción

- c) 2 tengan reacción
- d) mas de 2 tengan reacción

DESARROLLO

$$m = I t = (0.001)(5.000) = 5$$

$$a) P(X = 0) = \frac{e^{-m} m^0}{X!} = \frac{e^{-5} 5^0}{0!} = 0.0067$$

$$b) P(X = 1) = \frac{e^{-m} m^1}{X!} = \frac{e^{-5} 5^1}{1!} = 0.0337$$

$$c) P(X = 2) = \frac{e^{-m} m^2}{X!} = \frac{e^{-5} 5^2}{2!} = 0.0842$$

$$d) P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - (0.0067 + 0.0337 + 0.0842) = 0.8754$$

3.4.2.1 TABLAS DE POISSON

Se usan para facilitar el calculo de las probabilidades con un mínimo de esfuerzo y tiempo, por tal razón se deben utilizar siempre que sea posible y cuando no se disponga de un software estadístico, en lugar de recurrir a la formula.

Al igual que las tablas binomiales existen las individuales y las acumuladas y están diseñadas para proporcionar las probabilidades con base en la media del proceso . En el apéndice se encuentran las tablas de la distribución de Poisson individuales y acumuladas.

Para utilizar estas tablas se necesita conocer la media μ y el numero de eventos X para hallar su probabilidad deseada en la intersección de μ y X .

La siguiente tabla muestra algunas probabilidades obtenidas a partir de las tabla acumuladas de Poisson

μ	Probabilidad deseada	Incluir resultados	Cálculos	P(X)
0.5	$P(X \leq 3)$	0, 1, 2, 3	Leer en la tabla $P(X \leq 3)$	0.9982
1.1	$P(X < 5)$	0,1,2,3,4	Leer en la tabla $P(X \leq 4)$	0.9946
1.5	$P(X \leq 2)$	0, 1, 2	Leer en la tabla $P(X \leq 2)$	0.8088
2.3	$P(X \leq 1)$	0, 1	Leer en la tabla $P(X \leq 1)$	0.3309
2.7	$P(X \leq 5)$	0, 1, 2, 3, 4, 5	Leer en la tabla $P(X \leq 5)$	0.9433
3.0	$P(X > 2)$	3, 4, 5,	$1 - P(X \leq 2)$	0.5768
3.5	$P(X \geq 5)$	5, 6, 7,	$1 - P(X \leq 4)$	0.2746
4.2	$P(X \geq 3)$	3, 4, 5,	$1 - P(X \leq 2)$	0.7898
5.8	$P(2 \leq X \leq 5)$	2, 3, 4, 5	$P(X \leq 5) - P(X \leq 1)$	0.4577

6.6	$P(3 \leq X \leq 6)$	3, 4, 5, 5, 6	$P(X \leq 6) - P(X \leq 2)$	0.4708
7.8	$P(X = 0)$	0	Leer en la tabla $P(X \leq 0)$	0.0004

EJEMPLO 21

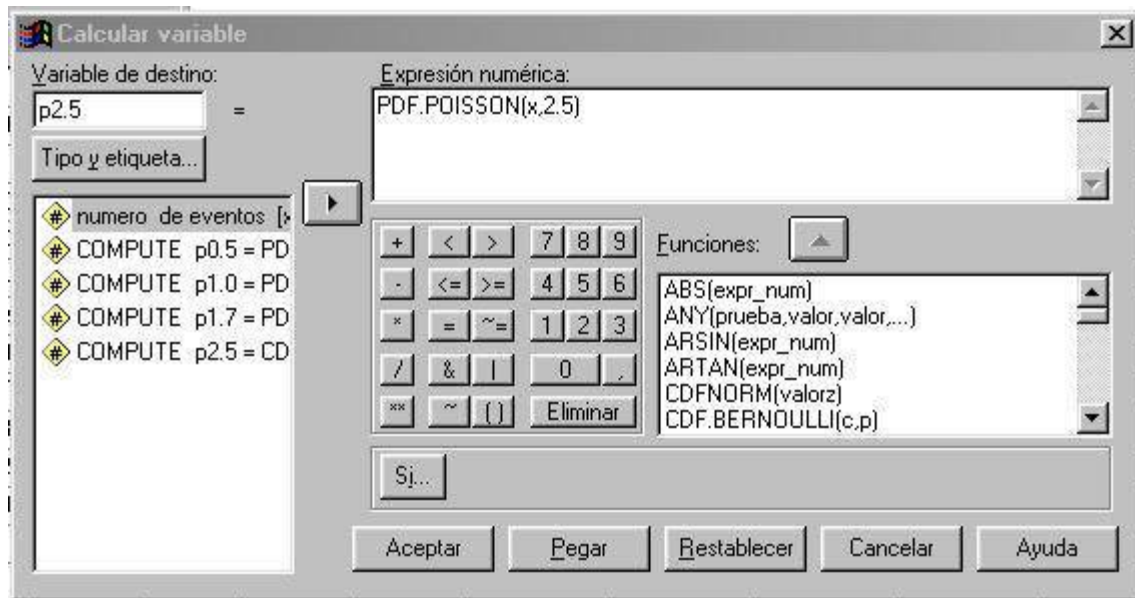
Utilizando el software estadístico SPSS (Cualquier versión), calcular todas las probabilidades Poisson para valores individuales de X dado las siguientes promedios $\mu = 0.5$, $\mu = 1.0$, $\mu = 1.7$, $\mu = 2.5$ respectivamente

$\mu = 0.5$	$\mu = 1.0$	$\mu = 1.7$	$\mu = 2.5$
X	X	X	X
0	0	0	0
1	1	1	1
2	2	2	2
3	3	3	3
4	4	4	4
5	5	5	5
6	6	6	6
7	7	7	7
8	8	8	8
9	9	9	9
10	10	10	10

DESARROLLO

Siguiendo el mismo procedimiento de los ejemplos anteriores donde solamente se cambia la función por **PDF.POISSON(x, μ)** encontramos lo siguiente:

Sin título - Editor de datos SPSS					
Archivo Edición Ver Datos Transformar Analizar Gráficos Utilidades Ventana ?					
	Nomb	Tipo	A	Deci	Etiqueta
1	x	Numérico	4	0	numero de eventos
2	p0.5	Numérico	8	4	COMPUTE p0.5 = PDF.POISSON(x,0.5) (COMPUTE)
3	p1.0	Numérico	8	4	COMPUTE p1.0 = PDF.POISSON(x,1.0) (COMPUTE)
4	p1.7	Numérico	8	4	COMPUTE p1.7 = PDF.POISSON(x,1.7) (COMPUTE)
5	p2.5	Numérico	8	4	COMPUTE p2.5 = CDF.POISSON(x,2.5) (COMPUTE)



Sin título - Editor de datos SPSS

Archivo Edición Ver Datos Transformar Analizar Gráficos

5:

	x	p0.5	p1.0	p1.7	p2.5
1					
2	0	.6065	.3679	.1827	.0821
3	1	.3033	.3679	.3106	.2052
4	2	.0758	.1839	.2640	.2565
5	3	.0126	.0613	.1496	.2138
6	4	.0016	.0153	.0636	.1336
7	5	.0002	.0031	.0216	.0668
8	6	.0000	.0005	.0061	.0278
9	7	.0000	.0001	.0015	.0099
10	8	.0000	.0000	.0003	.0031
11	9	.0000	.0000	.0001	.0009
12	10	.0000	.0000	.0000	.0002

EJEMPLO 22

Utilizando el software estadístico SPSS (Cualquier versión), calcular todas las probabilidades Poisson para valores acumulados de X dado las siguientes promedios $\mu = 0.5$, $\mu = 1.0$, $\mu = 1.7$, $\mu = 2.5$ respectivamente

$\mu = 0.5$	$\mu = 1.0$	$\mu = 1.7$	$\mu = 2.5$
X	X	X	X
0	0	0	0
1	1	1	1
2	2	2	2
3	3	3	3
4	4	4	4
5	5	5	5
6	6	6	6
7	7	7	7
8	8	8	8
9	9	9	9
10	10	10	10

DESARROLLO

Siguiendo el mismo procedimiento de los ejemplos anteriores donde solamente se cambia la función por **CDF.POISSON(x, μ)** encontramos lo siguiente:

Sin título - Editor de datos SPSS					
Archivo Edición Ver Datos Transformar Analizar Gráficos Utilidades Ventana ?					
	Nomb	Tipo	A	Deci	Etiqueta
1	x	Numérico	4	0	numero de eventos
2	p0.5	Numérico	8	4	COMPUTE p0.5 = CDF.POISSON(x,0.5) (COMPUTE)
3	p1.0	Numérico	8	4	COMPUTE p1.0 = CDF.POISSON(x,1.0) (COMPUTE)
4	p1.7	Numérico	8	4	COMPUTE p1.7 = CDF.POISSON(x,1.7) (COMPUTE)
5	p2.5	Numérico	8	4	COMPUTE p2.5 = CDF.POISSON(x,2.5) (COMPUTE)



Sin título - Editor de datos SPSS

Archivo Edición Ver Datos Transformar Analizar Gráficos

1 : x

	x	p0.5	p1.0	p1.7	p2.5
1					
2	0	.6065	.3679	.1827	.0821
3	1	.9098	.7358	.4932	.2873
4	2	.9856	.9197	.7572	.5438
5	3	.9982	.9810	.9068	.7576
6	4	.9998	.9963	.9704	.8912
7	5	1.0000	.9994	.9920	.9580
8	6	1.0000	.9999	.9981	.9858
9	7	1.0000	1.0000	.9996	.9958
10	8	1.0000	1.0000	.9999	.9989
11	9	1.0000	1.0000	1.0000	.9997
12	10	1.0000	1.0000	1.0000	.9999

3.4.3 DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMETRICA

Si se elige una muestra sin restitución de una población finita y la muestra contiene una proporción relativamente grande de la población de tal manera que la probabilidad de un éxito experimenta una alteración mensurable de una elección a la siguiente, utilizamos la distribución hipergeométrica,

Esta distribución es de gran utilidad cuando la probabilidad de obtener éxito no es constante y se calcula así:

$$P(X) = \frac{{}_R C_X {}_{N-R} C_{n-X}}{{}_N C_n}$$

Donde.

N es el tamaño de la población

R es el numero de la poblacion señalado como exito

X es el numero de exitos en la muestra

n es el tamaño de la muestra

EJEMPLO 23

En un establo de caballos de carreras hay N = 10 caballos y R = 4 de ellos tienen una enfermedad contagiosa . Cual es la probabilidad de elegir una muestra de n = 3 en la cual haya x = 2 caballos enfermos?

DESARROLLO

$$P(X = 2) = \frac{{}_R C_X {}_{N-R} C_{n-X}}{{}_N C_n} = \frac{{}_4 C_2 {}_{10-4} C_{3-2}}{{}_{10} C_3} = \frac{{}_4 C_2 {}_6 C_1}{{}_{10} C_3} = \frac{6 \cdot 6}{120} = 0.30$$

La probabilidad de elegir tres caballos de carreras de los cuales

2 esten enfermos es del 30%

EJEMPLO 24

De 5 computadoras de un lote , 3 tienen el disco duro averiado. Cual es la probabilidad de que si se eligen 2 computadoras , ambas tengan el disco duro averiado?

DESARROLLO

$$P(X = 2) = \frac{{}_R C_X {}_{N-R} C_{n-X}}{{}_N C_n} = \frac{{}_3 C_2 {}_{5-3} C_{2-2}}{{}_5 C_2} = \frac{{}_3 C_2 {}_2 C_1}{{}_5 C_2} = 0.30$$

EJEMPLO 25

Una comisión de n = 5 miembros ha de formarse al azar de entre N = 50 miembros de un sindicato en el que 40 trabajadores son mecánicos . bajo la premisa que la selección se hace sin reemplazo , cuales son las probabilidades de que en la comisión hayan:

- ningún mecánico
- 1 mecánico
- 2 mecánicos
- 3 mecánicos
- 4 mecánicos
- 5 mecánicos

Comprobar el resultado (la suma de las probabilidades tiene que ser igual al 100% o a 1.0

DESARROLLO

$$N = 50 \quad n = 5 \quad R = 40 \quad P(X) = \frac{{}_R C_X {}_{N-R} C_{n-X}}{{}_N C_n}$$

$$a) P(X = 0) = \frac{{}_{40} C_0 {}_{50-40} C_{5-0}}{{}_{50} C_5} = \frac{{}_{40} C_0 {}_{10} C_5}{{}_{50} C_5} = 0.0001$$

$$b) P(X = 1) = \frac{{}_{40} C_1 {}_{50-40} C_{5-1}}{{}_{50} C_5} = \frac{{}_{40} C_1 {}_{10} C_4}{{}_{50} C_5} = 0.0040$$

$$c) P(X = 2) = \frac{{}_{40} C_2 {}_{50-40} C_{5-2}}{{}_{50} C_5} = \frac{{}_{40} C_2 {}_{10} C_3}{{}_{50} C_5} = 0.0442$$

$$d) P(X = 3) = \frac{{}_{40} C_3 {}_{50-40} C_{5-3}}{{}_{50} C_5} = \frac{{}_{40} C_3 {}_{10} C_2}{{}_{50} C_5} = 0.2098$$

$$e) P(X = 4) = \frac{{}_{40} C_4 {}_{50-40} C_{5-4}}{{}_{50} C_5} = \frac{{}_{40} C_4 {}_{10} C_1}{{}_{50} C_5} = 0.4313$$

$$f) P(X = 5) = \frac{{}_{40} C_5 {}_{50-40} C_{5-5}}{{}_{50} C_5} = \frac{{}_{40} C_5 {}_{10} C_0}{{}_{50} C_5} = 0.3106$$

$$P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = 1.0$$

EJEMPLO 26

En una caja de 10 fusibles , dos de ellos están defectuosos . Si se examina una muestra aleatoria de 4 fusibles . Cual es la probabilidad de encontrar :

- ninguno defectuoso
- uno defectuoso
- uno o menos defectuosos

DESARROLLO

$$N = 10 \quad n = 4 \quad R = 2 \quad P(X) = \frac{{}_R C_X {}_{N-R} C_{n-X}}{{}_N C_n}$$

$$a) P(X = 0) = \frac{{}_2 C_0 {}_{10-2} C_{4-0}}{{}_{10} C_4} = \frac{{}_2 C_0 {}_8 C_4}{{}_{10} C_4} = 0.333$$

$$b) P(X = 1) = \frac{{}_2 C_1 {}_{10-2} C_{4-1}}{{}_{10} C_4} = \frac{{}_2 C_1 {}_8 C_3}{{}_{10} C_4} = 0.533$$

$$c) P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0.333 + 0.533 = 0.866$$

EJEMPLO 27

Una comisión de $n = 5$ miembros ha de formarse al azar de entre $N = 50$ miembros de un sindicato en el que 40 trabajadores son mecánicos . bajo la premisa que la selección se hace sin reemplazo , cuales son las probabilidades de que en la comisión hayan:

- ningún mecánico
- 1 mecánico
- 2 mecánicos
- 3 mecánicos

k) 4 mecánicos

l) 5 mecánicos

Comprobar el resultado (la suma de las probabilidades tiene que ser igual al 100% o a 1.0

Resolver el problema utilizando el software SPSS

DESARROLLO

Siguiendo el mismo procedimiento de los ejemplos anteriores donde solamente se cambia la función por **PDF.HYPER(x,t,r,n)** encontramos lo siguiente



Sin título - Editor de datos SPSS

Archivo Edición Ver Datos Transformar Analizar Gráficos

Utilidades Ventana ?

6:

	x	t	r	n	phiper	var	va
1	0	50	40	5	.0001		
2	1	50	40	5	.0040		
3	2	50	40	5	.0442		
4	3	50	40	5	.2098		
5	4	50	40	5	.4313		
6	5	50	40	5	.3106		
7							

Vista de datos Vista de va

SPSS El procesador está prepa

3.4.4 DISTRIBUCION MULTINOMIAL

Es una variante de la distribución binomial y se utiliza en situaciones en las que hay más de 2 resultados mutuamente excluyentes. Al igual que en las binomiales se tiene como

requisito que los ensayos sean independientes y con probabilidad constante. Un ejemplo de una variable multinomial es la tirada de un dado , la cual tiene 6 resultados posibles; aquí en el método multinomial en lugar de 2 clases se consideran de 3 a 6 clases, dependiendo como se categoricen los resultados. Por ejemplo podrían presentarse 1 y 2. 3 y 4, 5 y 6.

Si los eventos E1, E2,EK pueden ocurrir con frecuencias P1, P2,PK, respectivamente , la probabilidad de que E1,E2,.....Ek ocurran X1, X2 ,.....XK veces, respectivamente se calcula así.

$$\frac{N!}{X_1! X_2! \dots X_K!} P_1^{X_1} P_2^{X_2} \dots P_K^{X_K}$$

Donde $X_1 + X_2 + \dots + X_K = N$

Esta distribución que es una generalización de la distribución binomial , se llama distribución multinomial.

EJEMPLO 28

Una caja contiene 5 bolas rojas, 4 blancas y 3 azules . Se saca al azar una bola de la caja , se anota su color y se vuelve a meter en la caja . Hallar la probabilidad de que entre 6 bolas así seleccionadas, 3 sean rojas, 2 blancas y una azul.

DESARROLLO

$$P(\text{ROJA}) = \frac{5}{12} \quad P(\text{BLANCA}) = \frac{4}{12} \quad P(\text{AZUL}) = \frac{3}{12}$$

$$P(3R, 2B, 1A) = \frac{6!}{3!2!1!} \left(\frac{5}{12}\right)^3 \left(\frac{4}{12}\right)^2 \left(\frac{3}{12}\right)^1 = 0.12$$

La probabilidad es del 12%

EJEMPLO 29

Un ingeniero de producción sabe que el 80% de la producción de una maquina es aceptable , el 15% requiere cierto trabajo adicional y el 5% se debe descartar . En una muestra de n = 10 cual es la probabilidad de obtener 8 partes buenas, 2 partes que necesiten ser repetidas y ninguna que se deba descartar?

DESARROLLO

$$P(\text{BUENA}) = 0.8 \quad P(\text{REPETIR}) = 0.15 \quad P(\text{MALA}) = 0.05$$

$$P(8B, 2R, 0M) = \frac{10!}{8!2!0!} (0.8)^8 (0.15)^2 (0.05)^0 = 0.17$$

La probabilidad de obtener 8 partes buenas, 2 que se deban repetir y ninguna mala es del 17%

3.4.5 DISTRIBUCION UNIFORME

Una distribución uniforme es una distribución continua en la que cualquier resultado posible tiene igual oportunidad de ocurrir. El gráfico muestra una distribución uniforme en la que todos los resultados son igual de probables a lo largo de todo el recorrido de posibilidades de la distribución desde su mínimo en x_1 hasta su máximo de x_2 .

La media de una distribución uniforme está en la mitad entre los dos puntos extremos. El área total debajo de la curva en todas las distribuciones de probabilidad continua es igual a 1.0 al 100% y su área es igual al producto de la altura por la anchura.

La media y la desviación estándar de una distribución uniforme se calculan así

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$\sigma = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{12}}$$

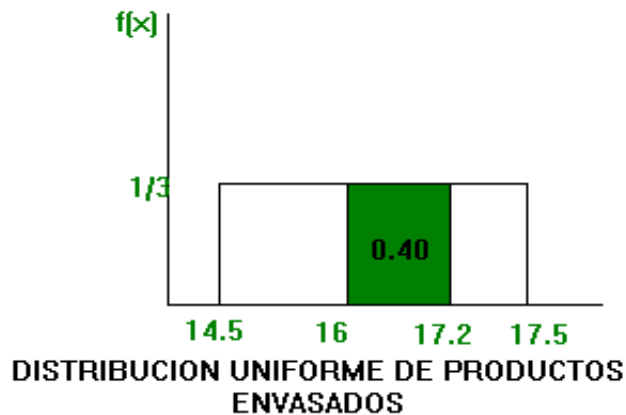
$$A l t u r a = \frac{A r e a}{A n c h u r a}$$

$$A l t u r a = \frac{1}{x_2 - x_1}$$



EJEMPLO 30

Supongamos que el contenido de los envases de borjón de 16 onzas producido por Del Monte se sitúa en cualquier peso desde 14.5 onzas hasta 17.5 onzas y sigue una distribución uniforme. Del gráfico observamos que la media aritmética y la altura son 16 y un 1/3 respectivamente.



Supongamos que Del monte quisiera hallar la probabilidad de que un envase suelto pese entre 16 y 17.2 onzas. Este valor viene dado por el área correspondiente a este intervalo como se puede ver en el gráfico y se puede determinar de dos formas. El primer método se basa en que el área es el producto de la altura por la anchura y se calcula así.

$$i = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{14.5 + 17.5}{2} = 16 \text{ onzas}$$

$$Altura = \frac{1}{x_2 - x_1} = \frac{1}{17.5 - 14.5} = \frac{1}{3}$$

$$Area = Altura \cdot Anchura = \left(\frac{1}{3}\right)(17.5 - 16) = 0.40$$

Hay un 40% de probabilidades de que un envase elegido al azar contenga entre 16 y 17.2 onzas

El segundo método determina la probabilidad de que una sola observación caiga entre dos valores X_1 y X_2 y se calcula así:

$$P(x_1 < x < x_2) = \frac{x_2 - x_1}{\text{Recorrido}}$$

$$P(16 < x < 17.2) = \frac{17.2 - 16}{17.5 - 14.5} = 0.40$$

EJEMPLO 31

Dow Chemical produce fertilizante inorgánico para el césped destinado a los propietarios de casas que fertilizan su hierba para poderla segarla mas a menudo.

Uno de los tipos de fertilizantes se vende en bolsas de peso uniformemente distribuido con un peso medio de 25 libras y un recorrido de 2.4 libras. Enrique JR necesita 23 libras para fertilizar el césped, pero duda si comprar solo una bolsa, puesto que los pesos se desvían de 25 libras en un intervalo de 2.4 libras.

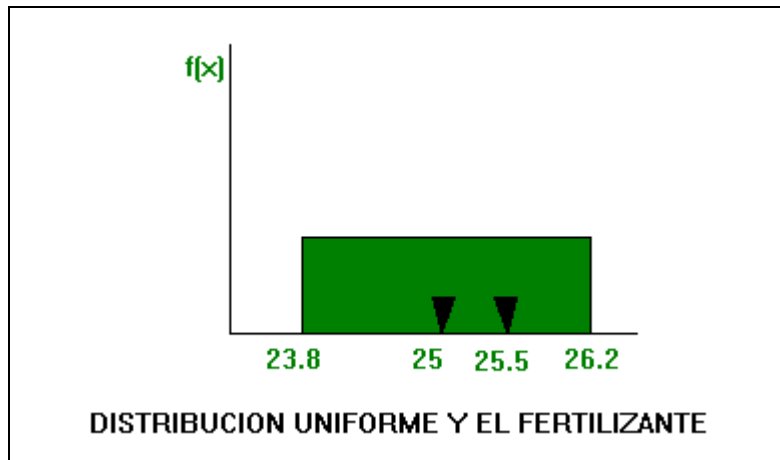
También tiene curiosidad por conocer la probabilidad de comprar una bolsa con más de 25.5 libras

DESARROLLO

Si las bolsas pesan 25 libras de promedio en un recorrido de 2.4 libras, entonces la mitad de ese recorrido ha de estar por debajo de 25 y la otra mitad por encima de 25 libras. Por lo tanto el peso mínimo será de $25 - 1.2 = 23.8$ libras y el peso máximo $25 + 1.2 = 26.2$ como se muestra en la gráfica. La probabilidad de elegir una sola bolsa que contenga entre 25.5 y 26.2 libras es:

$$P(25.5 < x < 26.2) = \frac{26.2 - 25.5}{2.4} = 0.2917$$

La probabilidad de elegir una bolsa con más de 25.5 libras es del 29.17%



EJEMPLO 32

Considere un estado casi sin información, donde los economistas solo saben que la inflación del año próximo no será menor al 5% ni mayor al 15%. Si todos los valores entre 5 y 15% se consideran igualmente probables;

- Cual es la probabilidad de que la inflación sea del 6% o menos?
- Cual es la probabilidad de que la inflación sea mayor del 8.5%?
- Cual es la probabilidad de que la inflación este entre el 9.5 y 11.5 %?
- Cual es la media y la desviación estándar de la variable aleatoria?

Resolver el ejemplo utilizando el software SPSS

DESARROLLO

Siguiendo el mismo procedimiento de los ejemplos anteriores donde solamente se cambia la función por **CDF.UNIFORM(x,menor,mayor)** encontramos lo siguiente

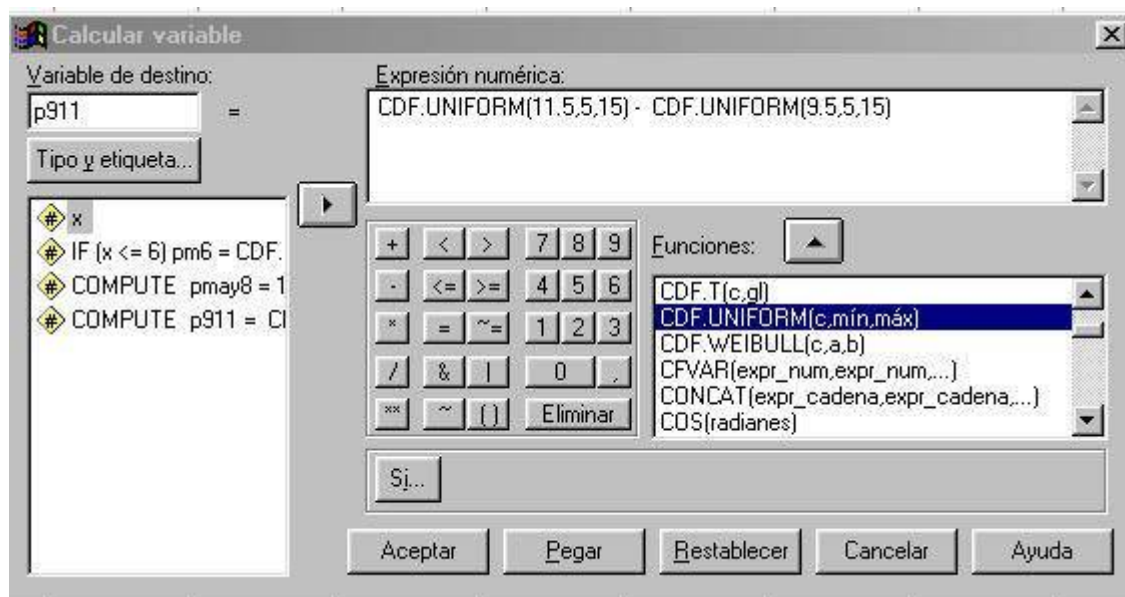
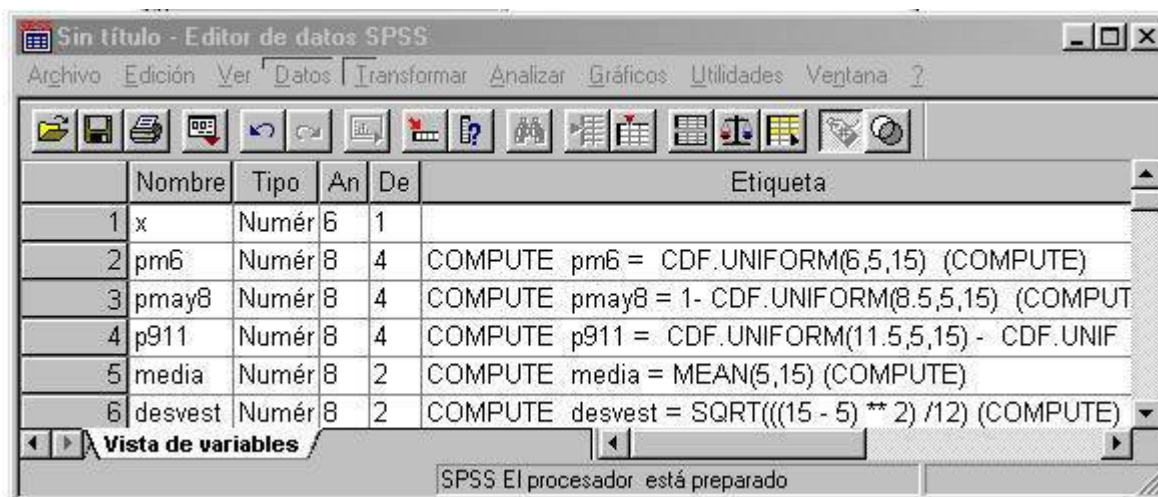
a) $P(x < 6) = \text{CDF.UNIFORM}(6,5,15) = 0.1000$

b) $P(x > 8.5) = 1 - \text{CDF.UNIFORM}(8.5,5,15) = 0.6500$

c) $P(9.5 < x < 11.5) = \text{CDF.UNIFORM}(11.5,5,15) - \text{CDF.UNIFORM}(9.5,5,15) = 0.2000$

d) media = $\text{MEAN}(5,15) = 10$

desviación estándar = $\text{SQRT}(((15 - 5) ** 2) / 12) = 2.89$





3.4.5 DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

La distribución exponencial es una distribución continua que mide el paso del tiempo y es útil cuando se abordan problemas relacionados con el transcurso del tiempo.

Mientras la distribución de Poisson es una distribución de probabilidad discreta que mide el número de ocurrencias de un suceso a lo largo del tiempo o del espacio, por ejemplo el número de clientes que podrían llegar durante un periodo determinado, la exponencial mide el tiempo que transcurrirá entre esas llegadas.

Así como la distribución de Poisson describe las tasas de llegadas de unidades (personas, camiones, barcos, aviones, llamadas telefónicas, etc) en un periodo dado, la distribución exponencial estima el lapso de tiempo entre las llegadas.

Puede medir el tiempo transcurrido entre dos llegadas sucesivas o el necesario para ejecutar una acción, como atender a un cliente, cargar un camión, descargar un barco, atender una llamada etc.

Las distribuciones de probabilidad exponencial se caracterizan por una función continua decreciente, que indica que cuanto mayor sea el valor de la variable aleatoria, medida en unidades de tiempo transcurrido, menos probable es que ocurra. Si el tiempo de llegada corresponde a una distribución de Poisson, el tiempo transcurrido entre llegadas tiene una distribución exponencial.

Sea μ el número medio de llegadas en un periodo determinado y μ^* el tiempo transcurrido entre llegadas. Entonces

$$\mu^* = 1/\mu$$

EJEMPLO 33

Si por término medio llegan 5 lanchas por hora al embarcadero. Calcule la media de llegada de una lancha?

DESARROLLO

$$\mu^* = 1/\mu = 1/5 = 0.2 \text{ HORAS}$$

3.4.5.1 DETERMINACIÓN DE LAS PROBABILIDADES

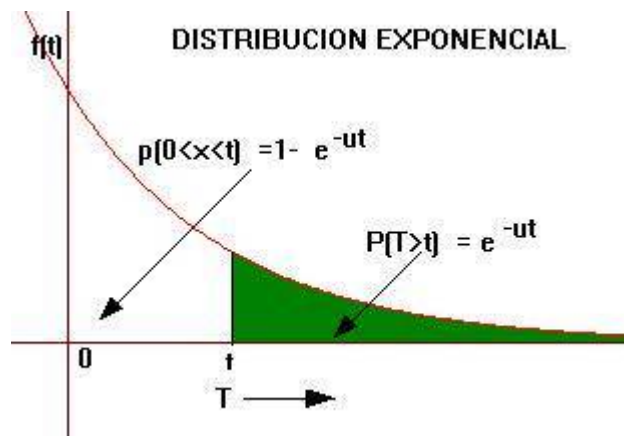
A partir de la relación entre la distribución de Poisson y la exponencial, es posible determinar la probabilidad de que transcurra un determinado periodo si se conoce la tasa media de llegada λ . La probabilidad de que no transcurran mas de t unidades de tiempo entre apariciones sucesivas es :

$$P(0 < x < t) = P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

λ = es la tasa media de aparición

La probabilidad de que el tiempo antes de que se presente la primera ocurrencia sea mayor que un tiempo dado se calcula así:

$$P(T > t) = e^{-\lambda t}$$



EJEMPLO 34

Si los camiones llegan a un muelle de carga a una tasa media de 1.5 por hora. Calcule la probabilidad de que no transcurran mas de dos horas entre las llegadas sucesivas de dos camiones?

DESARROLLO

$$P(0 < x < t) = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-(1.5)(2)} = 0.9502$$

La probabilidad de que llegue un segundo camión dentro de las dos horas siguientes a la llegada del primero es del 95.02%

EJEMPLO 35

Cierta empresa programa la llegada de sus taxis al aeropuerto local en una distribución de Poisson con una tasa media de llegadas de 12 por hora . Usted acaba de aterrizar en el aeropuerto y tiene que ir al centro de la ciudad para cerrar un gran negocio . Cual es la probabilidad de que no tenga que esperar mas de 5 minutos para tomar un taxi?

DESARROLLO

Si suponemos lo peor , que el ultimo taxi acaba de salir, buscamos :

$$\lambda^* = \frac{1}{\lambda} = \frac{12}{60} = 0.2 \text{ por minuto}$$

$$P(0 < x < 5) = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-(0.2)(5)} = 0.6321$$

La probabilidad de que llegue un taxi antes de cinco minutos es del 63.21%

EJEMPLO 36

Enfrentado A la competencia creciente de las importaciones , Metalconsulting ingeniería establece el objetivo de realizar cada proyecto en el tiempo medio de 4 días. Metalconsulting sabe que los competidores extranjeros pueden realizar un proyecto en 1.2 días . Si la probabilidad de que Metalconsulting pueda alcanzar a la competencia es inferior al 50%, Se deberá establecer un nuevo plan de trabajo?

DESARROLLO

Como los datos se expresan en tiempo invertido (4 días) para realizar un proyecto, es necesario definir la información como un cuarto de proyecto por día, por lo tanto μ se convierte en 0.25 por día por lo tanto tenemos:

$$\lambda^* = \frac{1}{4} = 0.25 \text{ por día}$$

$$P(0 < x < 1.2) = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-(0.25)(1.2)} = 0.2592$$

La probabilidad de que Metalconsulting pueda realizar un proyecto en 1.2 días es del 25.92%, por lo tanto debe idear un nuevo plan de producción.

EJEMPLO 37

Los transistores fabricados por Bell Laboratories tienen una vida media de 25 horas, es decir , el tiempo medio entre fallos (MTBF) es de 25 horas. Como jefe de compras de su empresa, usted adquiere 1.000 de estos transistores:

- Cual es la probabilidad de que un solo transistor dure mas de 30 horas?
- Cuantos de ellos duraran 20 horas como máximo?

Si MTBF es de 25 horas , cada hora fallara 1/25 de transistor, por lo tanto

$$a) \lambda = \frac{1}{25} = 0.25 \text{ por hora}$$

$$P(0 < x < 30) = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-\left(\frac{1}{25}\right)(30)} = 0.6988$$

$$P(x > 30) = 1 - P(x < 30) = 1 - 0.6988 = 0.3012$$

Hay una probabilidad del 30.12% de que cualquier transistor dado, dure mas de 30 horas antes de fallar

$$b) P(0 < x < 20) = 1 - e^{-\left(\frac{1}{25}\right)(20)} = 0.5507$$

Hay una probabilidad del 55.07% de que cualquier transistor dado, no dure mas de 20 horas por lo tanto de los 1000 transistores que acaba de comprar solo 551 duraran 20 hora como máximo

TALLER MODULO III

SUGERENCIA : Resuelva todos los ejercicios utilizando cualquiera de los multiples applets que se consiguen en internet, o utilice cualquier paquete estadístico (SPSS, SAS, STAGRAPHS, MINITAB, etc) o en su defecto utilice el método antiguo y tradicional a través de las tablas estadísticas.

1. Una empresa de transporte sabe que el 20% de sus excursiones llegan tarde . Si hay programado 10 excursiones. Cual es la probabilidad de que :
 - a) ninguna llegue tarde? **R/ 0.1074**
 - b) Todas lleguen tarde? **R/ 0.0000**
 - c) Una llegue tarde? **R/ 0.2684**
 - d) cuatro lleguen tarde? **R/ 0.0881**

- e) Menos de cuatro lleguen tarde? R/ 0.8791
 - f) Lleguen tarde cuatro o mas? R/ 0.1209
 - g) Lleguen tarde entre cinco y siete inclusive? R/ 0.0327
2. Cual es la probabilidad de contestar correctamente , examen de falso y verdadero de 5 preguntas:
- a) 1 pregunta? R/ 0.1563
 - b) 2 preguntas? R/ 0.3125
 - c) 3 preguntas? R/ 0.3125
 - d) 4 preguntas? R/ 0.1563
 - e) por lo menos 3? R/ 0.5000
 - f) menos de 3 preguntas? R/ 0.500
 - g) Tres o menos preguntas? R/ 0.8125
 - h) 4 o mas preguntas? R/ 0.1876
 - i) ninguna pregunta? R/ 0.0313
 - j) Todas las preguntas? R/ 0.0313
3. Si se sabe que 9 de cada 10 personas tienen caries dentales , al tomar una muestra aleatoria de 5 personas , cual es la probabilidad de que :
- a) cuatro tengan caries? R/ 0.3280
 - b) Dos o mas tengan caries? R/ 0.9995
 - c) Dos o mas no tengan caries? R/ 0.08146
 - d) Uno mas tenga caries? R/ 0.9999
4. Según una encuesta el 70% de los de los adultos de la costas pacifica y atlántica creen en fantasmas . Si se escogen al azar 9 personas adultas; Cual es la probabilidad de que :
- a) ninguna crea? R/ 0.0000
 - b) Todas crean? R/ 0.0404
 - c) Cinco crean? R/ 0.1715
 - d) tres o menos crean? R/ 0.0253
 - e) Crean mas de cuatro? R/ 0.9012
 - f) Crean menos de dos? R/ 0.0004
 - g) Crean cuatro o menos? R/ 0.0988
5. Un articulo publicado en una revista universitaria , afirma que el 40% de los universitarios colombianos a partir del año 2.000 poseen teléfonos celulares. Si se escoge una muestra aleatoria de 20 universitarios, cual es la probabilidad de que:
- a) ninguno tenga teléfono celular? R/ 0.0000
 - b) Todos tengan teléfono celular? R/ 0.0000
 - c) La mitad tengan teléfono celular? R/ 0.1171
 - d) Cuatro o menos tengan teléfono celular? R/ 0.0510
 - e) Tengan teléfono celular entre 5 y 10? R/ 0.8215
 - f) Nueve o menos tengan teléfono celular? R/ 0.7553
 - g) Por lo menos 9 tengan teléfono celular? R/ 0.4044
6. Si el 20% de los estudiantes de la usaca pierde el primer semestre y si se toma al azar un grupo de 6 estudiantes , cual es la probabilidad de que :
- a) máximo dos aprueben? R/ 0.0169

- b) Todos aprueben? R/ 0.2621
 - c) Ninguno apruebe? R/ 0.2621
7. De los 6000 estudiantes matriculados en ingeniería se sabe que 4.800 de ellos se trasladan a la universidad utilizando el servicio publico. Si se selecciona una muestra al azar de 8 estudiantes , cual es la probabilidad de que :
- a) No mas de dos utilicen dicho servicio? R/ 0.0012
 - b) Tres o mas no lo utilicen? R/ 0.2031
 - c) Exactamente dos no lo utilicen? R/ 0.2936
 - d) Exactamente dos lo utilicen? R/ 0.0011
8. Se sabe que en una universidad con 2000 estudiantes , 800 de ellos usan gafas. Si se realiza una encuesta a 5 estudiantes ; cual es la probabilidad de que :
- a) Dos o mas usen gafas? R/ 0.6630
 - b) Dos o mas no usen gafas? R/ 0.9130
 - c) De los 2000 estudiantes cuantos espera usted que por lo menos dos no usen gafas? R/ E = 1826 estudiantes
9. Una compañía de seguros considera que alrededor del 25% de los carros de servicio publico se accidentan cada año. Cual es la probabilidad de que por lo menos tres de una muestra de siete vehículos afiliados hayan tenido accidente en el año? R/ 0.2435
10. De la producción de envases metálicos de una fabrica se sabe que el 3% son defectuosos . Cual es la probabilidad de que en una muestra de siete envases:
- a) Por lo menos 3 sean buenos? R/ 0.9999
 - b) Por lo menos tres sean defectuosos? R/ 0.086
11. Si la probabilidad de que un niño enferme de sarampión es del 1%, cual es la probabilidad de que en una familia con 5 hijos resulten :
- a) Dos enfermos? Dos o menos sean repitentes? R/ 0.00097
 - b) Uno o mas enfermos? Dos o menos sean repitentes? R/ 0.049
 - c) Dos o menos no se enfermen de sarampión? Dos o menos sean repitentes? R/ 0.999999
12. En una población de trabajadores del estado que gozan de pensión de jubilación; el 36% tiene mas de 65 años. Cual es la probabilidad en una muestra de 26 pensionados 8 o mas tengan mas de 65 años? Dos o menos sean repitentes? R/ 0.7745
13. Ebanistería el Tahúr & Cia , fabrica mesas de billar pool, sospecha que el 2% de sus productos esta defectuoso en alguna forma. Si esta sospecha es correcta , encuentre la probabilidad de que en una muestra de 9 mesas:
- a) Haya por lo menos una defectuosa? R/ 0.166
 - b) Ninguna defectuosa? R/ 0.834
 - c) La mitad este defectuosa?
 - d) Todas estén defectuosa?
14. Muchas compañías de aviación violando la normatividad de la Aeronáutica, aceptan un numero de reservas superior al de los cupos disponibles porque saben que algunos pasajeros anularan sus reservas en el último minuto. Una compañía con aviones para 12 pasajeros sabe que el 10% de los

- pasajeros que hacen reservas no comparecen a la hora del vuelo. Si dicha compañía recibe 15 reservas para sus vuelos , cual es la probabilidad de que en un vuelo dado:
- a) Se quede sin cupo una persona? **R/ 0.2669**
 - b) Se quede sin cupo una persona como mínimo? **R/ 0.8159**
 - c) Haya un cupo vacío(asiento)? **R/ 0.0428**
 - d) Haya un cupo vacío(asiento) como mínimo? **R/ 0.0556**
15. Si la tercera parte de los estudiantes de un curso de estadística son repitentes, calcule la probabilidad de que en una muestra aleatoria de 4 estudiantes de dicho curso:
- a) Dos o menos sean repitentes? **R/ 0.89**
 - b) Uno o mas que no sea repitente? **R/ 0.9881**
16. El 2% de las cartas que se envían a Buenaventura no llevan los timbres postales correctos. En 400 de dichas cartas :
- a) Cuantos timbres incorrectos se espera encontrar? **R/ 8 cartas**
 - b) Cual es la probabilidad de encontrar cinco o menos cartas con timbres incorrectos? **R/ 0.191**
 - c) Cual es la probabilidad de encontrar mas de cinco cartas con timbres incorrectos? **R/ 0.809**
 - d) Cual es la probabilidad de encontrar cinco o mas cartas con timbres incorrectos? **R/ 0.90**
17. Según la American Medical Association indican que solo el 30% de los hombres adultos se someten a un chequeo medico anual. El doctor Corazón Sano, cardiólogo local , consulta los datos de siete de sus pacientes:
- a) Todos se hayan sometido a chequeos? **R/ 0.0002**
 - b) Ninguno se haya sometido a chequeos? **R/ 0.0824**
 - c) Entre dos y cuatros inclusive se hayan sometido a chequeos? **R/ 0.6418**
 - d) Entre uno y tres inclusive se hayan sometido a chequeos? **R/ 0.7917**
 - e) Cuatro no se hayan sometido a chequeo? **R/ 0.2269**
 - f) De dos a cuatro inclusive no se hayan sometido a chequeos ?**R/ 0.3491**
 - g) Cinco como mínimo no se hayan sometido a chequeos? **R/ 0.6472**
 - h) No se hayan sometido a chequeo menos de tres? **R/ 0.0288**
18. El 70% de la población sufrirá accidentes graves de automóvil a lo largo de sus vidas . Si se eligen al azar 10 personas:
- a) Cual es la probabilidad de que 3 tengan accidentes?
 - b) Cuantas de las 10 esperaría que tengan un accidente?
19. Supóngase que de cada 5000 carros , dos tienen problemas con las llantas en cierta autopista. Si 1000 carros transitan por la autopista durante cierto día , cual es la probabilidad de que por lo menos dos tengan problemas en las llantas? **R/ 0.0615**

20. Supóngase que en promedio una casa de cada 2000 en cierta zona de Cali, se incendia durante el año . Si hay 6000 casas en dicha zona , cual es la probabilidad de que :
- Mas de 3 casas se incendien durante el año? **R/ 0.3527**
 - Exactamente dos? **R/ 0.2240**
21. Se sabe que el 60% de los alumnos de una universidad asisten a clase s el día viernes según una encuesta a alumnos de esta universidad . Cual es la probabilidad: de que :
- Siete o mas asistan a clases el día viernes? **R/ 0.1064**
 - Dos o mas no asistan a clase el día viernes? **R/ 0.8936**
22. El promedio de asaltos en cierta ciudad es de dos por día . Utilizando la distribución de Poisson , determinar la probabilidad de que en un día haya:
- Tres o menos asaltos? **R/ 0.8571**
 - Dos o menos asaltos? **R/ 0.6767**
23. Una compañía de seguros considera que solamente alrededor del 0.01% de la población le ocurre cierto tipo de accidente . Cada año la empresa tiene 10.000 asegurados contra este tipo de accidente. Cual es la probabilidad de que máximo tres de ellos sufran accidente? **R/ 0.9810**
24. En un conmutador se registran llamadas telefónicas a razón de 4.6 llamadas por minutos. Calcule la probabilidad de que se presente cada una de las siguientes ocurrencias en un intervalo de un minuto:
- Exactamente dos llamadas? **R/ 0.1063**
 - Por lo menos dos llamadas? **R/ 0.9437**
 - Ninguna llamada? **R/ 0.0101**
 - De dos a seis llamadas? **R/ 0.7617**
25. Un proceso de fabricación da lugar a 1.2 defectos por cada centenar de unidades fabricadas y siguen una distribución de Poisson . Si esto es cierto , Cual es probabilidad de que entre las 500 próximas unidades haya tres defectos? **R/ 0.0892**
26. El presidente tiene que elegir un comité de 5 senadores entre 12, de los cuales cuatro son liberales y resto conservadores, Cual es la probabilidad de que:
- Todos sean conservadores? **R/ 0.0707**
 - Tres sean liberales? **R/ 0.1414**
 - Dos sean conservadores? **R/ 0.1414**
 - Cuatro como mínimo sean conservadores? **R/ 0.4242**
 - La mayoría sea conservadora? **R/ 0.8485**
27. El consejo de Administración una comercializadora consta de 4 economistas, tres contadores y cinco ingenieros. Si hay que elegir al azar un comité de siete personas , Cual es la probabilidad que este integrado por dos economistas, dos contadores y tres ingenieros? **R/ 0.0895**
28. Suponga que el tiempo que tardan en recibir su orden después de hacerla en un restaurante promedia 10 minutos . Si el tiempo que espera en ser atendido se distribuye exponencialmente:

- a) Calcule la probabilidad de que su tiempo de espera sea mayor de 10 minutos? R/ 0.368
 - b) Calcule la probabilidad de que su tiempo de espera sea menor o igual a 10 minutos? R/ 0.632
 - c) Calcule la probabilidad de que su tiempo de espera sea de 3 minutos o menos? R/ 0.259
29. Un uso importante de la distribución exponencial es dar confiabilidad a los problemas. Suponga que una maquina falla un promedio de una vez por cada dos años . Encuentre la probabilidad de que la maquina no falle durante el año siguiente? R/ $P(t > 1) = 0.607$
30. El tiempo para atender un auto en una gasolinera es una variable aleatoria exponencial con una media de dos minutos: Calcule la probabilidad de que un carro recién llegado sea atendido:
- a) Antes de un minuto? R/ 0.3935
 - b) Antes de cuatro minutos? R/ 0.8647
 - c) Entre dos y seis minutos? R/ 0.3181
 - d) Solo en cinco minutos o mas? R/ 0.0821
31. Una unidad quirúrgica hospitalaria no puede quedar jamás sin energía . En consecuencia , el administrador de un hospital planea comprar uno o mas generadores de energía para emergencia y reducir esa probabilidad a menos del 1%. Los modelos tienen una media de tiempo entre fallas de 500 horas. Determine la probabilidad de una falla en la energía eléctrica de una unidad quirúrgicas:
- a) Se compra un generador de emergencia y la ciudad tiene un apagón de 10 horas? R/ $p(x \leq 10) = 0.0198$
 - b) Se compran dos de dichos generadores y ocurre el mismo evento. Cuales son las probabilidades de evitar cualquier falla de energía Electric? R/ Si los generadores trabajan independientemente $p = (0.0198)(0.0198) = 0.000392$
32. El tiempo que las personas tienen que esperar en un restaurante de comidas rápida es una variable aleatoria exponencial con una media de dos minutos : Calcule la probabilidad de que un cliente deba esperar:
- a) Mas de dos minutos? R/ 0.3679
 - b) Mas de tres minutos? R/ 0.2231
 - c) Menos de 30 segundos? R/ 0.2212
 - d) Entre dos y tres minutos? R/ 0.1448
33. Los clientes llegan a una exhibición a razón de 6.8 clientes / hora. Calcular la probabilidad de que :
- a) En la primera media hora por lo menos lleguen dos clientes? R/ 0.8532
 - b) En el primer cuarto de hora no llegue ningún cliente? R/ 0.1827
 - c) En cualquier hora dada llegue mas de uno? R/ 0.9913

34. Los accesorios de iluminación industrial fabricado por General Electric tienen una vida media de 3600 horas, que siguen una distribución de Poisson:
- Que porcentaje de ellos duran mas de 4320 horas?
 - Que porcentaje duran mas de 3960 horas?
35. En los últimos 20 años Rene ha ido a su trabajo todos los días en carro. El viaje mas rápido ha durado 63 minutos y el mas lento 110 minutos. Si los tiempos de conducción están distribuido uniformemente:
- Cual es el tiempo promedio invertido por Rene en el viaje? **R/ 86.5 minutos**
 - Cual es la probabilidad de que se demore 1.5 horas en el viaje? **R/ 57%**
36. En un esfuerzo por reducir los costos un conocido restaurante de comida rápida, estudio la tendencia de sus procesadores automáticos a determinar el peso de las hamburguesas de un cuarto de libra. Encontró que los pesos variaban de 3.2 a 4.9 onzas. Suponiendo una distribución uniforme, Que porcentaje de las hamburguesas pesan mas de un cuarto de libra? **R/ 53%**

REVISTAS ELECTRONICAS

- [*Journal of Statistics Education*](#). Excelente revista (¡gratuita!) editada por la American Statistical Association sobre educación estadística (a todos los niveles)
- [Homepage de la American Statistical Association](#). La mayor association de estadísticos, editora de *Journal of Agricultural, Biological, and Environmental Statistics*, *Journal of the American Statistical Association*, *Journal of Statistics Education* y *The American Statistician* entre otras revistas.
- [*Environmental and Ecological Statistics*](#)
- [*Community Ecology*](#)
- [*Journal of Agricultural, Biological, and Environmental Statistics*](#)
- [*Bulletin of the Ecological Society of America*](#) (gratuita; contiene artículos de ecología estadística)
- [*Journal of Statistical Software*](#) (gratuita)
- [*InterStat \(Statistics on the Internet\)*](#) (gratuita)
- [Probability and Statistics Journals on the Web](#)

ESTADISTICA ON LINE

- [Aula Virtual de Bioestadística, Universidad Complutense](#)
- [Curso de bioestadística de la Universidad de Málaga](#)

57. [Apuntes de Bioestadística. Unidad de Bioestadística Clínica del Hospital Ramón y Cajal](#)
58. [Lecciones de Estadística, 5campus.org \(análisis multivariante...\)](#)
59. [Curso de Bioestadística de la Universidad Nacional de Misiones \(Argentina\)](#)
60. [Curso de estadística \(para ingenieros\) de una universidad mexicana](#)
61. [Cursos de estadística de la Universidad de California, Los Angeles](#)
62. [Cursos de estadística de la Universidad de Michigan](#)
63. [Electronic Statistics Textbook](#)
64. [A New View of Statistics](#)
65. [HyperStat Statistics Textbook](#)
66. [Statistics at Square One](#)
67. [Statistics Every Writer Should Know](#)
68. [Introductory Statistics: Concepts, Models, and Applications](#)
69. [Multivariate Statistics: Concepts, Models, and Applications](#)
70. [A complete guide to nonlinear regression](#)
71. [Ordination Methods for Ecologists](#)
72. [Annotated Bibliography of Canonical Correspondence Analysis and related constrained ordination methods 1986-1993](#)
73. [Multivariate Statistics: an Introduction](#)
74. [A glossary of ordination-related terms](#)
75. [Glossary of Statistical Terms and Medical Citations for Statistical Issues](#)
76. [Glossary of over 30 statistical terms](#)
77. [EVSC 503 Applied Statistics for the Environmental Sciences](#)
78. [<http://s9000.furman.edu/mellonj/spss1.htm>](#)
79. [<http://www.indiana.edu/~statmath/stat/spss/win/index.html>](#)
80. [<http://www.utexas.edu/cc/stat/tutorials/spss/SPSS1/Outline1.html>](#)
81. [<http://web.uccs.edu/lbecker/SPSS/content.htm>](#)
82. [<http://core.ecu.edu/psyc/wuenschk/SPSS/SPSS-Data.htm>](#)
83. [<http://www.tulane.edu/~panda2/Analysis2/ahome.html>](#)
84. [<http://www.shef.ac.uk/~scharr/spss/index2.htm>](#)
85. [<http://calcnet.mth.cmich.edu/org/spss/index.html>](#)
86. [<http://calcnet.mth.cmich.edu/org/spss/toc.htm>](#)
87. [<http://www.public.asu.edu/~pythagor/spssworkbook.htm>](#)
88. [<http://lib.stat.cmu.edu/>](#)
89. [<http://www.stat.ufl.edu/vlib/statistics.html>](#)

90. <http://www.statserv.com/software.html>
91. <http://www.maths.uq.edu.au/~gks/webguide/>
92. <http://www.statistics.com/>
93. <http://www.helsinki.fi/~jpuranen/links.html#stc>
94. <http://www.maths.uq.edu.au/~gks/webguide/free.html>
95. <http://nhsbig.inhs.uiuc.edu/>
96. <http://www.okstate.edu/artsci/botany/ordinate/software.htm>
97. <http://life.bio.sunysb.edu/ee/biometry/>
98. <http://life.bio.sunysb.edu/morph/software.html>
99. <http://pbil.univ-lyon1.fr/ADE-4/ADE-4.html>
100. http://ourworld.compuserve.com/homepages/Rainer_Wuerlaender/statsoft.htm
101. <http://www.stat.auckland.ac.nz/~mja/Programs.htm>
102. <http://it.stlawu.edu/~rlock/maa99/>
103. <http://it.stlawu.edu/~rlock/tise98/java.html>
104. <http://www.stat.vt.edu/~sundar/java/applets/>
105. <http://www.kuleuven.ac.be/ucs/java/index.htm>
106. <http://noppa5.pc.helsinki.fi/koe/>
107. <http://www2.kenyon.edu/people/hartlaub/MellonProject/mellon.html>

Demostraciones Java para el aprendizaje de la estadística

108. [*Electronic Textbook \(UCLA\)*](#), programa *on-line* de representación y cálculo de funciones de densidad y de distribución (normal, F , ji-cuadrado, números aleatorios...). Equivalente a un libro de tablas

BASES DE DATOS:

1. Political Database of the Americas ... the Western Hemisphere. Base de datos con información política de los 25 países de la hemisferia del oeste.
<http://www.georgetown.edu/pdba/>
<http://www.georgetown.edu/pdba/spanish.html>
<http://www.georgetown.edu/pdba/Elecdata/Col/colombia.html>
2. FAOSTAT es una base de datos estadísticos integrada on-line que actualmente contiene más de 1 millón de series anuales internacionales en las siguientes materias: <http://apps.fao.org/inicio.htm>

3. DEPARTAMENTO ADMINISTRATIVO NACIONAL DE ESTADÍSTICA.

<http://www.dane.gov.co/Enlaces/enlaces.html>

<http://www.dane.gov.co/index.html>

[http://www.dane.gov.co/Enlaces/Organismos Estadisticos/America/america.html](http://www.dane.gov.co/Enlaces/Organismos_Estadisticos/America/america.html)

[http://www.dane.gov.co/Enlaces/Organismos Estadisticos/Europa/europa.html](http://www.dane.gov.co/Enlaces/Organismos_Estadisticos/Europa/europa.html)

[http://www.dane.gov.co/Enlaces/Organismos Estadisticos/Asia/asia.html](http://www.dane.gov.co/Enlaces/Organismos_Estadisticos/Asia/asia.html)

[http://www.dane.gov.co/Enlaces/Organismos Estadisticos/Africa/africa.html](http://www.dane.gov.co/Enlaces/Organismos_Estadisticos/Africa/africa.html)

4.. PROEXPORT COLOMBIA promueve las exportaciones colombianas. Apoya y asesora empresarios colombianos ... 091)5242015. Proexport. Quienes Somos Sobre ...

www.proexport.com.co/

<http://www.proexport.com.co/VBeContent/home.asp?Perfil=1>

5. DEPARTAMENTO NACIONAL DE PLANEACION

http://www.dnp.gov.co/03_PROD/PUBLIC/13P_MS.HTM

http://www.dnp.gov.co/03_PROD/BASES/BASES.HTM

6 BANCO DE LA REPUBLICA

<http://www.banrep.gov.co/>

http://www.banrep.gov.co/economia/ctanal1sec_ext.htm#tasa

7. ICFES El Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior **ICFES**

<http://www.icfes.gov.co/>

BIBLIOGRAFÍA

22. Montgomery Douglas y Runger George.(1996), Probabilidad y Estadística aplicada a la Ingeniería., Mcgraw-Hill, México
23. Montgomery Douglas y Hines William.(1995), Probabilidad y Estadística aplicada a la Ingeniería. y Administración, segunda edición ,CECSA, México
24. Mendenhall William, Wackerly Dennis y Scheaffer Richard (1994), Estadística Matemáticas con Aplicaciones , segunda edición, Grupo Editorial Iberoamerica. M, México
25. Govinden Portus Lincoyan.(1998), Introducción a la Estadística,. Mcgraw-Hill, Santafé de Bogotá
26. Webster Allen L.(1998), Estadística aplicada a la Empresa y a la Economía, segunda edición, Mcgraw-Hill, Madrid
27. Kohler Heinz.(1996), Estadística para Negocios y Economía, primera edición ,CECSA, México
28. Martinez Bencardino Ciro (1995), Estadística , sexta edición ,ECOEDICIONES Santafé de Bogotá.
29. Alvarez C Ricardo (1994), Estadística Fundamental Aplicada, primera edición ,PUBLIADCO, Cali
30. Estadística," Enciclopedia Microsoft® Encarta® 2000. © 1993-1999 Microsoft Corporation.

31. Stockburger David W (1996) Introductory Statistics: Concepts, models an applications, , <http://www.psychstat.smsu.edu/sbk00.htm>
32. Mendoza Duran Carlos. (1995)Probabilidad y Estadística, <http://w3.mor.itesm.mx/~cmendoza/ma835/ma83500.html>
33. Valdés Fernando ,Comprensión y uso de la estadística, <http://www.cortland.edu/flteach/stats/glos-sp.html>
34. Hurtado Minotta Enrique A, Reflexiones para el Currículo, <http://www.geocities.com/soho/atrium/7521/tesis.html>
35. Academic Freedom , www.hrw.org/wr2k/issues-01.htm
36. Gonzalez Felipe, Africa : El silencio de los tambores, www.arrakis.es/~trazeg/gonzalez.html.
37. El año 2000, WWW.arrakis.es/~trazeg/anno2000.html
38. Mendenhall, W.; D.D. Wackerly y R.L. Scheaffer. *Estadística Matemática con Aplicaciones*. Grupo Editorial Iberoamérica. México.
39. Freund, John E. y Gary A. Simon. *Estadística elemental*. Prentice-Hall Hispanoamericana, SA. México, 1994. (8ª edición.)
40. Spiegel, M.R. *Estadística*. McGraw-Hill. México. (Serie Schaum.)
41. <http://www.unl.edu.ar/fave/sei/encuestas/index.html>.
42. Wonnacott, Thomas H. y Ronald J. Wonnacott (1998) *Introducción a la estadística*. Limusa/IPN. México.

ANEXOS

TABLAS DE DISTRIBUCIONES PROBABILISTICAS

ehurtado@usc.edu.co

Tabla Generada mediante el software SPSS Por Enrique A Hurtado M

TABLA A.

PROBABILIDADES BINOMIALES PARA VALORES INDIVIDUALES DE **X**

Los valores de esta tabla dan la probabilidad de **x** éxitos en **n** ensayos de un experimento binomial, en donde **p** es la probabilidad de éxito en un ensayo. Por ejemplo con **n = 5** ensayos y **p = 0.25**, la probabilidad de **x = 3** éxitos es de **0.0879**. $P(x = 3) = 0.0879$

La tabla también se puede leer para probabilidades de mas de 0.50 con solo expresar de otra forma la pregunta, por lo tanto con **n = 5** ensayos y **p = 0.75**, la probabilidad de **x = 3** éxitos es igual a la probabilidad de **x = 2** fracasos , dado **p = 0.25** o sea **0.2637**

p

n	x	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
1	0	.9500	.9000	.8500	.8000	.7500	.7000	.6500	.6000	.5500	.5000
1	1	.0500	.1000	.1500	.2000	.2500	.3000	.3500	.4000	.4500	.5000
.
2	0	.9025	.8100	.7225	.6400	.5625	.4900	.4225	.3600	.3025	.2500
2	1	.0950	.1800	.2550	.3200	.3750	.4200	.4550	.4800	.4950	.5000
2	2	.0025	.0100	.0225	.0400	.0625	.0900	.1225	.1600	.2025	.2500
.
3	0	.8574	.7290	.6141	.5120	.4219	.3430	.2746	.2160	.1664	.1250
3	1	.1354	.2430	.3251	.3840	.4219	.4410	.4436	.4320	.4084	.3750
3	2	.0071	.0270	.0574	.0960	.1406	.1890	.2389	.2880	.3341	.3750
3	3	.0001	.0010	.0034	.0080	.0156	.0270	.0429	.0640	.0911	.1250
.
4	0	.8145	.6561	.5220	.4096	.3164	.2401	.1785	.1296	.0915	.0625
4	1	.1715	.2916	.3685	.4096	.4219	.4116	.3845	.3456	.2995	.2500
4	2	.0135	.0486	.0975	.1536	.2109	.2646	.3105	.3456	.3675	.3750
4	3	.0005	.0036	.0115	.0256	.0469	.0756	.1115	.1536	.2005	.2500
4	4	.0000	.0001	.0005	.0016	.0039	.0081	.0150	.0256	.0410	.0625
.
5	0	.7738	.5905	.4437	.3277	.2373	.1681	.1160	.0778	.0503	.0313
5	1	.2036	.3281	.3915	.4096	.3955	.3601	.3124	.2592	.2059	.1563
5	2	.0214	.0729	.1382	.2048	.2637	.3087	.3364	.3456	.3369	.3125
5	3	.0011	.0081	.0244	.0512	.0879	.1323	.1811	.2304	.2757	.3125
5	4	.0000	.0005	.0022	.0064	.0146	.0283	.0488	.0768	.1128	.1563
5	5	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010	.0024	.0053	.0102	.0185	.0313
.
6	0	.7351	.5314	.3771	.2621	.1780	.1176	.0754	.0467	.0277	.0156
6	1	.2321	.3543	.3993	.3932	.3560	.3025	.2437	.1866	.1359	.0937
6	2	.0305	.0984	.1762	.2458	.2966	.3241	.3280	.3110	.2780	.2344
6	3	.0021	.0146	.0415	.0819	.1318	.1852	.2355	.2765	.3032	.3125
6	4	.0001	.0012	.0055	.0154	.0330	.0595	.0951	.1382	.1861	.2344
6	5	.0000	.0001	.0004	.0015	.0044	.0102	.0205	.0369	.0609	.0937
6	6	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0007	.0018	.0041	.0083	.0156

.
7	0	.6983	.4783	.3206	.2097	.1335	.0824	.0490	.0280	.0152	.0078
7	1	.2573	.3720	.3960	.3670	.3115	.2471	.1848	.1306	.0872	.0547
7	2	.0406	.1240	.2097	.2753	.3115	.3177	.2985	.2613	.2140	.1641
7	3	.0036	.0230	.0617	.1147	.1730	.2269	.2679	.2903	.2918	.2734
7	4	.0002	.0026	.0109	.0287	.0577	.0972	.1442	.1935	.2388	.2734
7	5	.0000	.0002	.0012	.0043	.0115	.0250	.0466	.0774	.1172	.1641
7	6	.0000	.0000	.0001	.0004	.0013	.0036	.0084	.0172	.0320	.0547
7	7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0006	.0016	.0037	.0078
.
8	0	.6634	.4305	.2725	.1678	.1001	.0576	.0319	.0168	.0084	.0039
8	1	.2793	.3826	.3847	.3355	.2670	.1977	.1373	.0896	.0548	.0313
8	2	.0515	.1488	.2376	.2936	.3115	.2965	.2587	.2090	.1569	.1094
8	3	.0054	.0331	.0839	.1468	.2076	.2541	.2786	.2787	.2568	.2187
8	4	.0004	.0046	.0185	.0459	.0865	.1361	.1875	.2322	.2627	.2734
8	5	.0000	.0004	.0026	.0092	.0231	.0467	.0808	.1239	.1719	.2187
8	6	.0000	.0000	.0002	.0011	.0038	.0100	.0217	.0413	.0703	.1094
8	7	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0012	.0033	.0079	.0164	.0313
8	8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0007	.0017	.0039
.
9	0	.6302	.3874	.2316	.1342	.0751	.0404	.0207	.0101	.0046	.0020
9	1	.2985	.3874	.3679	.3020	.2253	.1556	.1004	.0605	.0339	.0176
9	2	.0629	.1722	.2597	.3020	.3003	.2668	.2162	.1612	.1110	.0703
9	3	.0077	.0446	.1069	.1762	.2336	.2668	.2716	.2508	.2119	.1641
9	4	.0006	.0074	.0283	.0661	.1168	.1715	.2194	.2508	.2600	.2461
9	5	.0000	.0008	.0050	.0165	.0389	.0735	.1181	.1672	.2128	.2461
9	6	.0000	.0001	.0006	.0028	.0087	.0210	.0424	.0743	.1160	.1641
9	7	.0000	.0000	.0000	.0003	.0012	.0039	.0098	.0212	.0407	.0703
9	8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0013	.0035	.0083	.0176
9	9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0008	.0020
.
10	0	.5987	.3487	.1969	.1074	.0563	.0282	.0135	.0060	.0025	.0010
10	1	.3151	.3874	.3474	.2684	.1877	.1211	.0725	.0403	.0207	.0098
10	2	.0746	.1937	.2759	.3020	.2816	.2335	.1757	.1209	.0763	.0439
10	3	.0105	.0574	.1298	.2013	.2503	.2668	.2522	.2150	.1665	.1172

10	4	.0010	.0112	.0401	.0881	.1460	.2001	.2377	.2508	.2384	.2051
10	5	.0001	.0015	.0085	.0264	.0584	.1029	.1536	.2007	.2340	.2461
10	6	.0000	.0001	.0012	.0055	.0162	.0368	.0689	.1115	.1596	.2051
10	7	.0000	.0000	.0001	.0008	.0031	.0090	.0212	.0425	.0746	.1172
10	8	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0014	.0043	.0106	.0229	.0439
10	9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0016	.0042	.0098
10	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010
.
11	0	.5688	.3138	.1673	.0859	.0422	.0198	.0088	.0036	.0014	.0005
11	1	.3293	.3835	.3248	.2362	.1549	.0932	.0518	.0266	.0125	.0054
11	2	.0867	.2131	.2866	.2953	.2581	.1998	.1395	.0887	.0513	.0269
11	3	.0137	.0710	.1517	.2215	.2581	.2568	.2254	.1774	.1259	.0806
11	4	.0014	.0158	.0536	.1107	.1721	.2201	.2428	.2365	.2060	.1611
11	5	.0001	.0025	.0132	.0388	.0803	.1321	.1830	.2207	.2360	.2256
11	6	.0000	.0003	.0023	.0097	.0268	.0566	.0985	.1471	.1931	.2256
11	7	.0000	.0000	.0003	.0017	.0064	.0173	.0379	.0701	.1128	.1611
11	8	.0000	.0000	.0000	.0002	.0011	.0037	.0102	.0234	.0462	.0806
11	9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0018	.0052	.0126	.0269
11	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0007	.0021	.0054
11	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0005
.
12	0	.5404	.2824	.1422	.0687	.0317	.0138	.0057	.0022	.0008	.0002
12	1	.3413	.3766	.3012	.2062	.1267	.0712	.0368	.0174	.0075	.0029
12	2	.0988	.2301	.2924	.2835	.2323	.1678	.1088	.0639	.0339	.0161
12	3	.0173	.0852	.1720	.2362	.2581	.2397	.1954	.1419	.0923	.0537
12	4	.0021	.0213	.0683	.1329	.1936	.2311	.2367	.2128	.1700	.1208
12	5	.0002	.0038	.0193	.0532	.1032	.1585	.2039	.2270	.2225	.1934
12	6	.0000	.0005	.0040	.0155	.0401	.0792	.1281	.1766	.2124	.2256
12	7	.0000	.0000	.0006	.0033	.0115	.0291	.0591	.1009	.1489	.1934
12	8	.0000	.0000	.0001	.0005	.0024	.0078	.0199	.0420	.0762	.1208
12	9	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0015	.0048	.0125	.0277	.0537
12	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0008	.0025	.0068	.0161
12	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010	.0029
12	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002
.

13	0	.5133	.2542	.1209	.0550	.0238	.0097	.0037	.0013	.0004	.0001
13	1	.3512	.3672	.2774	.1787	.1029	.0540	.0259	.0113	.0045	.0016
13	2	.1109	.2448	.2937	.2680	.2059	.1388	.0836	.0453	.0220	.0095
13	3	.0214	.0997	.1900	.2457	.2517	.2181	.1651	.1107	.0660	.0349
13	4	.0028	.0277	.0838	.1535	.2097	.2337	.2222	.1845	.1350	.0873
13	5	.0003	.0055	.0266	.0691	.1258	.1803	.2154	.2214	.1989	.1571
13	6	.0000	.0008	.0063	.0230	.0559	.1030	.1546	.1968	.2169	.2095
13	7	.0000	.0001	.0011	.0058	.0186	.0442	.0833	.1312	.1775	.2095
13	8	.0000	.0000	.0001	.0011	.0047	.0142	.0336	.0656	.1089	.1571
13	9	.0000	.0000	.0000	.0001	.0009	.0034	.0101	.0243	.0495	.0873
13	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0006	.0022	.0065	.0162	.0349
13	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0012	.0036	.0095
13	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0016
13	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001
.
14	0	.4877	.2288	.1028	.0440	.0178	.0068	.0024	.0008	.0002	.0001
14	1	.3593	.3559	.2539	.1539	.0832	.0407	.0181	.0073	.0027	.0009
14	2	.1229	.2570	.2912	.2501	.1802	.1134	.0634	.0317	.0141	.0056
14	3	.0259	.1142	.2056	.2501	.2402	.1943	.1366	.0845	.0462	.0222
14	4	.0037	.0349	.0998	.1720	.2202	.2290	.2022	.1549	.1040	.0611
14	5	.0004	.0078	.0352	.0860	.1468	.1963	.2178	.2066	.1701	.1222
14	6	.0000	.0013	.0093	.0322	.0734	.1262	.1759	.2066	.2088	.1833
14	7	.0000	.0002	.0019	.0092	.0280	.0618	.1082	.1574	.1952	.2095
14	8	.0000	.0000	.0003	.0020	.0082	.0232	.0510	.0918	.1398	.1833
14	9	.0000	.0000	.0000	.0003	.0018	.0066	.0183	.0408	.0762	.1222
14	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0003	.0014	.0049	.0136	.0312	.0611
14	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0010	.0033	.0093	.0222
14	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0019	.0056
14	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0009
14	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001
.
15	0	.4633	.2059	.0874	.0352	.0134	.0047	.0016	.0005	.0001	.0000
15	1	.3658	.3432	.2312	.1319	.0668	.0305	.0126	.0047	.0016	.0005
15	2	.1348	.2669	.2856	.2309	.1559	.0916	.0476	.0219	.0090	.0032
15	3	.0307	.1285	.2184	.2501	.2252	.1700	.1110	.0634	.0318	.0139

15	4	.0049	.0428	.1156	.1876	.2252	.2186	.1792	.1268	.0780	.0417
15	5	.0006	.0105	.0449	.1032	.1651	.2061	.2123	.1859	.1404	.0916
15	6	.0000	.0019	.0132	.0430	.0917	.1472	.1906	.2066	.1914	.1527
15	7	.0000	.0003	.0030	.0138	.0393	.0811	.1319	.1771	.2013	.1964
15	8	.0000	.0000	.0005	.0035	.0131	.0348	.0710	.1181	.1647	.1964
15	9	.0000	.0000	.0001	.0007	.0034	.0116	.0298	.0612	.1048	.1527
15	10	.0000	.0000	.0000	.0001	.0007	.0030	.0096	.0245	.0515	.0916
15	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0006	.0024	.0074	.0191	.0417
15	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0016	.0052	.0139
15	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010	.0032
15	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005
15	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
.
16	0	.4401	.1853	.0743	.0281	.0100	.0033	.0010	.0003	.0001	.0000
16	1	.3706	.3294	.2097	.1126	.0535	.0228	.0087	.0030	.0009	.0002
16	2	.1463	.2745	.2775	.2111	.1336	.0732	.0353	.0150	.0056	.0018
16	3	.0359	.1423	.2285	.2463	.2079	.1465	.0888	.0468	.0215	.0085
16	4	.0061	.0514	.1311	.2001	.2252	.2040	.1553	.1014	.0572	.0278
16	5	.0008	.0137	.0555	.1201	.1802	.2099	.2008	.1623	.1123	.0667
16	6	.0001	.0028	.0180	.0550	.1101	.1649	.1982	.1983	.1684	.1222
16	7	.0000	.0004	.0045	.0197	.0524	.1010	.1524	.1889	.1969	.1746
16	8	.0000	.0001	.0009	.0055	.0197	.0487	.0923	.1417	.1812	.1964
16	9	.0000	.0000	.0001	.0012	.0058	.0185	.0442	.0840	.1318	.1746
16	10	.0000	.0000	.0000	.0002	.0014	.0056	.0167	.0392	.0755	.1222
16	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0013	.0049	.0142	.0337	.0667
16	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0011	.0040	.0115	.0278
16	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0008	.0029	.0085
16	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0018
16	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002
16	16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
.
17	0	.4181	.1668	.0631	.0225	.0075	.0023	.0007	.0002	.0000	.0000
17	1	.3741	.3150	.1893	.0957	.0426	.0169	.0060	.0019	.0005	.0001
17	2	.1575	.2800	.2673	.1914	.1136	.0581	.0260	.0102	.0035	.0010
17	3	.0415	.1556	.2359	.2393	.1893	.1245	.0701	.0341	.0144	.0052

17	4	.0076	.0605	.1457	.2093	.2209	.1868	.1320	.0796	.0411	.0182
17	5	.0010	.0175	.0668	.1361	.1914	.2081	.1849	.1379	.0875	.0472
17	6	.0001	.0039	.0236	.0680	.1276	.1784	.1991	.1839	.1432	.0944
17	7	.0000	.0007	.0065	.0267	.0668	.1201	.1685	.1927	.1841	.1484
17	8	.0000	.0001	.0014	.0084	.0279	.0644	.1134	.1606	.1883	.1855
17	9	.0000	.0000	.0003	.0021	.0093	.0276	.0611	.1070	.1540	.1855
17	10	.0000	.0000	.0000	.0004	.0025	.0095	.0263	.0571	.1008	.1484
17	11	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0026	.0090	.0242	.0525	.0944
17	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0006	.0024	.0081	.0215	.0472
17	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0021	.0068	.0182
17	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0016	.0052
17	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010
17	16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001
17	17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
.
18	0	.3972	.1501	.0536	.0180	.0056	.0016	.0004	.0001	.0000	.0000
18	1	.3763	.3002	.1704	.0811	.0338	.0126	.0042	.0012	.0003	.0001
18	2	.1683	.2835	.2556	.1723	.0958	.0458	.0190	.0069	.0022	.0006
18	3	.0473	.1680	.2406	.2297	.1704	.1046	.0547	.0246	.0095	.0031
18	4	.0093	.0700	.1592	.2153	.2130	.1681	.1104	.0614	.0291	.0117
18	5	.0014	.0218	.0787	.1507	.1988	.2017	.1664	.1146	.0666	.0327
18	6	.0002	.0052	.0301	.0816	.1436	.1873	.1941	.1655	.1181	.0708
18	7	.0000	.0010	.0091	.0350	.0820	.1376	.1792	.1892	.1657	.1214
18	8	.0000	.0002	.0022	.0120	.0376	.0811	.1327	.1734	.1864	.1669
18	9	.0000	.0000	.0004	.0033	.0139	.0386	.0794	.1284	.1694	.1855
18	10	.0000	.0000	.0001	.0008	.0042	.0149	.0385	.0771	.1248	.1669
18	11	.0000	.0000	.0000	.0001	.0010	.0046	.0151	.0374	.0742	.1214
18	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0012	.0047	.0145	.0354	.0708
18	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0012	.0045	.0134	.0327
18	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0011	.0039	.0117
18	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0009	.0031
18	16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0006
18	17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001
18	18	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
.

19	0	.3774	.1351	.0456	.0144	.0042	.0011	.0003	.0001	.0000	.0000
19	1	.3774	.2852	.1529	.0685	.0268	.0093	.0029	.0008	.0002	.0000
19	2	.1787	.2852	.2428	.1540	.0803	.0358	.0138	.0046	.0013	.0003
19	3	.0533	.1796	.2428	.2182	.1517	.0869	.0422	.0175	.0062	.0018
19	4	.0112	.0798	.1714	.2182	.2023	.1491	.0909	.0467	.0203	.0074
19	5	.0018	.0266	.0907	.1636	.2023	.1916	.1468	.0933	.0497	.0222
19	6	.0002	.0069	.0374	.0955	.1574	.1916	.1844	.1451	.0949	.0518
19	7	.0000	.0014	.0122	.0443	.0974	.1525	.1844	.1797	.1443	.0961
19	8	.0000	.0002	.0032	.0166	.0487	.0981	.1489	.1797	.1771	.1442
19	9	.0000	.0000	.0007	.0051	.0198	.0514	.0980	.1464	.1771	.1762
19	10	.0000	.0000	.0001	.0013	.0066	.0220	.0528	.0976	.1449	.1762
19	11	.0000	.0000	.0000	.0003	.0018	.0077	.0233	.0532	.0970	.1442
19	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0004	.0022	.0083	.0237	.0529	.0961
19	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0024	.0085	.0233	.0518
19	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0006	.0024	.0082	.0222
19	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0022	.0074
19	16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0018
19	17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003
19	18	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
19	19	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
.
20	0	.3585	.1216	.0388	.0115	.0032	.0008	.0002	.0000	.0000	.0000
20	1	.3774	.2702	.1368	.0576	.0211	.0068	.0020	.0005	.0001	.0000
20	2	.1887	.2852	.2293	.1369	.0669	.0278	.0100	.0031	.0008	.0002
20	3	.0596	.1901	.2428	.2054	.1339	.0716	.0323	.0123	.0040	.0011
20	4	.0133	.0898	.1821	.2182	.1897	.1304	.0738	.0350	.0139	.0046
20	5	.0022	.0319	.1028	.1746	.2023	.1789	.1272	.0746	.0365	.0148
20	6	.0003	.0089	.0454	.1091	.1686	.1916	.1712	.1244	.0746	.0370
20	7	.0000	.0020	.0160	.0545	.1124	.1643	.1844	.1659	.1221	.0739
20	8	.0000	.0004	.0046	.0222	.0609	.1144	.1614	.1797	.1623	.1201
20	9	.0000	.0001	.0011	.0074	.0271	.0654	.1158	.1597	.1771	.1602
20	10	.0000	.0000	.0002	.0020	.0099	.0308	.0686	.1171	.1593	.1762
20	11	.0000	.0000	.0000	.0005	.0030	.0120	.0336	.0710	.1185	.1602
20	12	.0000	.0000	.0000	.0001	.0008	.0039	.0136	.0355	.0727	.1201
20	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0010	.0045	.0146	.0366	.0739

20	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0012	.0049	.0150	.0370
20	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0003	.0013	.0049	.0148
20	16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0003	.0013	.0046
20	17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0011
20	18	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002
20	19	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
20	20	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000

TABLA B
PROBABILIDADES BINOMIALES PARA VALORES ACUMULADOS DE X

Los valores de esta tabla dan la probabilidad de **x** o menos éxitos en **n** ensayos de un experimento binomial, en donde **p** es la probabilidad de éxito de un ensayo. Por ejemplo con **n = 4** ensayos y **p = 0.25**, la probabilidad de 3 o menos ensayos es **0.9961** .

($P(x \leq 3) = 0.9961$)

		p									
n	x	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
1	0	.9500	.9000	.8500	.8000	.7500	.7000	.6500	.6000	.5500	.5000
1	1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
.
2	0	.9025	.8100	.7225	.6400	.5625	.4900	.4225	.3600	.3025	.2500
2	1	.9975	.9900	.9775	.9600	.9375	.9100	.8775	.8400	.7975	.7500
2	2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
.
3	0	.8574	.7290	.6141	.5120	.4219	.3430	.2746	.2160	.1664	.1250
3	1	.9928	.9720	.9393	.8960	.8438	.7840	.7183	.6480	.5748	.5000
3	2	.9999	.9990	.9966	.9920	.9844	.9730	.9571	.9360	.9089	.8750
3	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
.
4	0	.8145	.6561	.5220	.4096	.3164	.2401	.1785	.1296	.0915	.0625
4	1	.9860	.9477	.8905	.8192	.7383	.6517	.5630	.4752	.3910	.3125
4	2	.9995	.9963	.9880	.9728	.9492	.9163	.8735	.8208	.7585	.6875
4	3	1.0000	.9999	.9995	.9984	.9961	.9919	.9850	.9744	.9590	.9375
4	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
.
5	0	.7738	.5905	.4437	.3277	.2373	.1681	.1160	.0778	.0503	.0313
5	1	.9774	.9185	.8352	.7373	.6328	.5282	.4284	.3370	.2562	.1875
5	2	.9988	.9914	.9734	.9421	.8965	.8369	.7648	.6826	.5931	.5000
5	3	1.0000	.9995	.9978	.9933	.9844	.9692	.9460	.9130	.8688	.8125
5	4	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9990	.9976	.9947	.9898	.9815	.9688
5	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
.
6	0	.7351	.5314	.3771	.2621	.1780	.1176	.0754	.0467	.0277	.0156
6	1	.9672	.8857	.7765	.6554	.5339	.4202	.3191	.2333	.1636	.1094

6	2	.9978	.9842	.9527	.9011	.8306	.7443	.6471	.5443	.4415	.3437
6	3	.9999	.9987	.9941	.9830	.9624	.9295	.8826	.8208	.7447	.6562
6	4	1.0000	.9999	.9996	.9984	.9954	.9891	.9777	.9590	.9308	.8906
6	5	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998	.9993	.9982	.9959	.9917	.9844
6	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
.
7	0	.6983	.4783	.3206	.2097	.1335	.0824	.0490	.0280	.0152	.0078
7	1	.9556	.8503	.7166	.5767	.4449	.3294	.2338	.1586	.1024	.0625
7	2	.9962	.9743	.9262	.8520	.7564	.6471	.5323	.4199	.3164	.2266
7	3	.9998	.9973	.9879	.9667	.9294	.8740	.8002	.7102	.6083	.5000
7	4	1.0000	.9998	.9988	.9953	.9871	.9712	.9444	.9037	.8471	.7734
7	5	1.0000	1.0000	.9999	.9996	.9987	.9962	.9910	.9812	.9643	.9375
7	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998	.9994	.9984	.9963	.9922
7	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
.
8	0	.6634	.4305	.2725	.1678	.1001	.0576	.0319	.0168	.0084	.0039
8	1	.9428	.8131	.6572	.5033	.3671	.2553	.1691	.1064	.0632	.0352
8	2	.9942	.9619	.8948	.7969	.6785	.5518	.4278	.3154	.2201	.1445
8	3	.9996	.9950	.9786	.9437	.8862	.8059	.7064	.5941	.4770	.3633
8	4	1.0000	.9996	.9971	.9896	.9727	.9420	.8939	.8263	.7396	.6367
8	5	1.0000	1.0000	.9998	.9988	.9958	.9887	.9747	.9502	.9115	.8555
8	6	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9996	.9987	.9964	.9915	.9819	.9648
8	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998	.9993	.9983	.9961
8	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
.
9	0	.6302	.3874	.2316	.1342	.0751	.0404	.0207	.0101	.0046	.0020
9	1	.9288	.7748	.5995	.4362	.3003	.1960	.1211	.0705	.0385	.0195
9	2	.9916	.9470	.8591	.7382	.6007	.4628	.3373	.2318	.1495	.0898
9	3	.9994	.9917	.9661	.9144	.8343	.7297	.6089	.4826	.3614	.2539
9	4	1.0000	.9991	.9944	.9804	.9511	.9012	.8283	.7334	.6214	.5000
9	5	1.0000	.9999	.9994	.9969	.9900	.9747	.9464	.9006	.8342	.7461
9	6	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9987	.9957	.9888	.9750	.9502	.9102
9	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9996	.9986	.9962	.9909	.9805
9	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9992	.9980
9	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
.
10	0	.5987	.3487	.1969	.1074	.0563	.0282	.0135	.0060	.0025	.0010
10	1	.9139	.7361	.5443	.3758	.2440	.1493	.0860	.0464	.0233	.0107
10	2	.9885	.9298	.8202	.6778	.5256	.3828	.2616	.1673	.0996	.0547
10	3	.9990	.9872	.9500	.8791	.7759	.6496	.5138	.3823	.2660	.1719
10	4	.9999	.9984	.9901	.9672	.9219	.8497	.7515	.6331	.5044	.3770

10	5	1.0000	.9999	.9986	.9936	.9803	.9527	.9051	.8338	.7384	.6230
10	6	1.0000	1.0000	.9999	.9991	.9965	.9894	.9740	.9452	.8980	.8281
10	7	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9996	.9984	.9952	.9877	.9726	.9453
10	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9995	.9983	.9955	.9893
10	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9990
10	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
.
11	0	.5688	.3138	.1673	.0859	.0422	.0198	.0088	.0036	.0014	.0005
11	1	.8981	.6974	.4922	.3221	.1971	.1130	.0606	.0302	.0139	.0059
11	2	.9848	.9104	.7788	.6174	.4552	.3127	.2001	.1189	.0652	.0327
11	3	.9984	.9815	.9306	.8389	.7133	.5696	.4256	.2963	.1911	.1133
11	4	.9999	.9972	.9841	.9496	.8854	.7897	.6683	.5328	.3971	.2744
11	5	1.0000	.9997	.9973	.9883	.9657	.9218	.8513	.7535	.6331	.5000
11	6	1.0000	1.0000	.9997	.9980	.9924	.9784	.9499	.9006	.8262	.7256
11	7	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9988	.9957	.9878	.9707	.9390	.8867
11	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9994	.9980	.9941	.9852	.9673
11	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9993	.9978	.9941
11	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9995
11	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
.
12	0	.5404	.2824	.1422	.0687	.0317	.0138	.0057	.0022	.0008	.0002
12	1	.8816	.6590	.4435	.2749	.1584	.0850	.0424	.0196	.0083	.0032
12	2	.9804	.8891	.7358	.5583	.3907	.2528	.1513	.0834	.0421	.0193
12	3	.9978	.9744	.9078	.7946	.6488	.4925	.3467	.2253	.1345	.0730
12	4	.9998	.9957	.9761	.9274	.8424	.7237	.5833	.4382	.3044	.1938
12	5	1.0000	.9995	.9954	.9806	.9456	.8822	.7873	.6652	.5269	.3872
12	6	1.0000	.9999	.9993	.9961	.9857	.9614	.9154	.8418	.7393	.6128
12	7	1.0000	1.0000	.9999	.9994	.9972	.9905	.9745	.9427	.8883	.8062
12	8	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9996	.9983	.9944	.9847	.9644	.9270
12	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9992	.9972	.9921	.9807
12	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9989	.9968
12	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998
12	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
.
13	0	.5133	.2542	.1209	.0550	.0238	.0097	.0037	.0013	.0004	.0001
13	1	.8646	.6213	.3983	.2336	.1267	.0637	.0296	.0126	.0049	.0017
13	2	.9755	.8661	.6920	.5017	.3326	.2025	.1132	.0579	.0269	.0112
13	3	.9969	.9658	.8820	.7473	.5843	.4206	.2783	.1686	.0929	.0461
13	4	.9997	.9935	.9658	.9009	.7940	.6543	.5005	.3530	.2279	.1334
13	5	1.0000	.9991	.9925	.9700	.9198	.8346	.7159	.5744	.4268	.2905
13	6	1.0000	.9999	.9987	.9930	.9757	.9376	.8705	.7712	.6437	.5000

13	7	1.0000	1.0000	.9998	.9988	.9944	.9818	.9538	.9023	.8212	.7095
13	8	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9990	.9960	.9874	.9679	.9302	.8666
13	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9993	.9975	.9922	.9797	.9539
13	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9987	.9959	.9888
13	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9995	.9983
13	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
13	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
.
14	0	.4877	.2288	.1028	.0440	.0178	.0068	.0024	.0008	.0002	.0001
14	1	.8470	.5846	.3567	.1979	.1010	.0475	.0205	.0081	.0029	.0009
14	2	.9699	.8416	.6479	.4481	.2811	.1608	.0839	.0398	.0170	.0065
14	3	.9958	.9559	.8535	.6982	.5213	.3552	.2205	.1243	.0632	.0287
14	4	.9996	.9908	.9533	.8702	.7415	.5842	.4227	.2793	.1672	.0898
14	5	1.0000	.9985	.9885	.9561	.8883	.7805	.6405	.4859	.3373	.2120
14	6	1.0000	.9998	.9978	.9884	.9617	.9067	.8164	.6925	.5461	.3953
14	7	1.0000	1.0000	.9997	.9976	.9897	.9685	.9247	.8499	.7414	.6047
14	8	1.0000	1.0000	1.0000	.9996	.9978	.9917	.9757	.9417	.8811	.7880
14	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9983	.9940	.9825	.9574	.9102
14	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9989	.9961	.9886	.9713
14	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9994	.9978	.9935
14	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9991
14	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
14	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
.
15	0	.4633	.2059	.0874	.0352	.0134	.0047	.0016	.0005	.0001	.0000
15	1	.8290	.5490	.3186	.1671	.0802	.0353	.0142	.0052	.0017	.0005
15	2	.9638	.8159	.6042	.3980	.2361	.1268	.0617	.0271	.0107	.0037
15	3	.9945	.9444	.8227	.6482	.4613	.2969	.1727	.0905	.0424	.0176
15	4	.9994	.9873	.9383	.8358	.6865	.5155	.3519	.2173	.1204	.0592
15	5	.9999	.9978	.9832	.9389	.8516	.7216	.5643	.4032	.2608	.1509
15	6	1.0000	.9997	.9964	.9819	.9434	.8689	.7548	.6098	.4522	.3036
15	7	1.0000	1.0000	.9994	.9958	.9827	.9500	.8868	.7869	.6535	.5000
15	8	1.0000	1.0000	.9999	.9992	.9958	.9848	.9578	.9050	.8182	.6964
15	9	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9992	.9963	.9876	.9662	.9231	.8491
15	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9993	.9972	.9907	.9745	.9408
15	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9995	.9981	.9937	.9824
15	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9989	.9963
15	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9995
15	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
15	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
.

16	0	.4401	.1853	.0743	.0281	.0100	.0033	.0010	.0003	.0001	.0000
16	1	.8108	.5147	.2839	.1407	.0635	.0261	.0098	.0033	.0010	.0003
16	2	.9571	.7892	.5614	.3518	.1971	.0994	.0451	.0183	.0066	.0021
16	3	.9930	.9316	.7899	.5981	.4050	.2459	.1339	.0651	.0281	.0106
16	4	.9991	.9830	.9209	.7982	.6302	.4499	.2892	.1666	.0853	.0384
16	5	.9999	.9967	.9765	.9183	.8103	.6598	.4900	.3288	.1976	.1051
16	6	1.0000	.9995	.9944	.9733	.9204	.8247	.6881	.5272	.3660	.2272
16	7	1.0000	.9999	.9989	.9930	.9729	.9256	.8406	.7161	.5629	.4018
16	8	1.0000	1.0000	.9998	.9985	.9925	.9743	.9329	.8577	.7441	.5982
16	9	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9984	.9929	.9771	.9417	.8759	.7728
16	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9984	.9938	.9809	.9514	.8949
16	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9987	.9951	.9851	.9616
16	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9991	.9965	.9894
16	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9994	.9979
16	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997
16	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
16	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
.
17	0	.4181	.1668	.0631	.0225	.0075	.0023	.0007	.0002	.0000	.0000
17	1	.7922	.4818	.2525	.1182	.0501	.0193	.0067	.0021	.0006	.0001
17	2	.9497	.7618	.5198	.3096	.1637	.0774	.0327	.0123	.0041	.0012
17	3	.9912	.9174	.7556	.5489	.3530	.2019	.1028	.0464	.0184	.0064
17	4	.9988	.9779	.9013	.7582	.5739	.3887	.2348	.1260	.0596	.0245
17	5	.9999	.9953	.9681	.8943	.7653	.5968	.4197	.2639	.1471	.0717
17	6	1.0000	.9992	.9917	.9623	.8929	.7752	.6188	.4478	.2902	.1662
17	7	1.0000	.9999	.9983	.9891	.9598	.8954	.7872	.6405	.4743	.3145
17	8	1.0000	1.0000	.9997	.9974	.9876	.9597	.9006	.8011	.6626	.5000
17	9	1.0000	1.0000	1.0000	.9995	.9969	.9873	.9617	.9081	.8166	.6855
17	10	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9994	.9968	.9880	.9652	.9174	.8338
17	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9993	.9970	.9894	.9699	.9283
17	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9994	.9975	.9914	.9755
17	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9995	.9981	.9936
17	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9988
17	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
17	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
17	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
.
18	0	.3972	.1501	.0536	.0180	.0056	.0016	.0004	.0001	.0000	.0000
18	1	.7735	.4503	.2241	.0991	.0395	.0142	.0046	.0013	.0003	.0001
18	2	.9419	.7338	.4797	.2713	.1353	.0600	.0236	.0082	.0025	.0007
18	3	.9891	.9018	.7202	.5010	.3057	.1646	.0783	.0328	.0120	.0038

18	4	.9985	.9718	.8794	.7164	.5187	.3327	.1886	.0942	.0411	.0154
18	5	.9998	.9936	.9581	.8671	.7175	.5344	.3550	.2088	.1077	.0481
18	6	1.0000	.9988	.9882	.9487	.8610	.7217	.5491	.3743	.2258	.1189
18	7	1.0000	.9998	.9973	.9837	.9431	.8593	.7283	.5634	.3915	.2403
18	8	1.0000	1.0000	.9995	.9957	.9807	.9404	.8609	.7368	.5778	.4073
18	9	1.0000	1.0000	.9999	.9991	.9946	.9790	.9403	.8653	.7473	.5927
18	10	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9988	.9939	.9788	.9424	.8720	.7597
18	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9986	.9938	.9797	.9463	.8811
18	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9986	.9942	.9817	.9519
18	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9987	.9951	.9846
18	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9990	.9962
18	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9993
18	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
18	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
18	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
.
19	0	.3774	.1351	.0456	.0144	.0042	.0011	.0003	.0001	.0000	.0000
19	1	.7547	.4203	.1985	.0829	.0310	.0104	.0031	.0008	.0002	.0000
19	2	.9335	.7054	.4413	.2369	.1113	.0462	.0170	.0055	.0015	.0004
19	3	.9868	.8850	.6841	.4551	.2631	.1332	.0591	.0230	.0077	.0022
19	4	.9980	.9648	.8556	.6733	.4654	.2822	.1500	.0696	.0280	.0096
19	5	.9998	.9914	.9463	.8369	.6678	.4739	.2968	.1629	.0777	.0318
19	6	1.0000	.9983	.9837	.9324	.8251	.6655	.4812	.3081	.1727	.0835
19	7	1.0000	.9997	.9959	.9767	.9225	.8180	.6656	.4878	.3169	.1796
19	8	1.0000	1.0000	.9992	.9933	.9713	.9161	.8145	.6675	.4940	.3238
19	9	1.0000	1.0000	.9999	.9984	.9911	.9674	.9125	.8139	.6710	.5000
19	10	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9977	.9895	.9653	.9115	.8159	.6762
19	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9995	.9972	.9886	.9648	.9129	.8204
19	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9994	.9969	.9884	.9658	.9165
19	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9993	.9969	.9891	.9682
19	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9994	.9972	.9904
19	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9995	.9978
19	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9996
19	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
19	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
19	19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
.
20	0	.3585	.1216	.0388	.0115	.0032	.0008	.0002	.0000	.0000	.0000
20	1	.7358	.3917	.1756	.0692	.0243	.0076	.0021	.0005	.0001	.0000
20	2	.9245	.6769	.4049	.2061	.0913	.0355	.0121	.0036	.0009	.0002
20	3	.9841	.8670	.6477	.4114	.2252	.1071	.0444	.0160	.0049	.0013

20	4	.9974	.9568	.8298	.6296	.4148	.2375	.1182	.0510	.0189	.0059
20	5	.9997	.9887	.9327	.8042	.6172	.4164	.2454	.1256	.0553	.0207
20	6	1.0000	.9976	.9781	.9133	.7858	.6080	.4166	.2500	.1299	.0577
20	7	1.0000	.9996	.9941	.9679	.8982	.7723	.6010	.4159	.2520	.1316
20	8	1.0000	.9999	.9987	.9900	.9591	.8867	.7624	.5956	.4143	.2517
20	9	1.0000	1.0000	.9998	.9974	.9861	.9520	.8782	.7553	.5914	.4119
20	10	1.0000	1.0000	1.0000	.9994	.9961	.9829	.9468	.8725	.7507	.5881
20	11	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9991	.9949	.9804	.9435	.8692	.7483
20	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998	.9987	.9940	.9790	.9420	.8684
20	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9985	.9935	.9786	.9423
20	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9984	.9936	.9793
20	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9985	.9941
20	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9997	.9987
20	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9998
20	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
20	19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
20	20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

TABLA C.
PROBABILIDADES POISSON PARA VALORES INDIVIDUALES DE X

Los valores de esta tabla dan la probabilidad de x acontecimientos para un proceso de Poisson con una media de μ . Por ejemplo si $\mu = 0.5$ la probabilidad de 3 acontecimientos es de **0.0126**

μ										
x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	.9048	.8187	.7408	.6703	.6065	.5488	.4966	.4493	.4066	.3679
1	.0905	.1637	.2222	.2681	.3033	.3293	.3476	.3595	.3659	.3679
2	.0045	.0164	.0333	.0536	.0758	.0988	.1217	.1438	.1647	.1839
3	.0002	.0011	.0033	.0072	.0126	.0198	.0284	.0383	.0494	.0613
4	.0000	.0001	.0003	.0007	.0016	.0030	.0050	.0077	.0111	.0153
5	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0004	.0007	.0012	.0020	.0031
6	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0003	.0005
7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

X	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
0	.3329	.3012	.2725	.2466	.2231	.2019	.1827	.1653	.1496	.1353
1	.3662	.3614	.3543	.3452	.3347	.3230	.3106	.2975	.2842	.2707

2	.2014	.2169	.2303	.2417	.2510	.2584	.2640	.2678	.2700	.2707
3	.0738	.0867	.0998	.1128	.1255	.1378	.1496	.1607	.1710	.1804
4	.0203	.0260	.0324	.0395	.0471	.0551	.0636	.0723	.0812	.0902
5	.0045	.0062	.0084	.0111	.0141	.0176	.0216	.0260	.0309	.0361
6	.0008	.0012	.0018	.0026	.0035	.0047	.0061	.0078	.0098	.0120
7	.0001	.0002	.0003	.0005	.0008	.0011	.0015	.0020	.0027	.0034
8	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002	.0003	.0005	.0006	.0009

x	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0
0	.1225	.1108	.1003	.0907	.0821	.0743	.0672	.0608	.0550	.0498
1	.2572	.2438	.2306	.2177	.2052	.1931	.1815	.1703	.1596	.1494
2	.2700	.2681	.2652	.2613	.2565	.2510	.2450	.2384	.2314	.2240
3	.1890	.1966	.2033	.2090	.2138	.2176	.2205	.2225	.2237	.2240
4	.0992	.1082	.1169	.1254	.1336	.1414	.1488	.1557	.1622	.1680
5	.0417	.0476	.0538	.0602	.0668	.0735	.0804	.0872	.0940	.1008
6	.0146	.0174	.0206	.0241	.0278	.0319	.0362	.0407	.0455	.0504
7	.0044	.0055	.0068	.0083	.0099	.0118	.0139	.0163	.0188	.0216
8	.0011	.0015	.0019	.0025	.0031	.0038	.0047	.0057	.0068	.0081
9	.0003	.0004	.0005	.0007	.0009	.0011	.0014	.0018	.0022	.0027
10	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0004	.0005	.0006	.0008
11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002
12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

x	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0
0	.0450	.0408	.0369	.0334	.0302	.0273	.0247	.0224	.0202	.0183
1	.1397	.1304	.1217	.1135	.1057	.0984	.0915	.0850	.0789	.0733
2	.2165	.2087	.2008	.1929	.1850	.1771	.1692	.1615	.1539	.1465
3	.2237	.2226	.2209	.2186	.2158	.2125	.2087	.2046	.2001	.1954
4	.1733	.1781	.1823	.1858	.1888	.1912	.1931	.1944	.1951	.1954
5	.1075	.1140	.1203	.1264	.1322	.1377	.1429	.1477	.1522	.1563
6	.0555	.0608	.0662	.0716	.0771	.0826	.0881	.0936	.0989	.1042
7	.0246	.0278	.0312	.0348	.0385	.0425	.0466	.0508	.0551	.0595
8	.0095	.0111	.0129	.0148	.0169	.0191	.0215	.0241	.0269	.0298
9	.0033	.0040	.0047	.0056	.0066	.0076	.0089	.0102	.0116	.0132

10	.0010	.0013	.0016	.0019	.0023	.0028	.0033	.0039	.0045	.0053
11	.0003	.0004	.0005	.0006	.0007	.0009	.0011	.0013	.0016	.0019
12	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0005	.0006
13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002
14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

x	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9	5.0
0	.0166	.0150	.0136	.0123	.0111	.0101	.0091	.0082	.0074	.0067
1	.0679	.0630	.0583	.0540	.0500	.0462	.0427	.0395	.0365	.0337
2	.1393	.1323	.1254	.1188	.1125	.1063	.1005	.0948	.0894	.0842
3	.1904	.1852	.1798	.1743	.1687	.1631	.1574	.1517	.1460	.1404
4	.1951	.1944	.1933	.1917	.1898	.1875	.1849	.1820	.1789	.1755
5	.1600	.1633	.1662	.1687	.1708	.1725	.1738	.1747	.1753	.1755
6	.1093	.1143	.1191	.1237	.1281	.1323	.1362	.1398	.1432	.1462
7	.0640	.0686	.0732	.0778	.0824	.0869	.0914	.0959	.1002	.1044
8	.0328	.0360	.0393	.0428	.0463	.0500	.0537	.0575	.0614	.0653
9	.0150	.0168	.0188	.0209	.0232	.0255	.0281	.0307	.0334	.0363
10	.0061	.0071	.0081	.0092	.0104	.0118	.0132	.0147	.0164	.0181
11	.0023	.0027	.0032	.0037	.0043	.0049	.0056	.0064	.0073	.0082
12	.0008	.0009	.0011	.0013	.0016	.0019	.0022	.0026	.0030	.0034
13	.0002	.0003	.0004	.0005	.0006	.0007	.0008	.0009	.0011	.0013
14	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0005
15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002

x	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9	6.0
0	.0061	.0055	.0050	.0045	.0041	.0037	.0033	.0030	.0027	.0025
1	.0311	.0287	.0265	.0244	.0225	.0207	.0191	.0176	.0162	.0149
2	.0793	.0746	.0701	.0659	.0618	.0580	.0544	.0509	.0477	.0446
3	.1348	.1293	.1239	.1185	.1133	.1082	.1033	.0985	.0938	.0892
4	.1719	.1681	.1641	.1600	.1558	.1515	.1472	.1428	.1383	.1339
5	.1753	.1748	.1740	.1728	.1714	.1697	.1678	.1656	.1632	.1606
6	.1490	.1515	.1537	.1555	.1571	.1584	.1594	.1601	.1605	.1606

7	.1086	.1125	.1163	.1200	.1234	.1267	.1298	.1326	.1353	.1377
8	.0692	.0731	.0771	.0810	.0849	.0887	.0925	.0962	.0998	.1033
9	.0392	.0423	.0454	.0486	.0519	.0552	.0586	.0620	.0654	.0688
10	.0200	.0220	.0241	.0262	.0285	.0309	.0334	.0359	.0386	.0413
11	.0093	.0104	.0116	.0129	.0143	.0157	.0173	.0190	.0207	.0225
12	.0039	.0045	.0051	.0058	.0065	.0073	.0082	.0092	.0102	.0113
13	.0015	.0018	.0021	.0024	.0028	.0032	.0036	.0041	.0046	.0052
14	.0006	.0007	.0008	.0009	.0011	.0013	.0015	.0017	.0019	.0022
15	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0005	.0006	.0007	.0008	.0009
16	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002	.0003	.0003
17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001

x	6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6	6.7	6.8	6.9	7.0
0	.0022	.0020	.0018	.0017	.0015	.0014	.0012	.0011	.0010	.0009
1	.0137	.0126	.0116	.0106	.0098	.0090	.0082	.0076	.0070	.0064
2	.0417	.0390	.0364	.0340	.0318	.0296	.0276	.0258	.0240	.0223
3	.0848	.0806	.0765	.0726	.0688	.0652	.0617	.0584	.0552	.0521
4	.1294	.1249	.1205	.1162	.1118	.1076	.1034	.0992	.0952	.0912
5	.1579	.1549	.1519	.1487	.1454	.1420	.1385	.1349	.1314	.1277
6	.1605	.1601	.1595	.1586	.1575	.1562	.1546	.1529	.1511	.1490
7	.1399	.1418	.1435	.1450	.1462	.1472	.1480	.1486	.1489	.1490
8	.1066	.1099	.1130	.1160	.1188	.1215	.1240	.1263	.1284	.1304
9	.0723	.0757	.0791	.0825	.0858	.0891	.0923	.0954	.0985	.1014
10	.0441	.0469	.0498	.0528	.0558	.0588	.0618	.0649	.0679	.0710
11	.0244	.0265	.0285	.0307	.0330	.0353	.0377	.0401	.0426	.0452
12	.0124	.0137	.0150	.0164	.0179	.0194	.0210	.0227	.0245	.0263
13	.0058	.0065	.0073	.0081	.0089	.0099	.0108	.0119	.0130	.0142
14	.0025	.0029	.0033	.0037	.0041	.0046	.0052	.0058	.0064	.0071
15	.0010	.0012	.0014	.0016	.0018	.0020	.0023	.0026	.0029	.0033
16	.0004	.0005	.0005	.0006	.0007	.0008	.0010	.0011	.0013	.0014
17	.0001	.0002	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0004	.0005	.0006
18	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002
19	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001

x	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.6	7.7	7.8	7.9	8.0
0	.0008	.0007	.0007	.0006	.0006	.0005	.0005	.0004	.0004	.0003
1	.0059	.0054	.0049	.0045	.0041	.0038	.0035	.0032	.0029	.0027
2	.0208	.0194	.0180	.0167	.0156	.0145	.0134	.0125	.0116	.0107
3	.0492	.0464	.0438	.0413	.0389	.0366	.0345	.0324	.0305	.0286
4	.0874	.0836	.0799	.0764	.0729	.0696	.0663	.0632	.0602	.0573
5	.1241	.1204	.1167	.1130	.1094	.1057	.1021	.0986	.0951	.0916
6	.1468	.1445	.1420	.1394	.1367	.1339	.1311	.1282	.1252	.1221
7	.1489	.1486	.1481	.1474	.1465	.1454	.1442	.1428	.1413	.1396
8	.1321	.1337	.1351	.1363	.1373	.1381	.1388	.1392	.1395	.1396
9	.1042	.1070	.1096	.1121	.1144	.1167	.1187	.1207	.1224	.1241
10	.0740	.0770	.0800	.0829	.0858	.0887	.0914	.0941	.0967	.0993
11	.0478	.0504	.0531	.0558	.0585	.0613	.0640	.0667	.0695	.0722
12	.0283	.0303	.0323	.0344	.0366	.0388	.0411	.0434	.0457	.0481
13	.0154	.0168	.0181	.0196	.0211	.0227	.0243	.0260	.0278	.0296
14	.0078	.0086	.0095	.0104	.0113	.0123	.0134	.0145	.0157	.0169
15	.0037	.0041	.0046	.0051	.0057	.0062	.0069	.0075	.0083	.0090
16	.0016	.0019	.0021	.0024	.0026	.0030	.0033	.0037	.0041	.0045
17	.0007	.0008	.0009	.0010	.0012	.0013	.0015	.0017	.0019	.0021
18	.0003	.0003	.0004	.0004	.0005	.0006	.0006	.0007	.0008	.0009
19	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002	.0003	.0003	.0003	.0004
20	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002
21	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001

x	8.1	8.2	8.3	8.4	8.5	8.6	8.7	8.8	8.9	9.0
0	.0003	.0003	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0001	.0001
1	.0025	.0023	.0021	.0019	.0017	.0016	.0014	.0013	.0012	.0011
2	.0100	.0092	.0086	.0079	.0074	.0068	.0063	.0058	.0054	.0050
3	.0269	.0252	.0237	.0222	.0208	.0195	.0183	.0171	.0160	.0150
4	.0544	.0517	.0491	.0466	.0443	.0420	.0398	.0377	.0357	.0337
5	.0882	.0849	.0816	.0784	.0752	.0722	.0692	.0663	.0635	.0607
6	.1191	.1160	.1128	.1097	.1066	.1034	.1003	.0972	.0941	.0911
7	.1378	.1358	.1338	.1317	.1294	.1271	.1247	.1222	.1197	.1171

8	.1395	.1392	.1388	.1382	.1375	.1366	.1356	.1344	.1332	.1318
9	.1256	.1269	.1280	.1290	.1299	.1306	.1311	.1315	.1317	.1318
10	.1017	.1040	.1063	.1084	.1104	.1123	.1140	.1157	.1172	.1186
11	.0749	.0776	.0802	.0828	.0853	.0878	.0902	.0925	.0948	.0970
12	.0505	.0530	.0555	.0579	.0604	.0629	.0654	.0679	.0703	.0728
13	.0315	.0334	.0354	.0374	.0395	.0416	.0438	.0459	.0481	.0504
14	.0182	.0196	.0210	.0225	.0240	.0256	.0272	.0289	.0306	.0324
15	.0098	.0107	.0116	.0126	.0136	.0147	.0158	.0169	.0182	.0194
16	.0050	.0055	.0060	.0066	.0072	.0079	.0086	.0093	.0101	.0109
17	.0024	.0026	.0029	.0033	.0036	.0040	.0044	.0048	.0053	.0058
18	.0011	.0012	.0014	.0015	.0017	.0019	.0021	.0024	.0026	.0029
19	.0005	.0005	.0006	.0007	.0008	.0009	.0010	.0011	.0012	.0014
20	.0002	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0004	.0005	.0005	.0006
21	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002	.0002	.0003
22	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001

x	9.1	9.2	9.3	9.4	9.5	9.6	9.7	9.8	9.9	10.0
0	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0000
1	.0010	.0009	.0009	.0008	.0007	.0007	.0006	.0005	.0005	.0005
2	.0046	.0043	.0040	.0037	.0034	.0031	.0029	.0027	.0025	.0023
3	.0140	.0131	.0123	.0115	.0107	.0100	.0093	.0087	.0081	.0076
4	.0319	.0302	.0285	.0269	.0254	.0240	.0226	.0213	.0201	.0189
5	.0581	.0555	.0530	.0506	.0483	.0460	.0439	.0418	.0398	.0378
6	.0881	.0851	.0822	.0793	.0764	.0736	.0709	.0682	.0656	.0631
7	.1145	.1118	.1091	.1064	.1037	.1010	.0982	.0955	.0928	.0901
8	.1302	.1286	.1269	.1251	.1232	.1212	.1191	.1170	.1148	.1126
9	.1317	.1315	.1311	.1306	.1300	.1293	.1284	.1274	.1263	.1251
10	.1198	.1210	.1219	.1228	.1235	.1241	.1245	.1249	.1250	.1251
11	.0991	.1012	.1031	.1049	.1067	.1083	.1098	.1112	.1125	.1137
12	.0752	.0776	.0799	.0822	.0844	.0866	.0888	.0908	.0928	.0948
13	.0526	.0549	.0572	.0594	.0617	.0640	.0662	.0685	.0707	.0729
14	.0342	.0361	.0380	.0399	.0419	.0439	.0459	.0479	.0500	.0521
15	.0208	.0221	.0235	.0250	.0265	.0281	.0297	.0313	.0330	.0347
16	.0118	.0127	.0137	.0147	.0157	.0168	.0180	.0192	.0204	.0217

17	.0063	.0069	.0075	.0081	.0088	.0095	.0103	.0111	.0119	.0128
18	.0032	.0035	.0039	.0042	.0046	.0051	.0055	.0060	.0065	.0071
19	.0015	.0017	.0019	.0021	.0023	.0026	.0028	.0031	.0034	.0037
20	.0007	.0008	.0009	.0010	.0011	.0012	.0014	.0015	.0017	.0019
21	.0003	.0003	.0004	.0004	.0005	.0006	.0006	.0007	.0008	.0009
22	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0004
23	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002
24	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001

x	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
1	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
2	.0010	.0004	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
3	.0037	.0018	.0008	.0004	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
4	.0102	.0053	.0027	.0013	.0006	.0003	.0001	.0001	.0000	.0000
5	.0224	.0127	.0070	.0037	.0019	.0010	.0005	.0002	.0001	.0001
6	.0411	.0255	.0152	.0087	.0048	.0026	.0014	.0007	.0004	.0002
7	.0646	.0437	.0281	.0174	.0104	.0060	.0034	.0019	.0010	.0005
8	.0888	.0655	.0457	.0304	.0194	.0120	.0072	.0042	.0024	.0013
9	.1085	.0874	.0661	.0473	.0324	.0213	.0135	.0083	.0050	.0029
10	.1194	.1048	.0859	.0663	.0486	.0341	.0230	.0150	.0095	.0058
11	.1194	.1144	.1015	.0844	.0663	.0496	.0355	.0245	.0164	.0106
12	.1094	.1144	.1099	.0984	.0829	.0661	.0504	.0368	.0259	.0176
13	.0926	.1056	.1099	.1060	.0956	.0814	.0658	.0509	.0378	.0271
14	.0728	.0905	.1021	.1060	.1024	.0930	.0800	.0655	.0514	.0387
15	.0534	.0724	.0885	.0989	.1024	.0992	.0906	.0786	.0650	.0516
16	.0367	.0543	.0719	.0866	.0960	.0992	.0963	.0884	.0772	.0646
17	.0237	.0383	.0550	.0713	.0847	.0934	.0963	.0936	.0863	.0760
18	.0145	.0255	.0397	.0554	.0706	.0830	.0909	.0936	.0911	.0844
19	.0084	.0161	.0272	.0409	.0557	.0699	.0814	.0887	.0911	.0888
20	.0046	.0097	.0177	.0286	.0418	.0559	.0692	.0798	.0866	.0888
21	.0024	.0055	.0109	.0191	.0299	.0426	.0560	.0684	.0783	.0846
22	.0012	.0030	.0065	.0121	.0204	.0310	.0433	.0560	.0676	.0769
23	.0006	.0016	.0037	.0074	.0133	.0216	.0320	.0438	.0559	.0669
24	.0003	.0008	.0020	.0043	.0083	.0144	.0226	.0328	.0442	.0557

25	.0001	.0004	.0010	.0024	.0050	.0092	.0154	.0237	.0336	.0446
26	.0000	.0002	.0005	.0013	.0029	.0057	.0101	.0164	.0246	.0343
27	.0000	.0001	.0002	.0007	.0016	.0034	.0063	.0109	.0173	.0254
28	.0000	.0000	.0001	.0003	.0009	.0019	.0038	.0070	.0117	.0181
29	.0000	.0000	.0001	.0002	.0004	.0011	.0023	.0044	.0077	.0125
30	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0006	.0013	.0026	.0049	.0083
31	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0007	.0015	.0030	.0054
32	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0004	.0009	.0018	.0034
33	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0005	.0010	.0020
34	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0006	.0012
35	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0007
36	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0004
37	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002
38	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001
39	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001
40	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000

TABLA D
PROBABILIDADES POISSON PARA VALORES ACUMULADOS DE X

Los valores de esta tabla dan la probabilidad de x o menos acontecimientos para un proceso de Poisson con una media de μ . Por ejemplo si $\mu = 1.5$ la probabilidad de 5 o menos acontecimientos es de **0.9955**

	μ									
x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	.9048	.8187	.7408	.6703	.6065	.5488	.4966	.4493	.4066	.3679

1	.9953	.9825	.9631	.9384	.9098	.8781	.8442	.8088	.7725	.7358
2	.9998	.9989	.9964	.9921	.9856	.9769	.9659	.9526	.9371	.9197
3	1.0000	.9999	.9997	.9992	.9982	.9966	.9942	.9909	.9865	.9810
4	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998	.9996	.9992	.9986	.9977	.9963
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998	.9997	.9994
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

x	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
0	.3329	.3012	.2725	.2466	.2231	.2019	.1827	.1653	.1496	.1353
1	.6990	.6626	.6268	.5918	.5578	.5249	.4932	.4628	.4337	.4060
2	.9004	.8795	.8571	.8335	.8088	.7834	.7572	.7306	.7037	.6767
3	.9743	.9662	.9569	.9463	.9344	.9212	.9068	.8913	.8747	.8571
4	.9946	.9923	.9893	.9857	.9814	.9763	.9704	.9636	.9559	.9473
5	.9990	.9985	.9978	.9968	.9955	.9940	.9920	.9896	.9868	.9834
6	.9999	.9997	.9996	.9994	.9991	.9987	.9981	.9974	.9966	.9955
7	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9998	.9997	.9996	.9994	.9992	.9989
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9998	.9998
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

x	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0
0	.1225	.1108	.1003	.0907	.0821	.0743	.0672	.0608	.0550	.0498
1	.3796	.3546	.3309	.3084	.2873	.2674	.2487	.2311	.2146	.1991
2	.6496	.6227	.5960	.5697	.5438	.5184	.4936	.4695	.4460	.4232
3	.8386	.8194	.7993	.7787	.7576	.7360	.7141	.6919	.6696	.6472
4	.9379	.9275	.9162	.9041	.8912	.8774	.8629	.8477	.8318	.8153
5	.9796	.9751	.9700	.9643	.9580	.9510	.9433	.9349	.9258	.9161
6	.9941	.9925	.9906	.9884	.9858	.9828	.9794	.9756	.9713	.9665
7	.9985	.9980	.9974	.9967	.9958	.9947	.9934	.9919	.9901	.9881
8	.9997	.9995	.9994	.9991	.9989	.9985	.9981	.9976	.9969	.9962
9	.9999	.9999	.9999	.9998	.9997	.9996	.9995	.9993	.9991	.9989
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9999	.9998	.9998	.9997
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

x	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0
0	.0450	.0408	.0369	.0334	.0302	.0273	.0247	.0224	.0202	.0183
1	.1847	.1712	.1586	.1468	.1359	.1257	.1162	.1074	.0992	.0916

2	.4012	.3799	.3594	.3397	.3208	.3027	.2854	.2689	.2531	.2381
3	.6248	.6025	.5803	.5584	.5366	.5152	.4942	.4735	.4532	.4335
4	.7982	.7806	.7626	.7442	.7254	.7064	.6872	.6678	.6484	.6288
5	.9057	.8946	.8829	.8705	.8576	.8441	.8301	.8156	.8006	.7851
6	.9612	.9554	.9490	.9421	.9347	.9267	.9182	.9091	.8995	.8893
7	.9858	.9832	.9802	.9769	.9733	.9692	.9648	.9599	.9546	.9489
8	.9953	.9943	.9931	.9917	.9901	.9883	.9863	.9840	.9815	.9786
9	.9986	.9982	.9978	.9973	.9967	.9960	.9952	.9942	.9931	.9919
10	.9996	.9995	.9994	.9992	.9990	.9987	.9984	.9981	.9977	.9972
11	.9999	.9999	.9998	.9998	.9997	.9996	.9995	.9994	.9993	.9991
12	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9999	.9999	.9998	.9998	.9997
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

x	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9	5.0
0	.0166	.0150	.0136	.0123	.0111	.0101	.0091	.0082	.0074	.0067
1	.0845	.0780	.0719	.0663	.0611	.0563	.0518	.0477	.0439	.0404
2	.2238	.2102	.1974	.1851	.1736	.1626	.1523	.1425	.1333	.1247
3	.4142	.3954	.3772	.3594	.3423	.3257	.3097	.2942	.2793	.2650
4	.6093	.5898	.5704	.5512	.5321	.5132	.4946	.4763	.4582	.4405
5	.7693	.7531	.7367	.7199	.7029	.6858	.6684	.6510	.6335	.6160
6	.8786	.8675	.8558	.8436	.8311	.8180	.8046	.7908	.7767	.7622
7	.9427	.9361	.9290	.9214	.9134	.9049	.8960	.8867	.8769	.8666
8	.9755	.9721	.9683	.9642	.9597	.9549	.9497	.9442	.9382	.9319
9	.9905	.9889	.9871	.9851	.9829	.9805	.9778	.9749	.9717	.9682
10	.9966	.9959	.9952	.9943	.9933	.9922	.9910	.9896	.9880	.9863
11	.9989	.9986	.9983	.9980	.9976	.9971	.9966	.9960	.9953	.9945
12	.9997	.9996	.9995	.9993	.9992	.9990	.9988	.9986	.9983	.9980
13	.9999	.9999	.9998	.9998	.9997	.9997	.9996	.9995	.9994	.9993
14	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9998	.9998
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

x	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9	6.0
0	.0061	.0055	.0050	.0045	.0041	.0037	.0033	.0030	.0027	.0025
1	.0372	.0342	.0314	.0289	.0266	.0244	.0224	.0206	.0189	.0174
2	.1165	.1088	.1016	.0948	.0884	.0824	.0768	.0715	.0666	.0620

3	.2513	.2381	.2254	.2133	.2017	.1906	.1800	.1700	.1604	.1512
4	.4231	.4061	.3895	.3733	.3575	.3422	.3272	.3127	.2987	.2851
5	.5984	.5809	.5635	.5461	.5289	.5119	.4950	.4783	.4619	.4457
6	.7474	.7324	.7171	.7017	.6860	.6703	.6544	.6384	.6224	.6063
7	.8560	.8449	.8335	.8217	.8095	.7970	.7841	.7710	.7576	.7440
8	.9252	.9181	.9106	.9027	.8944	.8857	.8766	.8672	.8574	.8472
9	.9644	.9603	.9559	.9512	.9462	.9409	.9352	.9292	.9228	.9161
10	.9844	.9823	.9800	.9775	.9747	.9718	.9686	.9651	.9614	.9574
11	.9937	.9927	.9916	.9904	.9890	.9875	.9859	.9841	.9821	.9799
12	.9976	.9972	.9967	.9962	.9955	.9949	.9941	.9932	.9922	.9912
13	.9992	.9990	.9988	.9986	.9983	.9980	.9977	.9973	.9969	.9964
14	.9997	.9997	.9996	.9995	.9994	.9993	.9991	.9990	.9988	.9986
15	.9999	.9999	.9999	.9998	.9998	.9998	.9997	.9996	.9996	.9995
16	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9998
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

x	6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6	6.7	6.8	6.9	7.0
0	.0022	.0020	.0018	.0017	.0015	.0014	.0012	.0011	.0010	.0009
1	.0159	.0146	.0134	.0123	.0113	.0103	.0095	.0087	.0080	.0073
2	.0577	.0536	.0498	.0463	.0430	.0400	.0371	.0344	.0320	.0296
3	.1425	.1342	.1264	.1189	.1118	.1052	.0988	.0928	.0871	.0818
4	.2719	.2592	.2469	.2351	.2237	.2127	.2022	.1920	.1823	.1730
5	.4298	.4141	.3988	.3837	.3690	.3547	.3406	.3270	.3137	.3007
6	.5902	.5742	.5582	.5423	.5265	.5108	.4953	.4799	.4647	.4497
7	.7301	.7160	.7017	.6873	.6728	.6581	.6433	.6285	.6136	.5987
8	.8367	.8259	.8148	.8033	.7916	.7796	.7673	.7548	.7420	.7291
9	.9090	.9016	.8939	.8858	.8774	.8686	.8596	.8502	.8405	.8305
10	.9531	.9486	.9437	.9386	.9332	.9274	.9214	.9151	.9084	.9015
11	.9776	.9750	.9723	.9693	.9661	.9627	.9591	.9552	.9510	.9467
12	.9900	.9887	.9873	.9857	.9840	.9821	.9801	.9779	.9755	.9730
13	.9958	.9952	.9945	.9937	.9929	.9920	.9909	.9898	.9885	.9872
14	.9984	.9981	.9978	.9974	.9970	.9966	.9961	.9956	.9950	.9943
15	.9994	.9993	.9992	.9990	.9988	.9986	.9984	.9982	.9979	.9976
16	.9998	.9997	.9997	.9996	.9996	.9995	.9994	.9993	.9992	.9990
17	.9999	.9999	.9999	.9999	.9998	.9998	.9998	.9997	.9997	.9996
18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

21	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
-----------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

x	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.6	7.7	7.8	7.9	8.0
0	.0008	.0007	.0007	.0006	.0006	.0005	.0005	.0004	.0004	.0003
1	.0067	.0061	.0056	.0051	.0047	.0043	.0039	.0036	.0033	.0030
2	.0275	.0255	.0236	.0219	.0203	.0188	.0174	.0161	.0149	.0138
3	.0767	.0719	.0674	.0632	.0591	.0554	.0518	.0485	.0453	.0424
4	.1641	.1555	.1473	.1395	.1321	.1249	.1181	.1117	.1055	.0996
5	.2881	.2759	.2640	.2526	.2414	.2307	.2203	.2103	.2006	.1912
6	.4349	.4204	.4060	.3920	.3782	.3646	.3514	.3384	.3257	.3134
7	.5838	.5689	.5541	.5393	.5246	.5100	.4956	.4812	.4670	.4530
8	.7160	.7027	.6892	.6757	.6620	.6482	.6343	.6204	.6065	.5925
9	.8202	.8096	.7988	.7877	.7764	.7649	.7531	.7411	.7290	.7166
10	.8942	.8867	.8788	.8707	.8622	.8535	.8445	.8352	.8257	.8159
11	.9420	.9371	.9319	.9265	.9208	.9148	.9085	.9020	.8952	.8881
12	.9703	.9673	.9642	.9609	.9573	.9536	.9496	.9454	.9409	.9362
13	.9857	.9841	.9824	.9805	.9784	.9762	.9739	.9714	.9687	.9658
14	.9935	.9927	.9918	.9908	.9897	.9886	.9873	.9859	.9844	.9827
15	.9972	.9969	.9964	.9959	.9954	.9948	.9941	.9934	.9926	.9918
16	.9989	.9987	.9985	.9983	.9980	.9978	.9974	.9971	.9967	.9963
17	.9996	.9995	.9994	.9993	.9992	.9991	.9989	.9988	.9986	.9984
18	.9998	.9998	.9998	.9997	.9997	.9996	.9996	.9995	.9994	.9993
19	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9998	.9998	.9998	.9997
20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9999	.9999
21	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

x	8.1	8.2	8.3	8.4	8.5	8.6	8.7	8.8	8.9	9.0
0	.0003	.0003	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0001	.0001
1	.0028	.0025	.0023	.0021	.0019	.0018	.0016	.0015	.0014	.0012
2	.0127	.0118	.0109	.0100	.0093	.0086	.0079	.0073	.0068	.0062
3	.0396	.0370	.0346	.0323	.0301	.0281	.0262	.0244	.0228	.0212
4	.0940	.0887	.0837	.0789	.0744	.0701	.0660	.0621	.0584	.0550
5	.1822	.1736	.1653	.1573	.1496	.1422	.1352	.1284	.1219	.1157
6	.3013	.2896	.2781	.2670	.2562	.2457	.2355	.2256	.2160	.2068
7	.4391	.4254	.4119	.3987	.3856	.3728	.3602	.3478	.3357	.3239
8	.5786	.5647	.5507	.5369	.5231	.5094	.4958	.4823	.4689	.4557
9	.7041	.6915	.6788	.6659	.6530	.6400	.6269	.6137	.6006	.5874
10	.8058	.7955	.7850	.7743	.7634	.7522	.7409	.7294	.7178	.7060
11	.8807	.8731	.8652	.8571	.8487	.8400	.8311	.8220	.8126	.8030

12	.9313	.9261	.9207	.9150	.9091	.9029	.8965	.8898	.8829	.8758
13	.9628	.9595	.9561	.9524	.9486	.9445	.9403	.9358	.9311	.9261
14	.9810	.9791	.9771	.9749	.9726	.9701	.9675	.9647	.9617	.9585
15	.9908	.9898	.9887	.9875	.9862	.9848	.9832	.9816	.9798	.9780
16	.9958	.9953	.9947	.9941	.9934	.9926	.9918	.9909	.9899	.9889
17	.9982	.9979	.9977	.9973	.9970	.9966	.9962	.9957	.9952	.9947
18	.9992	.9991	.9990	.9989	.9987	.9985	.9983	.9981	.9978	.9976
19	.9997	.9997	.9996	.9995	.9995	.9994	.9993	.9992	.9991	.9989
20	.9999	.9999	.9998	.9998	.9998	.9998	.9997	.9997	.9996	.9996
21	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9998	.9998
22	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999
23	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
24	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
25	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

x	9.1	9.2	9.3	9.4	9.5	9.6	9.7	9.8	9.9	10.0
0	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0000
1	.0011	.0010	.0009	.0009	.0008	.0007	.0007	.0006	.0005	.0005
2	.0058	.0053	.0049	.0045	.0042	.0038	.0035	.0033	.0030	.0028
3	.0198	.0184	.0172	.0160	.0149	.0138	.0129	.0120	.0111	.0103
4	.0517	.0486	.0456	.0429	.0403	.0378	.0355	.0333	.0312	.0293
5	.1098	.1041	.0986	.0935	.0885	.0838	.0793	.0750	.0710	.0671
6	.1978	.1892	.1808	.1727	.1649	.1574	.1502	.1433	.1366	.1301
7	.3123	.3010	.2900	.2792	.2687	.2584	.2485	.2388	.2294	.2202
8	.4426	.4296	.4168	.4042	.3918	.3796	.3676	.3558	.3442	.3328
9	.5742	.5611	.5479	.5349	.5218	.5089	.4960	.4832	.4705	.4579
10	.6941	.6820	.6699	.6576	.6453	.6329	.6205	.6080	.5955	.5830
11	.7932	.7832	.7730	.7626	.7520	.7412	.7303	.7193	.7081	.6968
12	.8684	.8607	.8529	.8448	.8364	.8279	.8191	.8101	.8009	.7916
13	.9210	.9156	.9100	.9042	.8981	.8919	.8853	.8786	.8716	.8645
14	.9552	.9517	.9480	.9441	.9400	.9357	.9312	.9265	.9216	.9165
15	.9760	.9738	.9715	.9691	.9665	.9638	.9609	.9579	.9546	.9513
16	.9878	.9865	.9852	.9838	.9823	.9806	.9789	.9770	.9751	.9730
17	.9941	.9934	.9927	.9919	.9911	.9902	.9892	.9881	.9870	.9857
18	.9973	.9969	.9966	.9962	.9957	.9952	.9947	.9941	.9935	.9928
19	.9988	.9986	.9985	.9983	.9980	.9978	.9975	.9972	.9969	.9965

20	.9995	.9994	.9993	.9992	.9991	.9990	.9989	.9987	.9986	.9984
21	.9998	.9998	.9997	.9997	.9996	.9996	.9995	.9995	.9994	.9993
22	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9998	.9998	.9998	.9997	.9997
23	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
24	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
25	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

x	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
1	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
2	.0012	.0005	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
3	.0049	.0023	.0011	.0005	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
4	.0151	.0076	.0037	.0018	.0009	.0004	.0002	.0001	.0000	.0000
5	.0375	.0203	.0107	.0055	.0028	.0014	.0007	.0003	.0002	.0001
6	.0786	.0458	.0259	.0142	.0076	.0040	.0021	.0010	.0005	.0003
7	.1432	.0895	.0540	.0316	.0180	.0100	.0054	.0029	.0015	.0008
8	.2320	.1550	.0998	.0621	.0374	.0220	.0126	.0071	.0039	.0021
9	.3405	.2424	.1658	.1094	.0699	.0433	.0261	.0154	.0089	.0050
10	.4599	.3472	.2517	.1757	.1185	.0774	.0491	.0304	.0183	.0108
11	.5793	.4616	.3532	.2600	.1848	.1270	.0847	.0549	.0347	.0214
12	.6887	.5760	.4631	.3585	.2676	.1931	.1350	.0917	.0606	.0390
13	.7813	.6815	.5730	.4644	.3632	.2745	.2009	.1426	.0984	.0661
14	.8540	.7720	.6751	.5704	.4657	.3675	.2808	.2081	.1497	.1049
15	.9074	.8444	.7636	.6694	.5681	.4667	.3715	.2867	.2148	.1565
16	.9441	.8987	.8355	.7559	.6641	.5660	.4677	.3751	.2920	.2211
17	.9678	.9370	.8905	.8272	.7489	.6593	.5640	.4686	.3784	.2970
18	.9823	.9626	.9302	.8826	.8195	.7423	.6550	.5622	.4695	.3814
19	.9907	.9787	.9573	.9235	.8752	.8122	.7363	.6509	.5606	.4703
20	.9953	.9884	.9750	.9521	.9170	.8682	.8055	.7307	.6472	.5591
21	.9977	.9939	.9859	.9712	.9469	.9108	.8615	.7991	.7255	.6437
22	.9990	.9970	.9924	.9833	.9673	.9418	.9047	.8551	.7931	.7206
23	.9995	.9985	.9960	.9907	.9805	.9633	.9367	.8989	.8490	.7875
24	.9998	.9993	.9980	.9950	.9888	.9777	.9594	.9317	.8933	.8432
25	.9999	.9997	.9990	.9974	.9938	.9869	.9748	.9554	.9269	.8878
26	1.0000	.9999	.9995	.9987	.9967	.9925	.9848	.9718	.9514	.9221
27	1.0000	.9999	.9998	.9994	.9983	.9959	.9912	.9827	.9687	.9475
28	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9991	.9978	.9950	.9897	.9805	.9657

29	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9996	.9989	.9973	.9941	.9882	.9782
30	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998	.9994	.9986	.9967	.9930	.9865
31	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9993	.9982	.9960	.9919
32	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9996	.9990	.9978	.9953
33	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998	.9995	.9988	.9973
34	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998	.9994	.9985
35	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9992
36	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998	.9996
37	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9998
38	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
39	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999
40	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

MODULO IV

DISTRIBUCION NORMAL

INTRODUCCIÓN

La distribución normal ocupa un lugar importante en la estadística aplicada como en la teórica por numerosas razones. Una de ellas es que suele coincidir muy cercanamente con las distribuciones de frecuencia observada de muchas mediciones naturales y físicas. Otra razón es que se puede utilizar para aproximar probabilidades binomiales cuando la población es grande. Sin embargo, lo que hace más importante a la distribución normal es que la distribución de medias muestrales y proporciones de grandes muestras tienden a distribuirse normalmente, lo que tiene una enorme importancia en el muestreo estadístico. En este módulo estudiaremos la distribución normal, sus múltiples formas de aplicarla en la resolución de problemas que atañen a las industrias, las ciencias sociales y la ingenierías principalmente.

Insistiremos en la necesidad de utilizar los applets estadísticos, que se consiguen gratuitamente en Internet para resolver los ejercicios, siendo lo ideal aprendizaje y utilización de los múltiples paquetes estadísticos comerciales tales como El Spss, Minitab, Sas, Statgraphics, Excel, etc. En el peor de los casos hay que resolver los ejercicios de la forma tradicional mediante el uso de las tablas de distribuciones.

La enseñanza de la estadística debe ir acorde con el desarrollo de las ciencias y debe ser una herramienta eficaz para todo el proceso que se genera en la toma de decisiones, por lo tanto el computador y los software estadísticos deben ser parte fundamental en este proceso.

4.1 NATURALEZA DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

La distribución normal es una distribución probabilística continua que al graficarla obtenemos una curva semejante a una campana, suave, unimodal y simétrica con respecto a su media. Esta distribución normal se representa mediante la siguiente fórmula

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$F(z)$ = funcion de distribucion estandar con $m = 0$ y $s^2 = 1$

$e = 2.71828$

$p = 3.1416$

m = media de la distribucion binomial = np

s = desviacion estandar de la distribucion binomial = \sqrt{npq}

$$Z = \frac{X - m}{s}$$

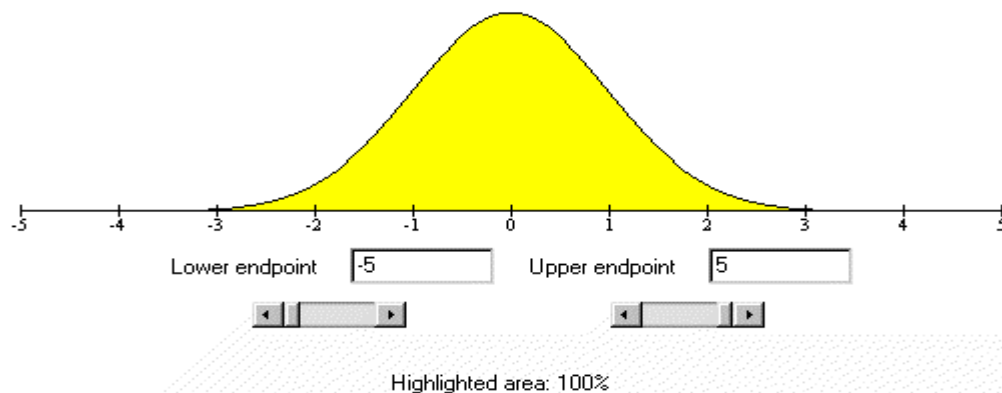
Z = numero de desviaciones estandar a partir de la media

X = valor de interes

En términos generales, la distribución normal tienen las siguientes características :

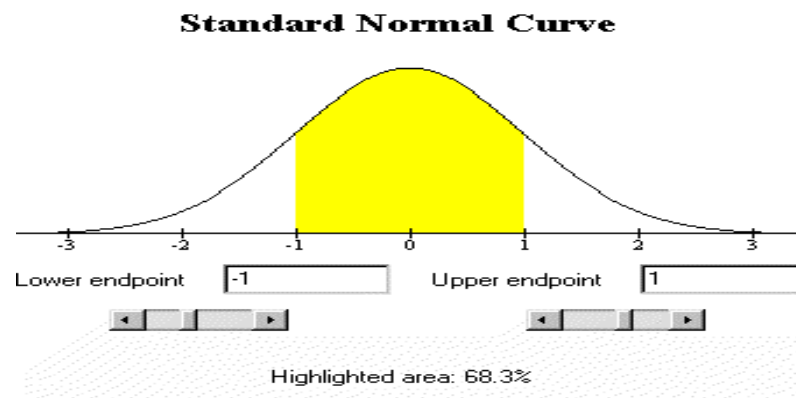
- La curva normal tiene forma de campana
- La curva normal es simétrica con respecto a la media de la distribución
- La curva normal se extiende desde $-\infty$ a $+\infty$
- Cada distribución normal queda completamente especificada por su media y su desviación estándar
- Existe una distribución normal diferente para cada combinación de media y desviación estándar
- El área total bajo una curva normal se considera que es del 100%

Standard Normal Curve

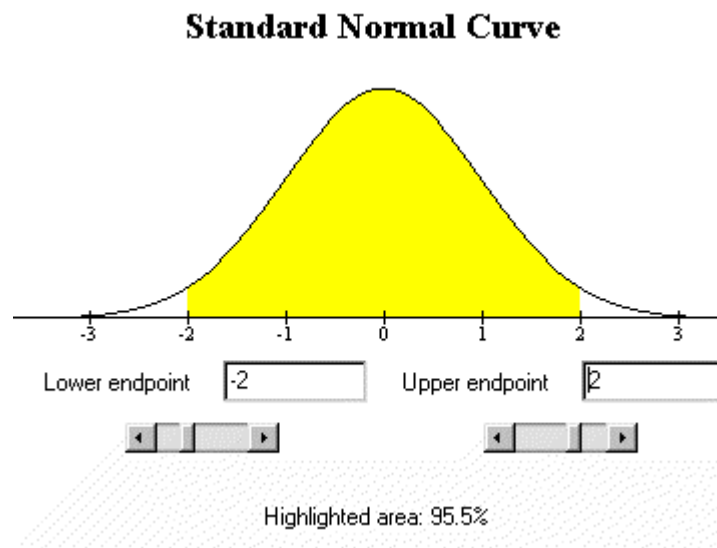


- El área bajo la curva entre dos puntos es la probabilidad de que una variable distribuida normalmente asuma un valor entre ella
- Dado que existe un numero ilimitado de valores en el intervalo que va desde $-\infty$ a $+\infty$, la probabilidad de que una variable aleatoria distribuida normalmente sea exactamente igual a cualquier valor dado es casi de cero. Por lo tanto las probabilidades siempre serán para un intervalo.

- El área bajo la curva entre la media y cualquier otro punto es una función del número de desviaciones estándar que el punto dista de la media.
- El 68.3% de todas las observaciones están dentro de una desviación estándar de la media

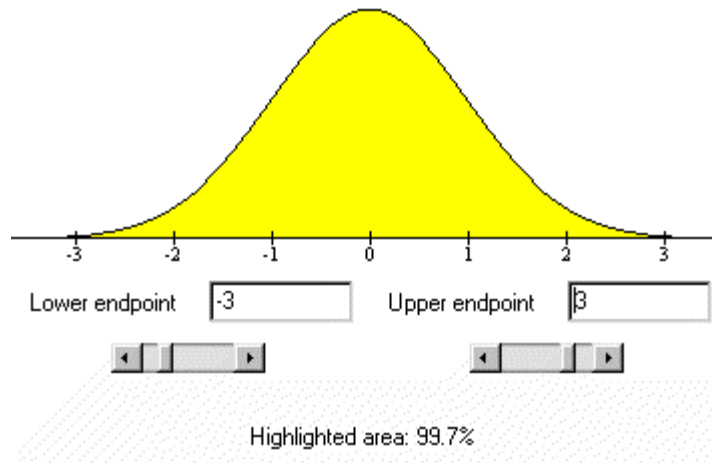


- El 95.45% de todas las observaciones están dentro de dos desviaciones estándar de la media



- El 99.7% de todas las observaciones están dentro de tres desviaciones estándar de la media.

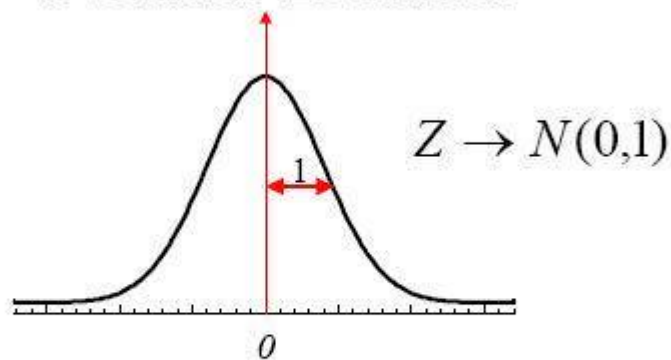
Standard Normal Curve



C:\Area Under the Normal Curve.htm

<http://stat-www.berkeley.edu/~stark/SticiGui/Text/gloss.htm#normal>

Normal Estándar



$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}, \quad z \in \mathbb{R}$$

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$$

4.2 VARIABLE TIPIFICADA O ESTANDARIZADA

Como se dijo anteriormente existe un numero ilimitado o infinitos de distribuciones normales posibles , cada una con su media y su desviación estándar propia, razón de lo anterior y dada la imposibilidad de estudiarlas todas, procedemos a convertir todas estas distribuciones normales a una sola forma estándar. Esta distribución normal estandarizada se calcula utilizando la siguiente formula de Z, donde Z es la variable tipificada o estandarizada y X es cualquier valor especificado . Después de este proceso de transformación la media de la distribución es cero y la desviación típica es uno.

$$Z = \frac{x - m}{s}$$

A continuación haremos una comparación de las escalas reales y estandarizadas
Para una $\mu = 200$ y una $\sigma = 20$

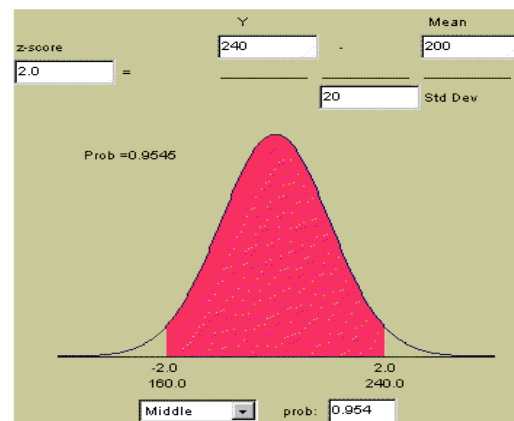
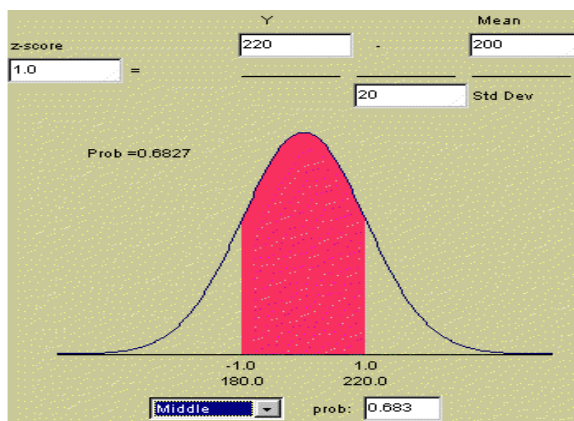
$$m = 200 \quad s = 20$$

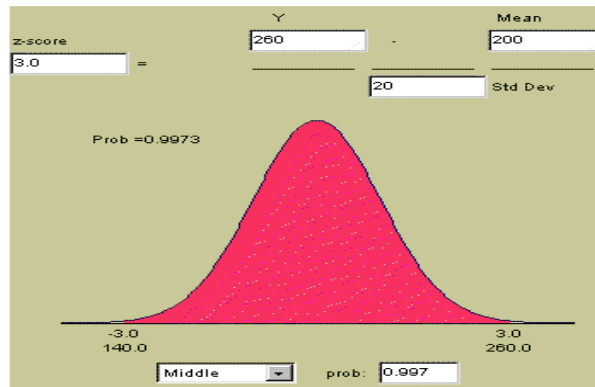
$$Z = \frac{x - m}{s} \quad \rightarrow \quad Z = \frac{200 - 200}{20} = 0$$

$$Z = \frac{180 - 200}{20} = -1 \quad Z = \frac{220 - 200}{20} = 1$$

$$Z = \frac{160 - 200}{20} = -2 \quad Z = \frac{240 - 200}{20} = 2$$

$$Z = \frac{140 - 200}{20} = -3 \quad Z = \frac{260 - 200}{20} = 3$$





Existe una gran ventaja poder pensar y trabajar con valores relativos , es decir , que en lugar de tener que emplear una familia ilimitada de distribuciones normales , se puede utilizar una sola distribución para convertir cualquier valor de cualquier distribución normal en un valor Z , lo cual indicara a cuantas desviaciones estándar esta ese valor de la media de la distribución . Esto permite determinar varias probabilidades con base en la curva normal, mediante el uso de una tabla estandarizada única diseñada para este fin.

Las áreas bajo la curva para cualquier distribución normal se pueden encontrar utilizando una tabla normal estándar y cambiando a unidades estándares la escala de unidades reales

La media y la desviación son fundamentales para hallar Z . Todas las tablas están diseñadas para hallar Z .

EJEMPLO 1

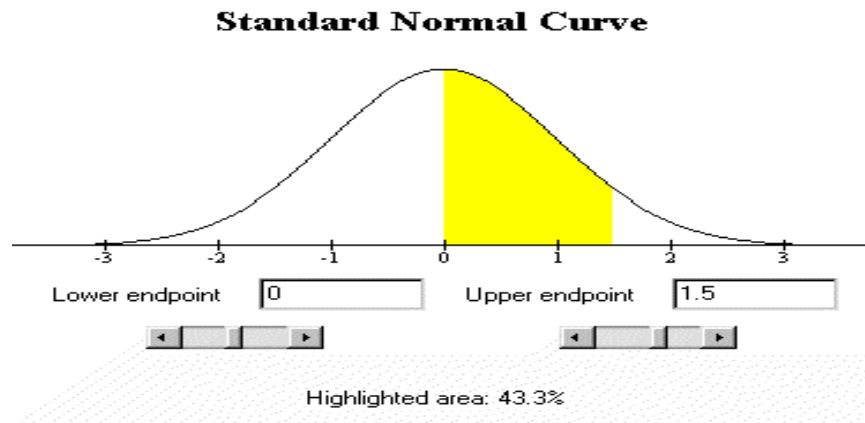
Hallar el área bajo la curva normal para los siguientes datos :

- | | | |
|---------------|---|------------|
| a) $z = 0$ | y | $z = 1.5$ |
| b) $z = 0$ | y | $z = -1.7$ |
| c) $z = -1.7$ | y | $z = 2.1$ |
| d) $z = 0.55$ | y | $z = 1.65$ |
| e) $z = -4.0$ | y | $z = 0.5$ |
| f) $z = -1.5$ | y | $z = 4.0$ |
| g) $z = 0.75$ | y | $z = 2.5$ |
| h) $z = -2.2$ | y | $z = -0.5$ |

DESARROLLO

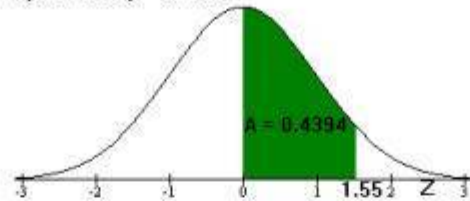
Para el desarrollo de este ejemplo utilizamos uno de los múltiples applets que se encuentran en Internet, que son muy sencillos de utilizar y reemplazan el viejo método de consultar la tabla de Probabilidad normal.

Este applet tomado de [SticiGui Home](#) permite calcular el área bajo curva normal conociendo los valores de z , los cuales se digitan en las casillas correspondientes de probabilidad de sombrea el área solicitada y entrega su valor o probabilidad. Cabe Anotar que este ejemplo también se resolvió utilizando la tabla de probabilidad normal con el fin de visualizar el procedimiento.



Utilizando la tabla normal del apéndice encontramos los mismos valores que con el applet

$$P[0 < X < 1.55] = 0.4394$$



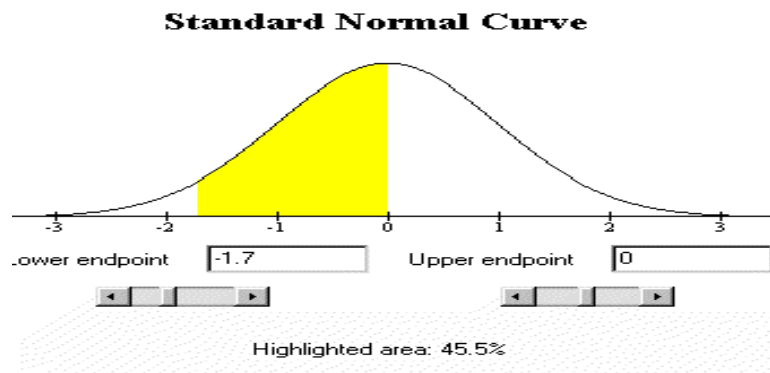
**TABLA G “
ÁREA BAJO LA CURVA NORMAL ESTÁNDAR**

Los valores de esta tabla dan el área bajo la curva entre la media y desviaciones estándar z arriba de la media. Por ejemplo para $z = 1.55$, el área bajo la curva entre la media y z es 0.4394

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4600	.4608	.4616	.4625	.4633

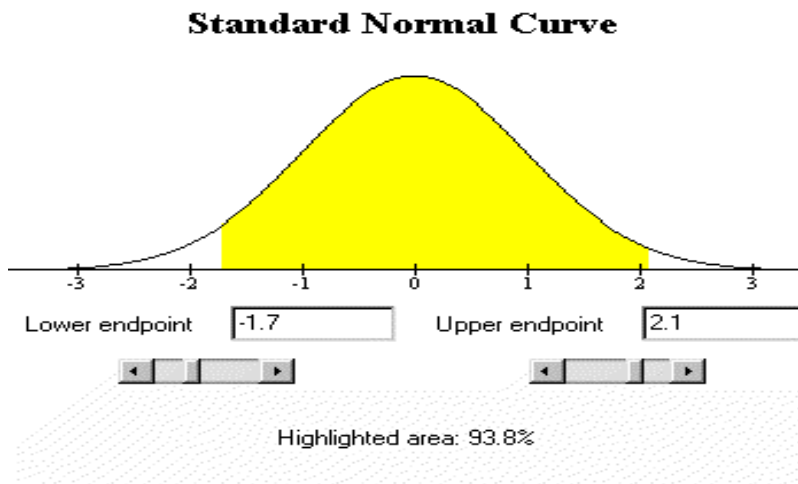
a)

Para $z = 0$ y $z = 1.5$ leemos área = 0.4332 que corresponde a la zona sombreada



b)

Para $z = 0$ y $z = -1.7$ leemos $\text{área} = 0.4554$ que corresponde a la zona sombreada



c)

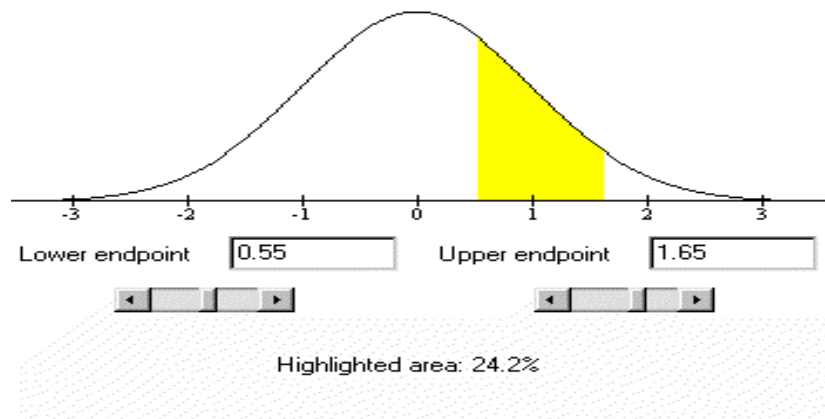
El área pedida A corresponde a la suma de las áreas

$A_1 = 0.4554$ de $z = 0$ y $z = -1.7$

$A_2 = 0.4821$ de $z = 0$ y $z = 2.1$

$A = 0.4554 + 0.4821 = 0.9375$ que es área sombreada que se muestra

Standard Normal Curve



d)

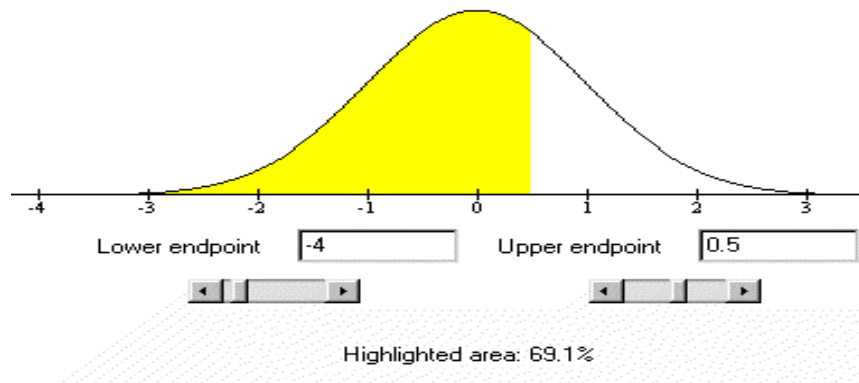
El área pedida A corresponde a la diferencia de las áreas

$A_1 = 0.4505$ de $z = 0$ y $z = 1.65$

$A_2 = 0.2088$ de $z = 0$ y $z = 0.55$

$A = 0.4505 - 0.2088 = 0.2417$ que es área sombreada que se muestra

Standard Normal Curve



e)

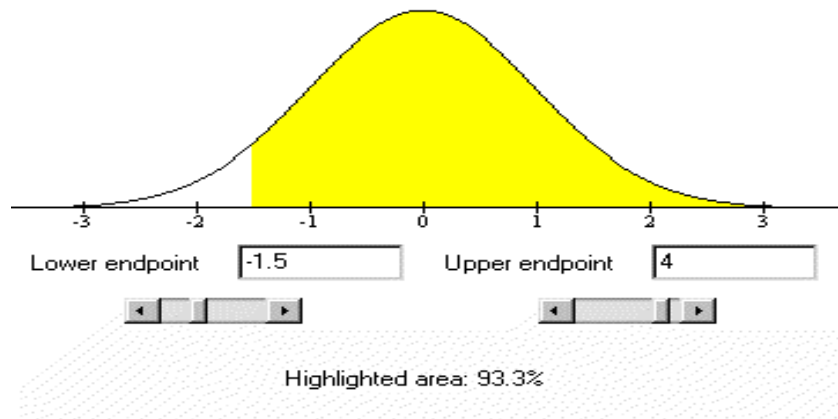
El área pedida A corresponde a la suma de las áreas

$A_1 = 0.5000$ de $z = 0$ y $z = -4.0$

$A_2 = 0.1915$ de $z = 0$ y $z = 0.5$

$A = 0.5 + 0.1915 = 0.6915$ que es área sombreada que se muestra

Standard Normal Curve



f)

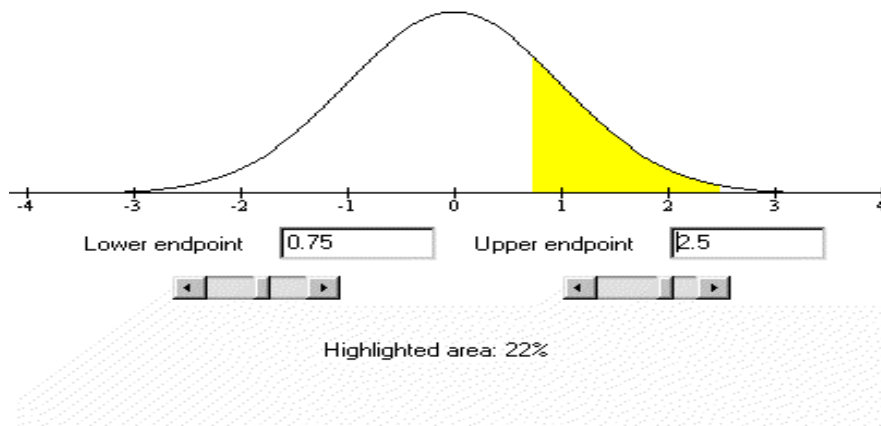
El área pedida A corresponde a la suma de las áreas

$A_1 = 0.4332$ de $z = 0$ y $z = -1.5$

$A_2 = 0.5000$ de $z = 0$ y $z = 4.0$

$A = 0.4332 + 0.5000 = 0.9332$ que es área sombreada que se muestra

Standard Normal Curve



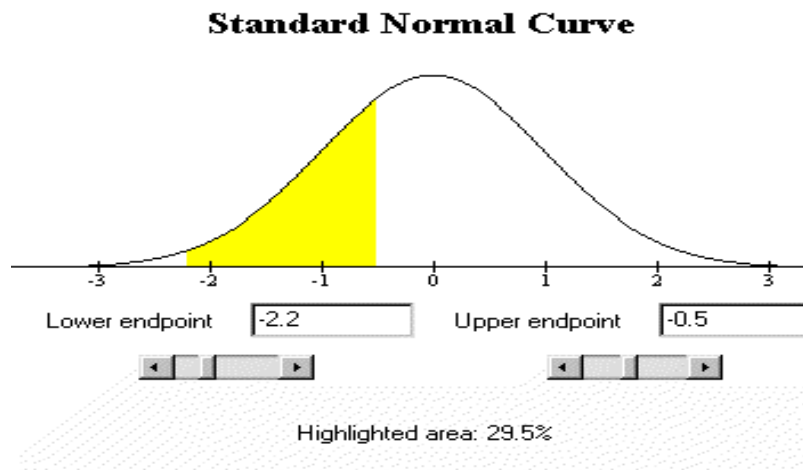
g)

El área pedida A corresponde a la diferencia de las áreas

$A_1 = 0.4938$ de $z = 0$ y $z = 2.5$

$A_2 = 0.2734$ de $z = 0$ y $z = 0.75$

$A = 0.4938 - 0.2734 = 0.2204$ que es área sombreada que se muestra



h)

El área pedida A corresponde a la diferencia de las áreas

$A_1 = 0.4861$ de $z = 0$ y $z = -2.2$

$A_2 = 0.1915$ de $z = 0$ y $z = -0.5$

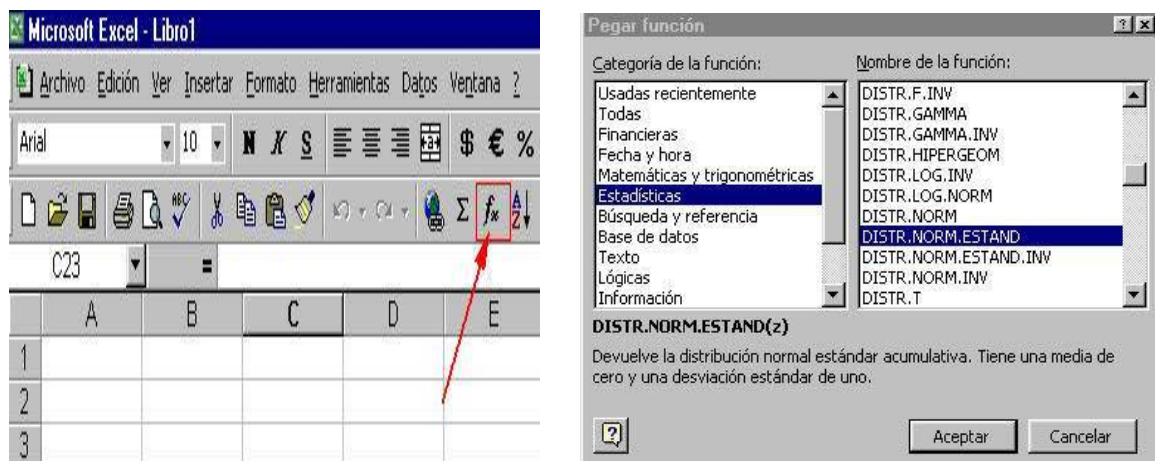
$A = 0.4861 - 0.1915 = 0.2946$ que es área sombreada que se muestra

EJEMPLO 2

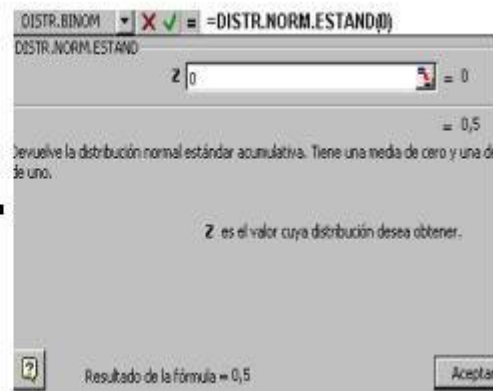
Resolver el ejemplo anterior utilizando Excel

DESARROLLO

Nos ubicamos inicialmente en la ventana de Excel que se muestra en la figura adjunta y pulsamos en icono **fx** y obtenemos la ventana pegar función en donde seleccionamos Estadísticas y obtenemos una gama de funciones, en cual escogemos distribución normal estándar como se puede ver en la figura.



Al pulsar esta función se abre una ventana en la introducimos los valores de z y obtenemos las probabilidades o área al aceptar dicha operación.

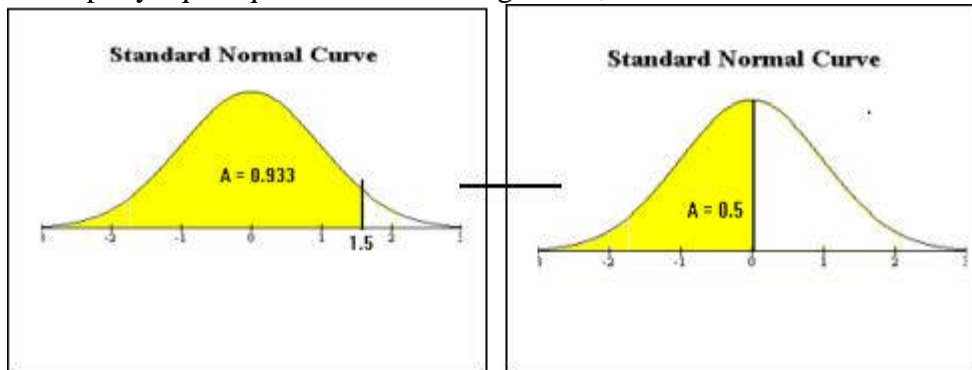


$$\text{DISTR.NORM.ESTAND}(1,5) - \text{DISTR.NORM.ESTAND}(0) = 0,933 - 0,5 = 0,433192771$$

Cabe anotar que las mayoría de los programas estadísticos siguen la siguiente secuencia que se muestra en los gráficos adjuntos para el calculo de probabilidades: donde el calculo de las áreas se realizan desde menos infinito (-) hasta el valor de z tipificado . Este valor calculado corresponde a el área bajo la curva de densidad de probabilidad y se calcula como la integral correspondiente a dicho intervalo y es igual a la probabilidad en dicho intervalo. También existe tabla para este tipo de calculo como la que se puede ver en la figura adjunta.

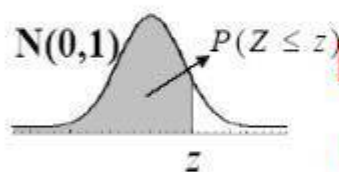
Para nuestro primer ejemplo a el área calculada para $Z = 1.5$ se resta el área calculada para $Z = 0$. En la sintaxis se ve la secuencia de las operaciones que se deben realizar en cada caso.

Desafortunadamente cuando se trabaja con los paquetes estadísticos es necesario tener muy claro el concepto ya que aquí no se muestran gráficos, sino resultados finales.



TABLA

Normal Estandar



Ejemplo.

$$P(Z \leq 1.96) = 0.9750$$

Z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0,1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0,2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5949	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0,3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6369	.6406	.6443	.6480	.6517
0,4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0,5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0,6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0,7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0,8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0,9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1,0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1,1	.8643	.8665	.8688	.8709	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1,2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1,3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1,4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1,5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1,6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1,7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1,8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1,9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2,0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2,1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2,2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2,3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2,4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2,5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2,6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2,7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2,8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2,9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3,0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990

DISTR.NORM.ESTAND

z -1,7 = -1,7

= 0,044565432

Devuelve la distribución normal estándar acumulativa. Tiene una media de cero y una desviación est de uno.

Z es el valor cuya distribución desea obtener.



Resultado de la fórmula = 0,455434568

Aceptar

Can

$$\text{DISTR.NORM.ESTAND}(0) - \text{DISTR.NORM.ESTAND}(-1,7) = 0,455434568$$


DISTR.NORM.ESTAND

Z = -1,7

= 0,044565432

Devuelve la distribución normal estándar acumulativa. Tiene una media de cero y una desviación estándar de uno.

Z es el valor cuya distribución desea obtener.

 Resultado de la fórmula = 0,937570211

$$\text{DISTR.NORM.ESTAND}(0) - \text{DISTR.NORM.ESTAND}(-1,7) = 0,937570211$$


DISTR.NORM.ESTAND

Z = 0,55

= 0,708840345

Devuelve la distribución normal estándar acumulativa. Tiene una media de cero y una desviación estándar de uno.

Z es el valor cuya distribución desea obtener.

 Resultado de la fórmula = 0,241688204

$$\text{DISTR.NORM.ESTAND}(1,65) - \text{DISTR.NORM.ESTAND}(0,55) = 0,241688204$$


DISTR.NORM.ESTAND

Z = -4

= 3,1686E-05

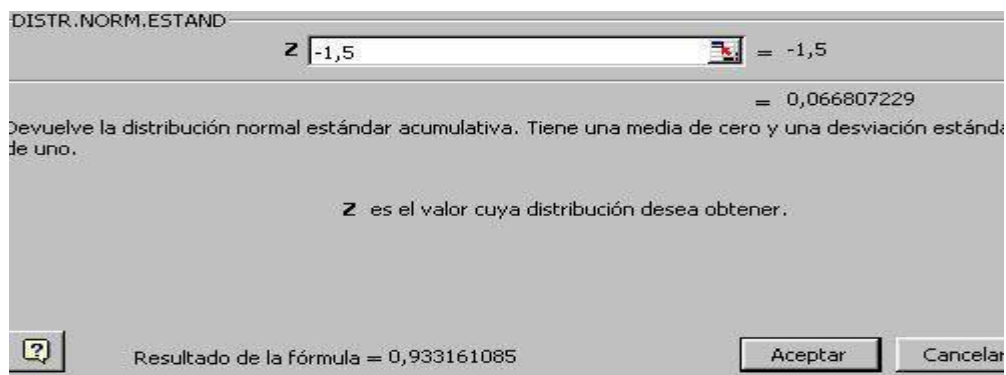
Devuelve la distribución normal estándar acumulativa. Tiene una media de cero y una desviación estándar de uno.

Z es el valor cuya distribución desea obtener.

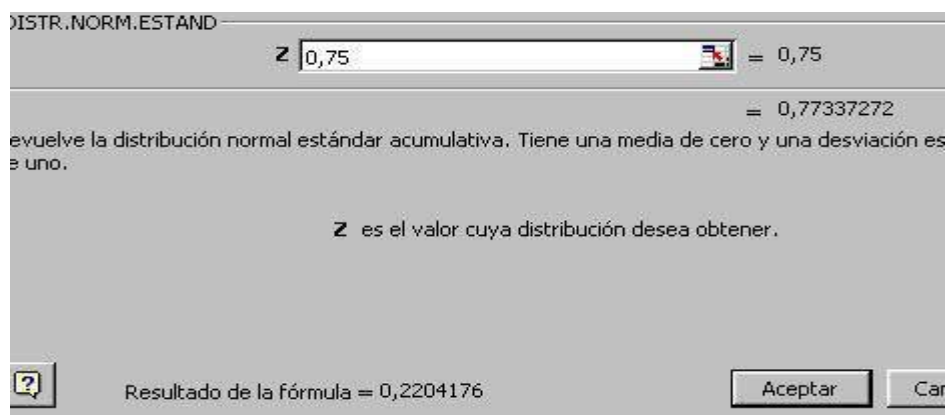
 Resultado de la fórmula = 0,691430781

$$\text{DISTR.NORM.ESTAND}(1,65) - \text{DISTR.NORM.ESTAND}(0,55) = 0,691430781$$

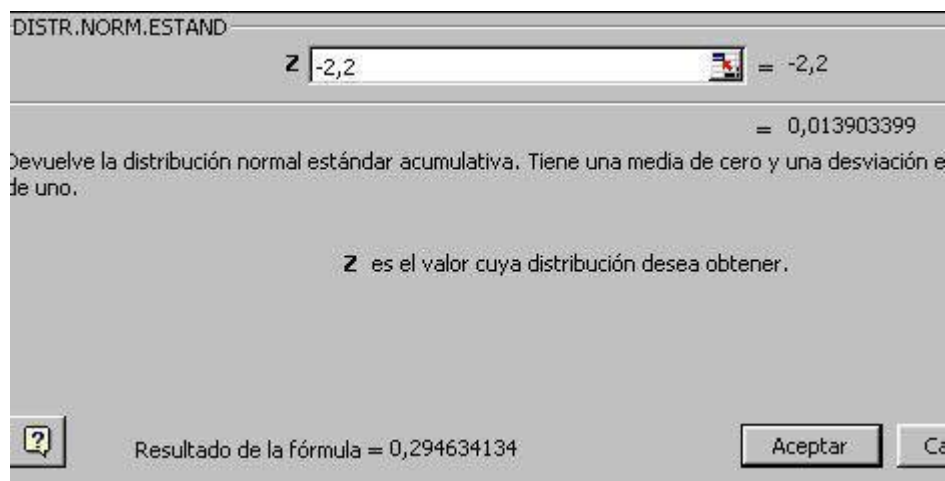
" Our lives begin to end the day we become silent about things that matter "
Martin Luther King



$$\text{DISTR.NORM.ESTAND}(4) - \text{DISTR.NORM.ESTAND}(-1,5) = 0,933161085$$



$$\text{DISTR.NORM.ESTAND}(2,5) - \text{DISTR.NORM.ESTAND}(0,75) = 0,2204176$$



$$\text{DISTR.NORM.ESTAND}(-0,5) - \text{DISTR.NORM.ESTAND}(-2,2) = 0,294634134$$

SINTAXIS DEL CALCULO REALIZADO POR EXCEL

Z	A1	Z	A2	ÁREA PEDIDA	FORMULA DESARROLLADA EN EL CALCULO
---	----	---	----	-------------	------------------------------------

" Our lives begin to end the day we become silent about things that matter "
Martin Luther King

0	0,5	1,5	0,933	0,433192771	DISTR.NORM.ESTAND(1,5) - DISTR.NORM.ESTAND(0)
0		-1,7		0,455434568	DISTR.NORM.ESTAND(0) - DISTR.NORM.ESTAND(-1,7)
-1,7		2,1		0,937570211	DISTR.NORM.ESTAND(2,1) - DISTR.NORM.ESTAND(-1,7)
0,55		1,65		0,241688204	DISTR.NORM.ESTAND(1,65) - DISTR.NORM.ESTAND(0,55)
-4		0,5		0,691430781	DISTR.NORM.ESTAND(0,5) - DISTR.NORM.ESTAND(-4)
-1,5		4		0,933161085	DISTR.NORM.ESTAND(4) - DISTR.NORM.ESTAND(-1,5)
0,75		2,5		0,2204176	DISTR.NORM.ESTAND(2,5) - DISTR.NORM.ESTAND(0,75)
-2,2		-0,5		0,294634134	DISTR.NORM.ESTAND(-0,5) - DISTR.NORM.ESTAND(-2,2)

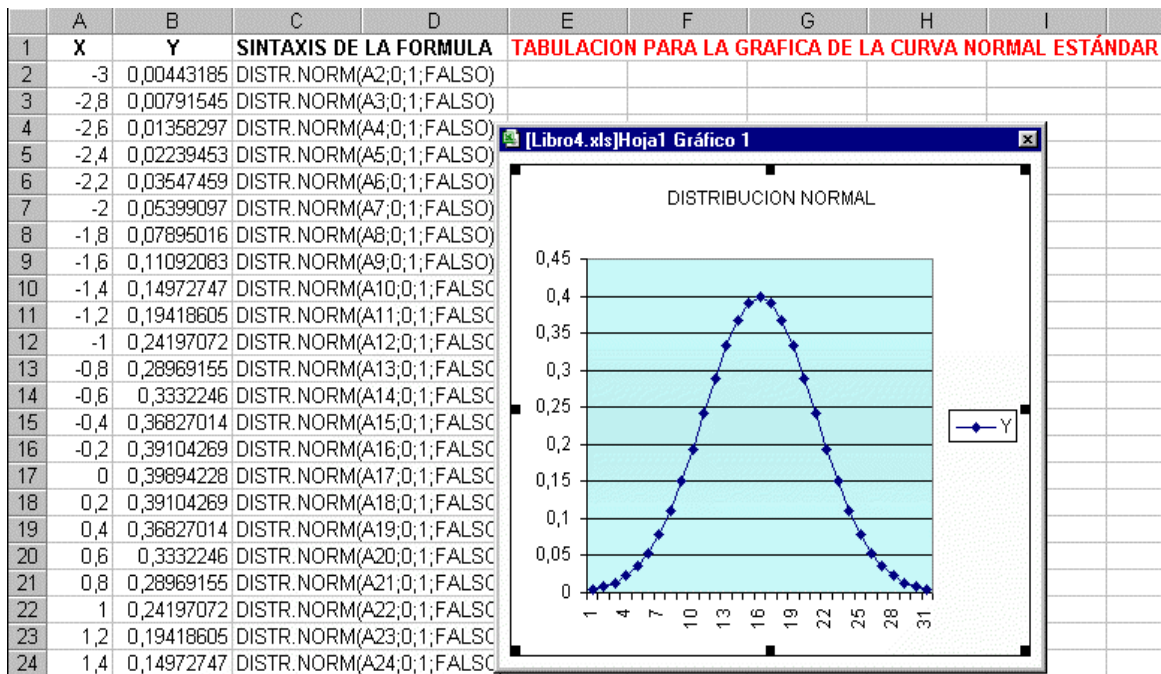
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Z	A1	Z	A2	AREA PEDIDA	FORMULA DESARROLLADA EN EL CALCULO			
2	0	0,5	1,5	0,933	0,433192771	DISTR.NORM.ESTAND(1,5) - DISTR.NORM.ESTAND(0)			
3	0		-1,7		0,455434568	DISTR.NORM.ESTAND(0) - DISTR.NORM.ESTAND(-1,7)			
4	-1,7		2,1		0,937570211	DISTR.NORM.ESTAND(2,1) - DISTR.NORM.ESTAND(-1,7)			
5	0,55		1,65		0,241688204	DISTR.NORM.ESTAND(1,65) - DISTR.NORM.ESTAND(0,55)			
6	-4		0,5		0,691430781	DISTR.NORM.ESTAND(0,5) - DISTR.NORM.ESTAND(-4)			
7	-1,5		4		0,933161085	DISTR.NORM.ESTAND(4) - DISTR.NORM.ESTAND(-1,5)			
8	0,75		2,5		0,2204176	DISTR.NORM.ESTAND(2,5) - DISTR.NORM.ESTAND(0,75)			
9	-2,2		-0,5		0,294634134	DISTR.NORM.ESTAND(-0,5) - DISTR.NORM.ESTAND(-2,2)			

EJEMPLO 2

Utilizando Excel elaborar una curva normal estandarizada

DESARROLLO

Partiendo de una serie de datos desde -3.0 hasta mas 3.0 elaboramos una columna estandarizada usando el método de Excel que acabamos de ver y con estos datos tipificados usando el auxiliar de grafico elaboramos la curva normal estándar



EJEMPLO 2

El peso medio de 500 trabajadores es de 151 libras y una desviación estándar de 15 libras. Suponiendo que están distribuidos normalmente. Encontrar cuantos trabajadores pesan :

- entre 120 y 155 libras
- mas de 185 libras
- 128 libras

DESARROLLO

$$m = 151 \quad s = 15$$

a)

$$Z_1 = \frac{120 - 151}{15} = -2.07 \quad \rightarrow \quad A_1 = 0.4808$$

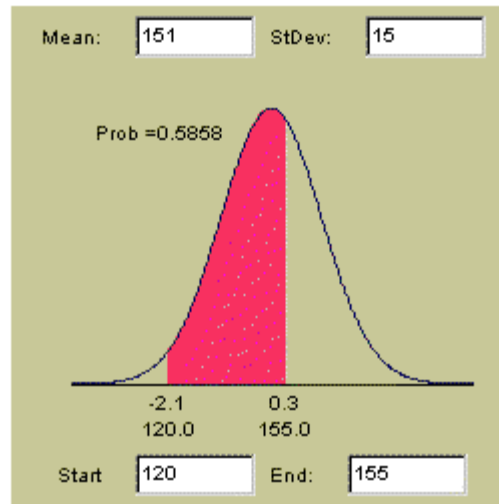
$$Z_2 = \frac{155 - 151}{15} = 0.27 \quad \rightarrow \quad A_2 = 0.1064$$

$$A_p = A_1 + A_2 = 0.4808 + 0.1064 = 0.5872 = p(120 < x < 155)$$

El numero de estudiante es igual a

$$E = np(120 < x < 155) = (500)(0.5872) = 293.6 \approx 294$$

Probabilities for the Normal Distribution



b)

$$Z_1 = \frac{185 - 151}{15} = 2.27 \quad \rightarrow \quad A_1 = 0.4884$$

$$A_p = 0.5 - A_1 = 0.5 - 0.4884 = 0.0116 = p(x > 185)$$

El numero de estudiante es igual a

$$E = np(x > 185) = (500)(0.0116) = 5.8 \cong 6$$

c)

$$Z_1 = \frac{127.5 - 151}{15} = -1.57 \quad \rightarrow \quad A_1 = 0.4418$$

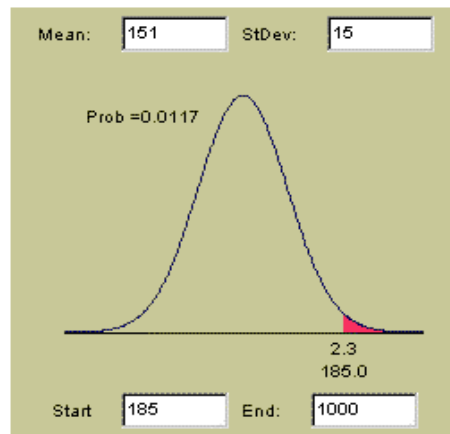
$$Z_2 = \frac{128.5 - 151}{15} = -1.50 \quad \rightarrow \quad A_2 = 0.4332$$

$$A_p = A_1 - A_2 = 0.4418 - 0.4332 = 0.0086 = p(127.5 < x < 128.5)$$

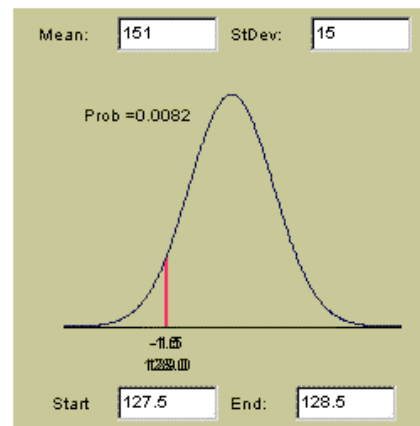
El numero de estudiante es igual a

$$E = np(127.5 < x < 128.5) = (500)(0.0086) = 4.3 \cong 4$$

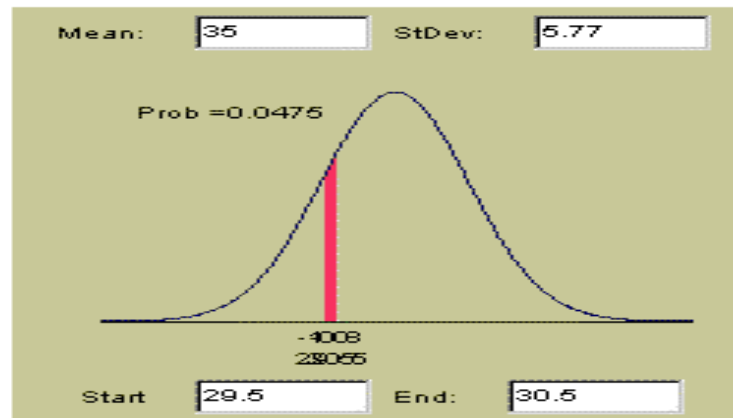
Probabilities for the Normal Distribution



Probabilities for the Normal Distribution

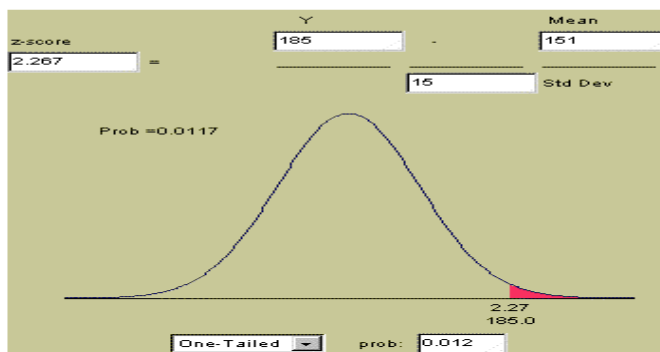


Probabilities for the Normal Distribution



Working with z-scores and Normal Probabilities

This applet converts between raw scores and z-scores with a display of various areas of probability.



[Return to Seeing Statistics Normal Probability Examples](#)

How-To:

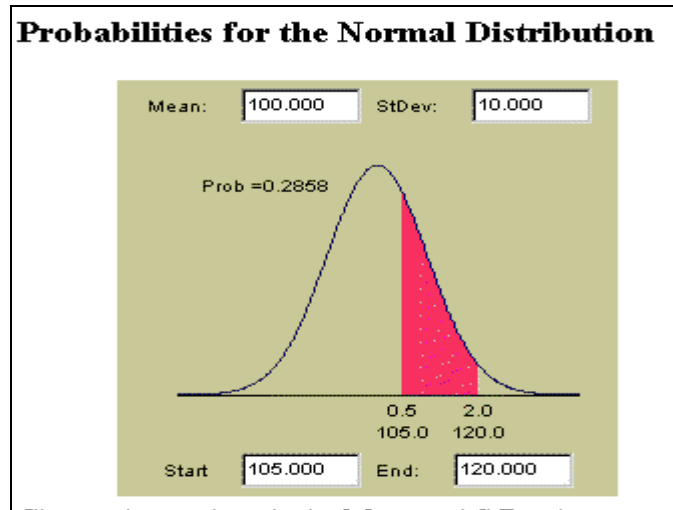
Use this graph to calculate z-scores and to see the corresponding probabilities. Any number can be changed, but the change will not be effective until you press the return key while in one of the boxes. You may also change the portion of the normal distribution selected:

- Cumulative--from minus infinity to the z-score
- One-Tailed--from the z-score to positive infinity
- Two-Tailed--absolute scores more extreme (i.e., further from the middle) than the z-score
- Middle--absolute scores less extreme (i.e., closer to the middle) than the z-score

EJEMPLO 3

En cierto negocio de construcción el salario promedio semanal es de \$ 100.000 y la desviación estándar de \$ 10.000. Si se supone que los salarios tienen una distribución normal . Cual es el porcentaje de obrero que recibe salarios entre \$ 120.000 y \$ 105.000?

DESARROLLO



$$m = 100.000 \quad s = 10.000$$

$$Z_1 = \frac{120.000 - 100.000}{10.000} = 2.0 \quad \rightarrow \quad A_1 = 0.4772$$

$$Z_2 = \frac{105.000 - 100.000}{10.000} = 0.5 \quad \rightarrow \quad A_2 = 0.1915$$

$$A_p = A_1 - A_2 = 0.4772 - 0.1915 = 0.2857$$

$$p(105 < x < 120) = 0.2857$$

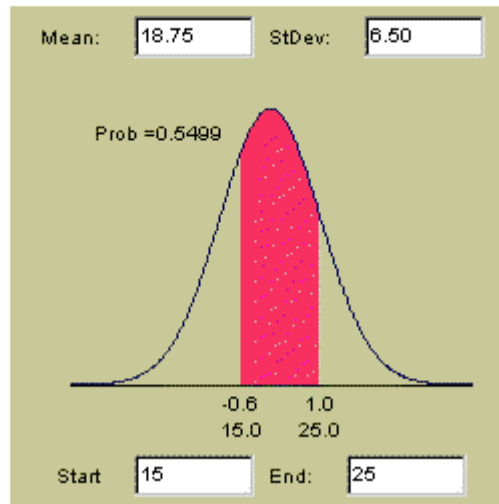
El porcentaje de obreros es del 28.57%

EJEMPLO 4

la lluvia estacional promedio en un pueblo es de 18.75 pulgadas con una desviación estándar de 6.5 pulgadas. se supone que la lluvia estacional tiene una distribución normal . En cuantos años de un periodo de 30 se podrá esperar una lluvia de 15 a 25 pulgadas?

DESARROLLO

Probabilities for the Normal Distribution



$$m = 18.75 \quad s = 6.5$$

$$Z_1 = \frac{15 - 18.75}{6.5} = -0.58 \quad \rightarrow \quad A_1 = 0.2190$$

$$Z_2 = \frac{25 - 18.75}{6.5} = 0.96 \quad \rightarrow \quad A_2 = 0.3315$$

$$A_p = A_1 + A_2 = 0.2190 + 0.3315 = 0.5505$$

$$p(105 < x < 120) = 0.5505$$

$$E = np(105 < x < 120) = (30)(0.5505) = 16.52 \text{ años}$$

EJEMPLO 5

Cierta empresa de servicios telefónicos para ejecutivos en el área metropolitana de Bogotá, ha encontrado que el mensaje telefónico promedio es de 160 segundos con una desviación estándar de 20 segundos. Si la duración de los mensajes es una variable que sigue una distribución normal. Calcular las siguientes probabilidades utilizando cualquier applet o programa informático:

- $P(x \geq 185)$
- $P(x \geq 130)$
- $P(x \leq 145)$
- $P(x \leq 170)$
- $P(140 \leq x \leq 175)$
- $P(170 \leq x \leq 200)$
- $P(120 \leq x \leq 150)$
- $P(100 \leq x \leq 240)$

i) $P(125 \leq x \leq 190)$

DESARROLLO

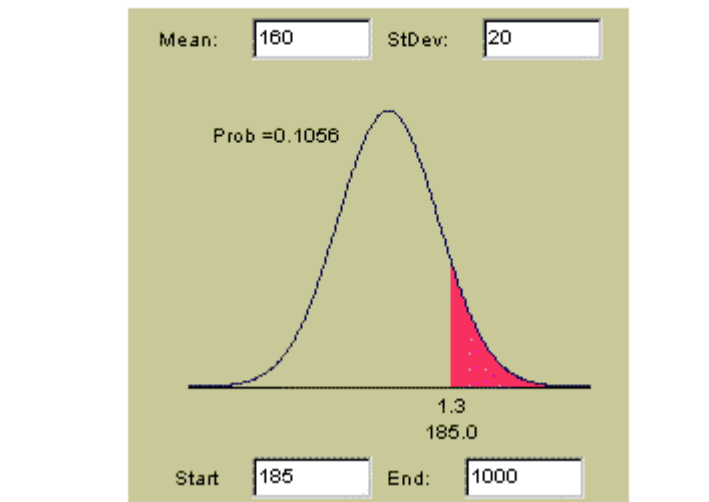
Utilizando el siguiente applet , se calcularon todas las probabilidades pedidas

<http://psych.colorado.edu/~mcclella/java/normal/accurateNormal.html>

WARNING: The graph above gives accurate normal probabilities suitable for educational purposes such as homework problems. It is not intended for and should not be used for any calculations which have any major consequences for health, safety, financial matters, etc.

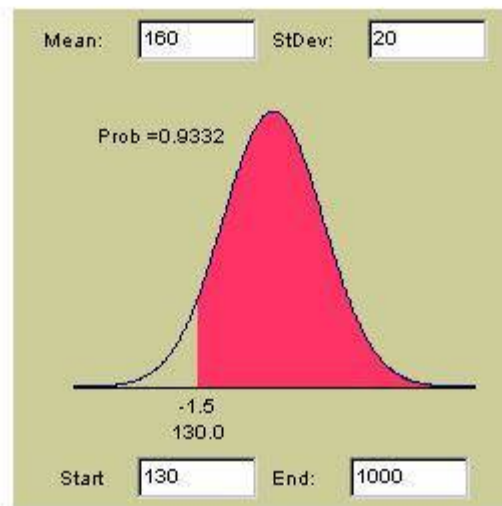
The above applet is from the section "Working with the Normal Distribution" in **Seeing Statistics** by Gary McClelland. For more information, visit [Seeing Statistics](#)

Probabilities for the Normal Distribution



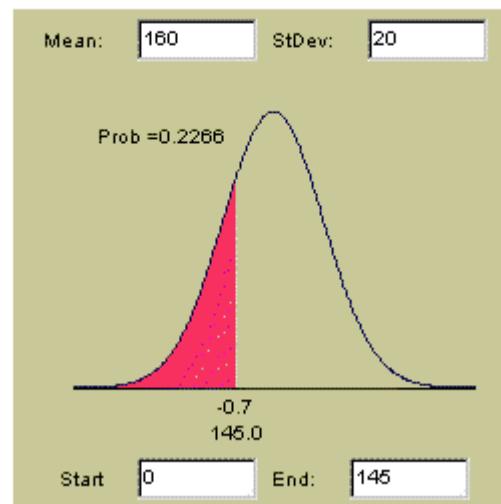
a) $P(x \geq 185) = 0.1056$

Probabilities for the Normal Distribution



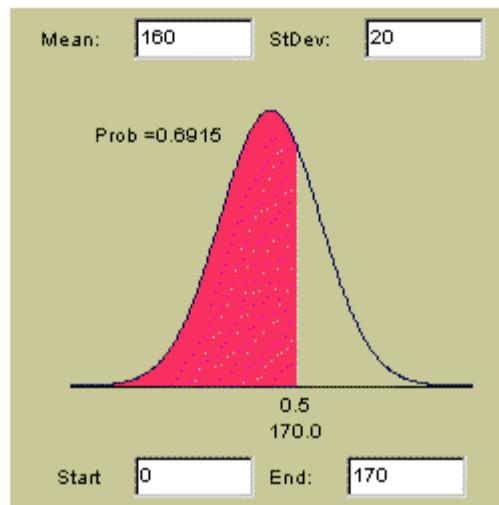
b) $P(x \geq 130) = 0.9332$

Probabilities for the Normal Distribution



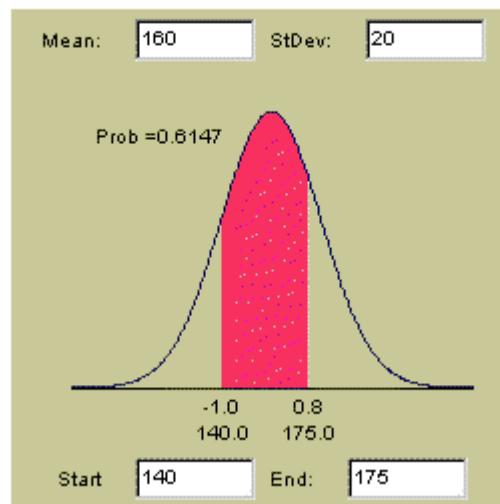
c) $P(x \leq 145) = 0.2266$

Probabilities for the Normal Distribution



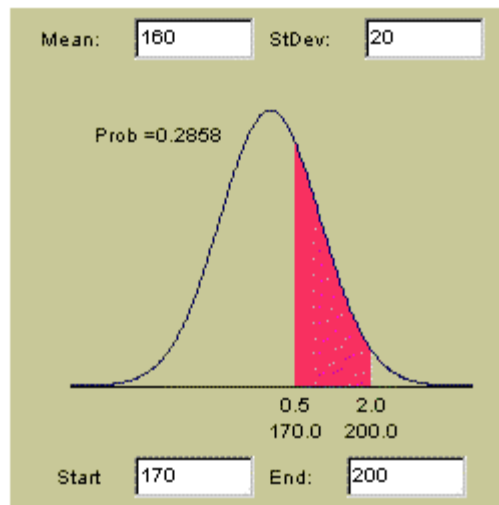
d) $P(x \leq 170) = 0.6915$

Probabilities for the Normal Distribution



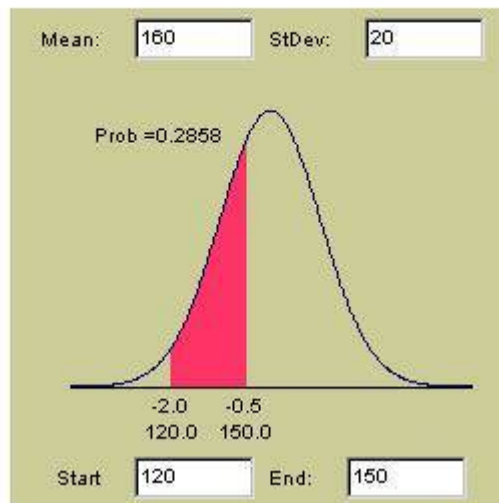
e) $P(140 \leq x \leq 175) = 0.6147$

Probabilities for the Normal Distribution



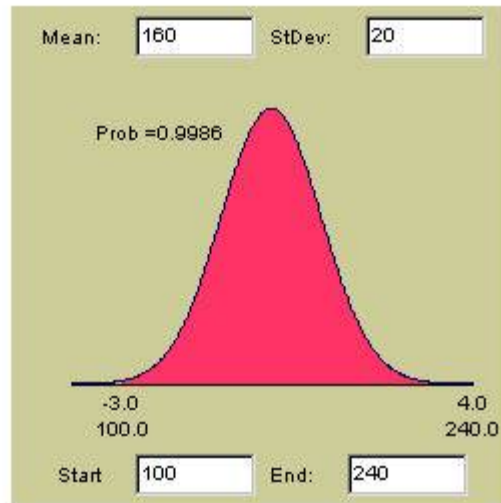
f) $P(170 \leq x \leq 200) = 0.2858$

Probabilities for the Normal Distribution



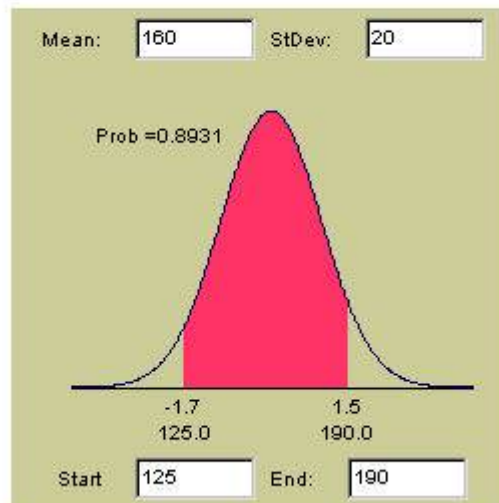
g) $P(120 \leq x \leq 150) = 0.2858$

Probabilities for the Normal Distribution



h) $P(100 \leq x \leq 240) = 0.9986$

Probabilities for the Normal Distribution



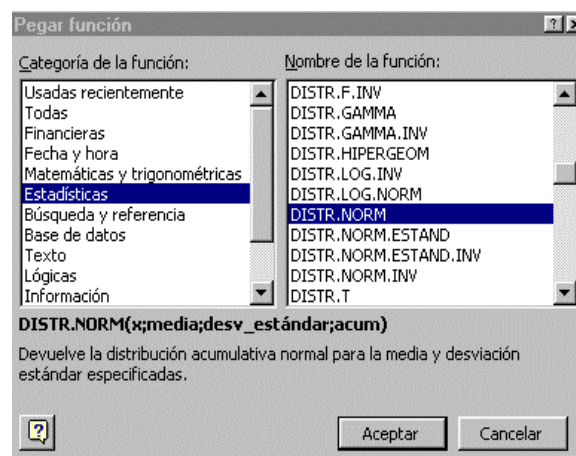
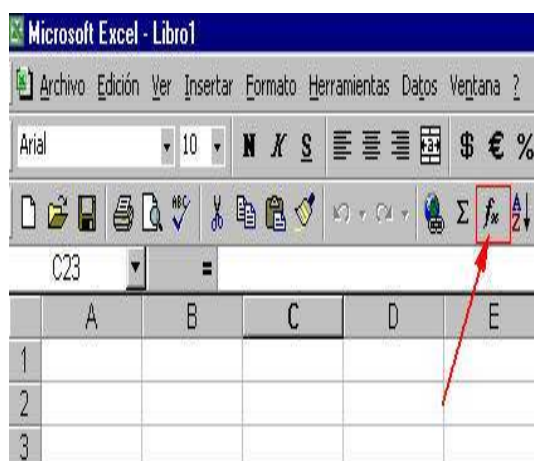
i) $P(125 \leq x \leq 190) = 0.8931$

EJEMPLO 6

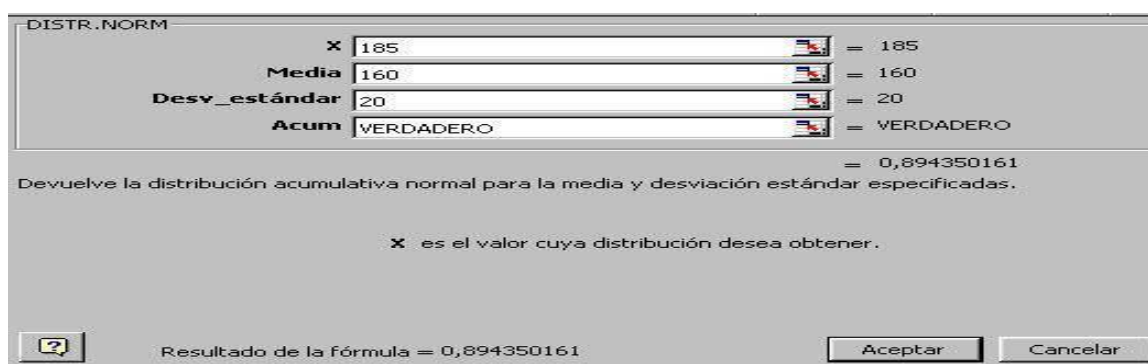
Resolver el ejercicio anterior utilizando Excel

DESARROLLO

Inicialmente nos ubicamos en la ventana de Excel que se muestra en la figura adjunta y pulsamos en icono **fx** y obtenemos la ventana pegar función en donde seleccionamos Estadísticas y obtenemos una gama de funciones, en cual escogemos distribución normal como se puede ver en la figura.



Al pulsar la función se abre una ventana en donde anotamos la información solicitada, le damos aceptar y obtenemos el resultado pedido



$P(X > 185) = 1 - \text{DISTR.NORM}(185;160;20;\text{VERDADERO})$	$= 1 - C1$	0,89435016	0,105649839
---	------------	------------	-------------

DISTR.NORM

X 130 = 130

Media 160 = 160

Desv_estándar 20 = 20

Acum VERDADERO = VERDADERO

= 0,066807229

Devuelve la distribución acumulativa normal para la media y desviación estándar especificadas.

X es el valor cuya distribución desea obtener.

Resultado de la fórmula = 0,066807229

Aceptar Cancelar

$P(X > 130) = 1 - \text{DISTR.NORM}(130;160;20;\text{VERDADERO})$	= 1 - C2	0,06680723	0,933192771
---	----------	------------	-------------

DISTR.NORM

X 145 = 145

Media 160 = 160

Desv_estándar 20 = 20

Acum VERDADERO = VERDADERO

= 0,22662728

Devuelve la distribución acumulativa normal para la media y desviación estándar especificadas.

X es el valor cuya distribución desea obtener.

$P(X < 145) = \text{DISTR.NORM}(145;160;20;\text{VERDADERO})$	= C2	0,22662728	0,22662728
---	------	------------	------------

DISTR.NORM

X 170 = 170

Media 160 = 160

Desv_estándar 20 = 20

Acum VERDADERO = VERDADERO

= 0,691462467

Devuelve la distribución acumulativa normal para la media y desviación estándar especificadas.

X es el valor cuya distribución desea obtener.

$P(X < 170) = \text{DISTR.NORM}(170;160;20;\text{VERDADERO})$	C2	0,69146247	0,691462467
---	----	------------	-------------

DISTR.NORM

X	140	= 140
Media	160	= 160
Desv_estándar	20	= 20
Acum	VERDADERO	= VERDADERO

= 0,15865526

Devuelve la distribución acumulativa normal para la media y desviación estándar especificadas.

X es el valor cuya distribución desea obtener.

Resultado de la fórmula = 0,614717461

Aceptar

$P(140 < X < 175) = \text{DISTR.NORM}(175;160;20;\text{VERDADERO}) - \text{DISTR.NORM}(140;160;20;\text{VERDADERO}) = 0,614717461$

DISTR.NORM

X	170	= 170
Media	160	= 160
Desv_estándar	20	= 20
Acum	VERDADERO	= VERDADERO

= 0,6914624

Devuelve la distribución acumulativa normal para la media y desviación estándar especificadas.

X es el valor cuya distribución desea obtener.

Resultado de la fórmula = 0,285787471

Aceptar

$P(170 < X < 200) = \text{DISTR.NORM}(200;160;20;\text{VERDADERO}) - \text{DISTR.NORM}(170;160;20;\text{VERDADERO}) = 0,285787471$

DISTR.NORM

X	120	= 120
Media	160	= 160
Desv_estándar	20	= 20
Acum	VERDADERO	= VERDADERO

= 0,022750062

Devuelve la distribución acumulativa normal para la media y desviación estándar especificadas.

X es el valor cuya distribución desea obtener.

Resultado de la fórmula = 0,285787471

Aceptar

$P(120 < X < 150) = \text{DISTR.NORM}(200;150;20;\text{VERDADERO}) - \text{DISTR.NORM}(120;160;20;\text{VERDADERO}) = 0,285787471$

DISTR.NORM

X: 100 = 100

Media: 160 = 160

Desv_estándar: 20 = 20

Acum: VERDADERO = VERDADERO

= 0,001349967

Devuelve la distribución acumulativa normal para la media y desviación estándar especificadas.

X es el valor cuya distribución desea obtener.

Resultado de la fórmula = 0,998618347

Aceptar

$P(100 < X < 240) = \text{DISTR.NORM}(240;160;20;\text{VERDADERO}) - \text{DISTR.NORM}(100;160;20;\text{VERDADERO}) = 0,998618347$

DISTR.NORM

X: 125 = 125

Media: 160 = 160

Desv_estándar: 20 = 20

Acum: VERDADERO = VERDADERO

= 0,040059114

Devuelve la distribución acumulativa normal para la media y desviación estándar especificadas.

X es el valor cuya distribución desea obtener.

Resultado de la fórmula = 0,893133658

Aceptar

$P(125 < X < 190) = \text{DISTR.NORM}(190;160;20;\text{VERDADERO}) - \text{DISTR.NORM}(125;160;20;\text{VERDADERO}) = 0,893133658$

TABLA DE CALCULO

SINTAXIS DE LOS CALCULOS REALIZADOS EN EL EJEMPLO POR EXCEL

A)	$P(X > 185) = 1 - \text{DISTR.NORM}(185;160;20;\text{VERDADERO})$	= 1 - C1	0,89435016	0,105649839
B)	$P(X > 130) = 1 - \text{DISTR.NORM}(130;160;20;\text{VERDADERO})$	= 1 - C2	0,06680723	0,933192771
C)	$P(X < 145) = \text{DISTR.NORM}(145;160;20;\text{VERDADERO})$	= C2	0,22662728	0,22662728
D)	$P(X < 170) = \text{DISTR.NORM}(170;160;20;\text{VERDADERO})$	= C2	0,69146247	0,69146247
E)	$P(140 < X < 175) = \text{DISTR.NORM}(175;160;20;\text{VERDADERO}) - \text{DISTR.NORM}(140;160;20;\text{VERDADERO})$			

			0,61471746	0,614717461
F)	$P(170 < X < 200) = \text{DISTR.NORM}(200;160;20;\text{VERDADERO}) -- \text{DISTR.NORM}(170;160;20;\text{VERDADERO})$			
			0,28578747	0,285787471
G)	$P(120 < X < 150) = \text{DISTR.NORM}(200;150;20;\text{VERDADERO}) -- \text{DISTR.NORM}(120;160;20;\text{VERDADERO})$			
			0,28578747	0,285787471
H)	$P(100 < X < 240) = \text{DISTR.NORM}(240;160;20;\text{VERDADERO}) -- \text{DISTR.NORM}(100;160;20;\text{VERDADERO})$			
			0,99861835	0,998618347
I)	$P(125 < X < 190) = \text{DISTR.NORM}(190;160;20;\text{VERDADERO}) -- \text{DISTR.NORM}(125;160;20;\text{VERDADERO})$			
			0,89313366	0,893133658

4.3 CALCULO DE UN VALOR DE X A PARTIR DE UNA PROBABILIDAD CONOCIDA

En los ejemplos iniciales hemos encontrado el valor de Z a partir de los valores de la media , la desviación estándar y el valor de x , y con el valor de Z calculado ya sea utilizando las tablas o cualquier applet encontrábamos el valor del área pedida o probabilidad . A veces es frecuente, conociendo el valor de la probabilidad , hallar el valor de x que da lugar a dicha probabilidad. Este valor lo podemos hallar utilizando cualquier applet como se indica mas abajo o utilizando el antiguo método de despejar x de la formula de Z después de haber hallado dicho valor para la probabilidad dada.

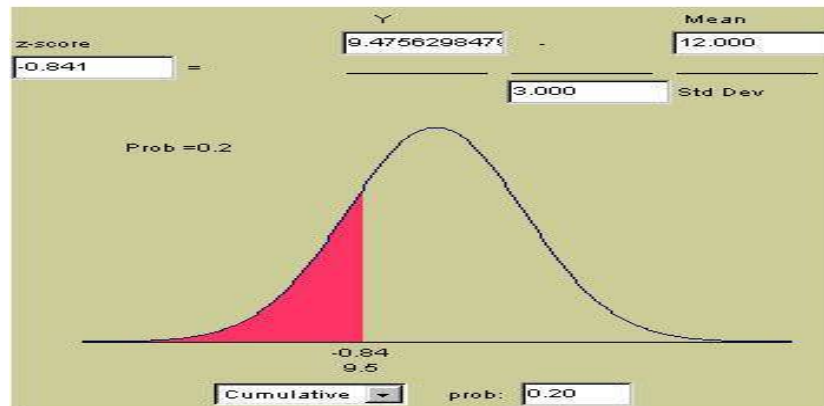
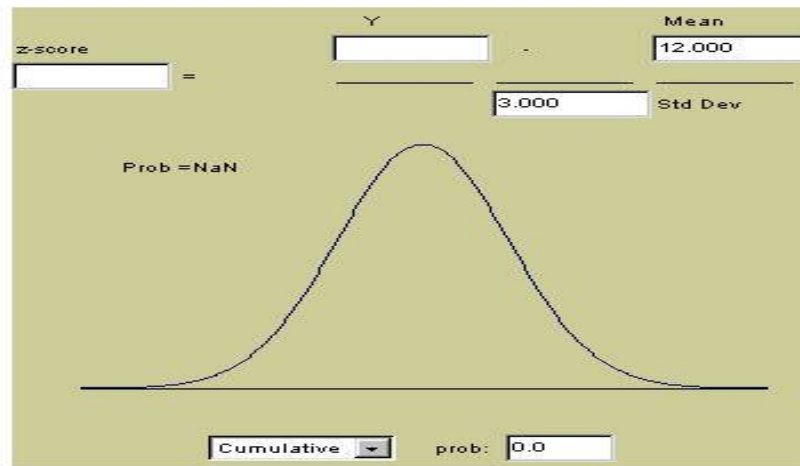
EJEMPLO 6

Los asesores económicos del presidente de cierto país , proponen un programa de bienestar social para ayudar a los desempleados , que consiste en un auxilio monetario para el 20% de las personas mas pobres de la nación. Se sabe que la renta media personal disponible es de 12.000 dólares para el año 1990 con una desviación estándar de 3000 dólares Hallar el nivel de ingresos que separa el 20% inferior del 80% superior si los ingresos siguen una distribución normal?

DESARROLLO

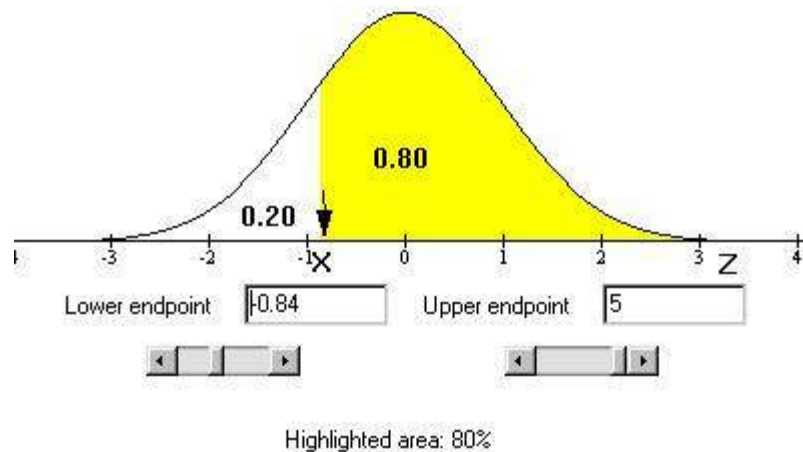
<http://psych.colorado.edu/~mccllella/java/normal/normz.html> Working with z-scores and Normal Probabilities .This applet converts between raw scores and z-scores with a display of various areas of probability

Como se puede ver en los gráficos solo basta llenar las casillas con los datos conocidos y finalmente clicar en cualquiera de los valore anotados e inmediatamente el applet nos calcula el resto de valores , de donde se puede observar que el valor de x (y en este applet) corresponde a 9.476 dólares , lo que implica que cualquier persona con ingresos iguales o menores que el valor encontrado recibirá un auxilio del gobierno.



otra forma de resolver el ejercicio es por medio del método antiguo , como se muestra aquí:

Standard Normal Curve



Para una área del 20% inferior encontramos un valor de $Z = -0.84$ que puede buscarse en cualquier tabla obteniéndose así: Como el valor que nos interesa es 0.20, debemos buscar el valor de 0.30 ($0.5 - 0.2$) porque en las tablas solo se indican las áreas desde la media a cualquier valor por encima o por debajo de ella por lo tanto en la tabla buscamos cual es valor de área que más se aproxima a 0.30 y encontramos a 0.2995 que corresponde a un $Z = 0.84$ el cual reemplazamos en la fórmula con signo negativo por estar ubicado a la izquierda

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \rightarrow -0.84 = \frac{X - 12.000}{3.000} \rightarrow X = (-0.84)(3.000) + 12.000 = 9.480$$

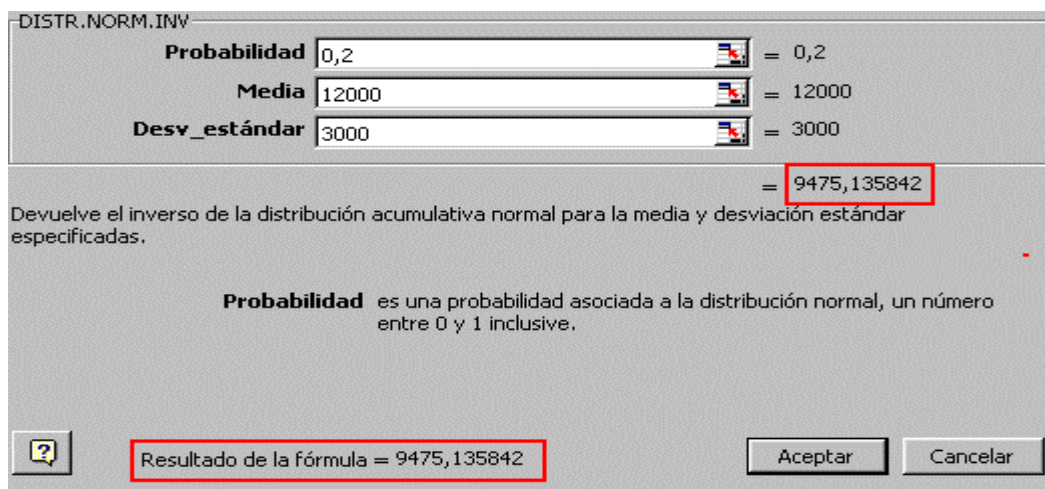
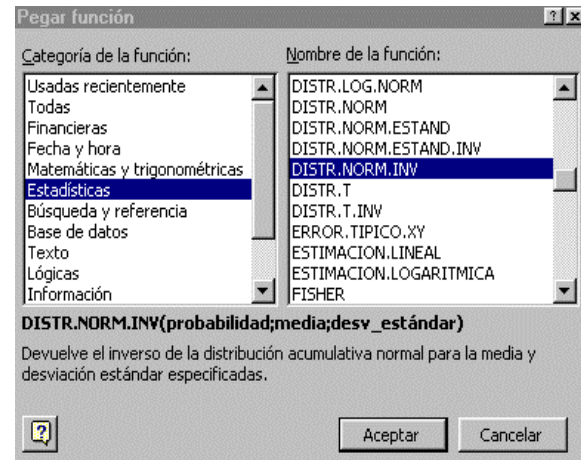
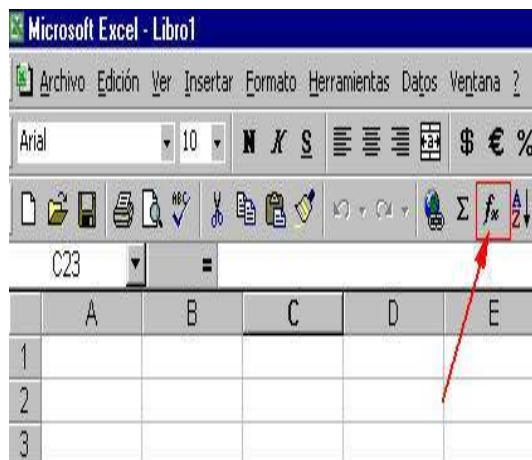
EJEMPLO 7

Resolver el ejemplo anterior utilizando Excel

DESARROLLO

Después de haber abierto ventana de la función a pegar seleccionamos la función, la cual al pulsarla nos conduce a la ventana adjunta en donde se incorporan los valores y se obtiene el valor solicitado al darle aceptar como se puede ver en las figuras

En la ventanilla de probabilidades se coloca el 20% (0.2) y en las otras, la media y la desviación estándar y se obtiene el valor de 9475.13 que es el solicitado. (valor similar al obtenido con el applet y ligeramente inferior al obtenido con la fórmula, debido en este último caso a la aproximaciones al calcular Z).



EJEMPLO 8

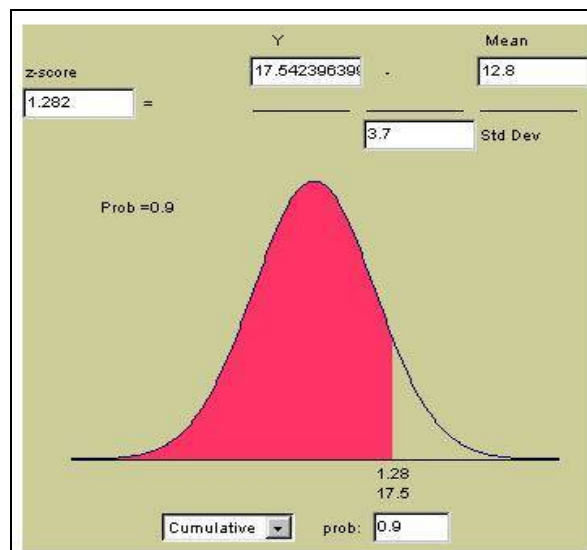
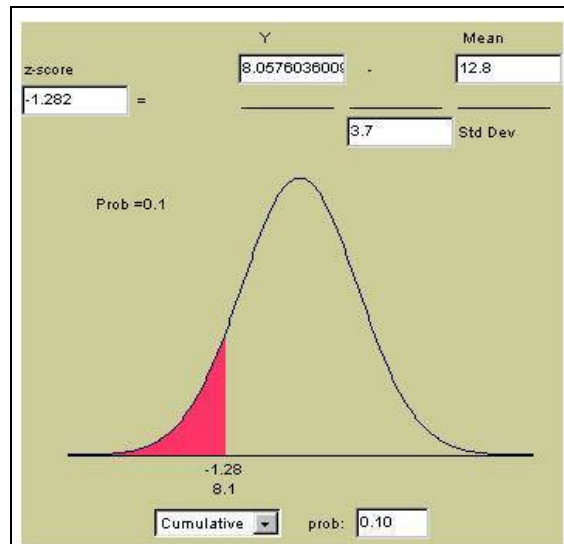
Ley de Prevención de incendios pretende incrementar los esfuerzos por parte de los departamentos locales d bomberos para reducir el tiempo de respuesta a las llamadas de socorro por incendios . Un grupo de expertos trata de determinar cuales son los departamentos de bomberos cuyo tiempo de respuesta esta en el 10% inferior o que tarda mas que el 90% de todos los departamentos de bomberos en estudio. Los del primer grupo servirán de modelo para las unidades menos eficientes del segundo grupo. Los datos indican que los tiempos medios de respuestas de una determinada clase de departamentos de bomberos es de 12.8 minutos, con una desviación estándar de 3.7 minutos. Si suponemos que los tiempos de respuestas siguen una distribución normal , determinar los tiempos?

DESARROLLO

Utilizando el applet (<http://psych.colorado.edu/~mcclella/java/normal/normz.html>) encontramos que solo el 10% de los departamentos de bomberos de esta clasificación respondían a las llamadas de incendio en menos de 8.06 minutos y que estas sirven de

modelo para el 10% de los departamentos que tardan mas de 17.5 minutos en llegar al lugar del incendio.

El valor de **X1** para el 10% inferior es de .06 minutos y de **X2** para el 10% superior es de 17.54 minutos. Como ejercicio compruebe estos valores mediante el método tradicional utilizando la tabla de distribución normal



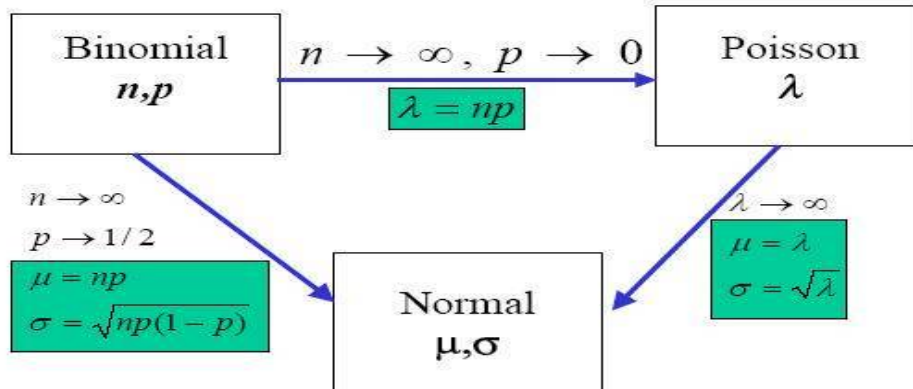
4.4. APROXIMACIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL A LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

La distribución normal proporciona una estimación bastante exacta de la distribución binomial cuando la probabilidad de éxito se aproxima a 0.50 . Cuando

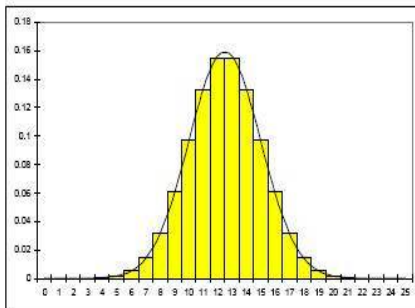
la probabilidad de éxito es pequeña (menor o igual a 0.10) la distribución de Poisson es la adecuada .

Es necesario hacer un pequeño ajuste , denominado factor de corrección de continuidad de media unidad , para mejorar la exactitud , cuando a una distribución discreta se le aplica una distribución continua.

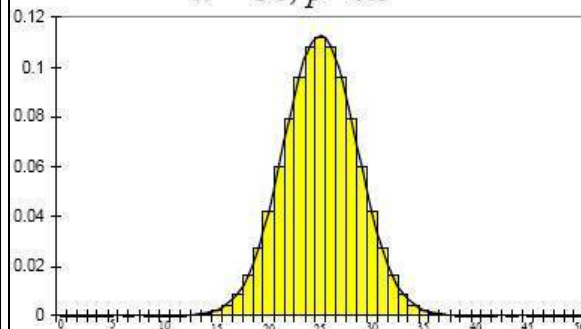
Binomial-Poisson-Normal

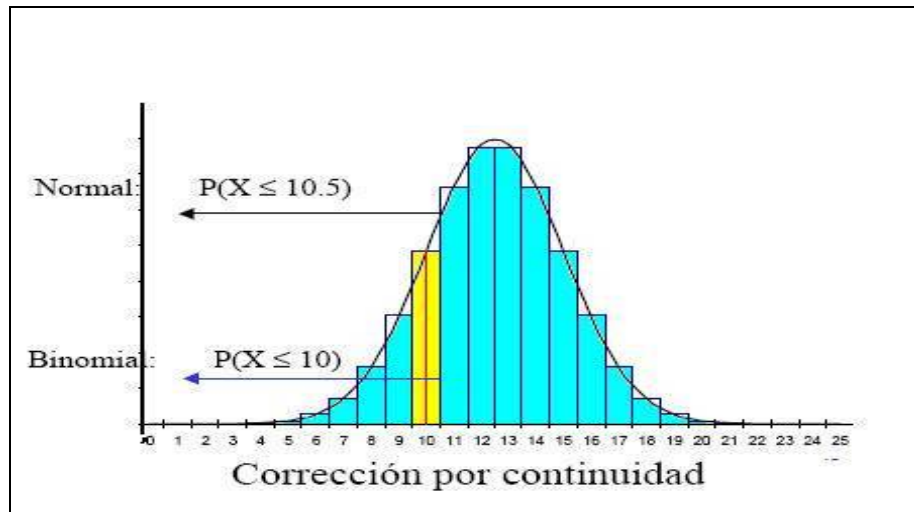


Aproximación Binomial-Normal
 $n=25, p=1/2$

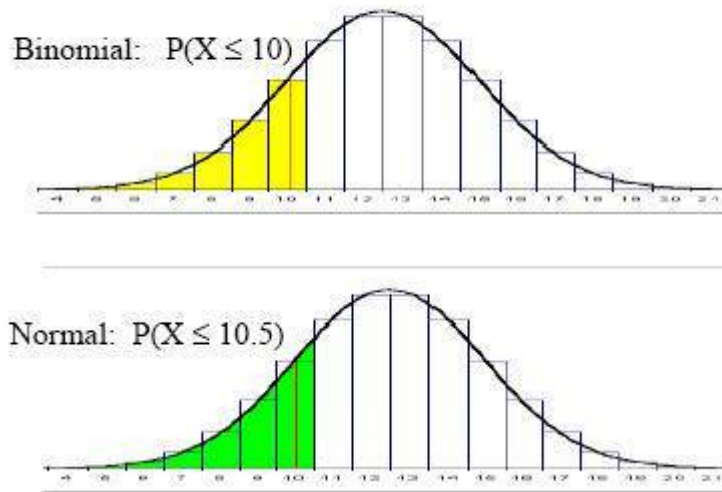


Aproximación de Normal y Binomial
 $n = 50, p=0.5$





Corrección por continuidad



EJEMPLO 8

En un sindicato en el cual el 40% de los afiliados están a favor de una huelga contra la dirección. Se eligen al azar 15 afiliados. ¿Cuál es la probabilidad de que 10 estén a favor de la huelga?

- Resolver el ejemplo utilizando la distribución binomial?
- La distribución normal?

DESARROLLO

a) Utilizando las tablas binomiales encontramos

$$P(x = 10, n = 15, p = 0.40) = 0.0245$$

b) Para utilizar la aproximación normal calculamos la media y la desviación estándar así

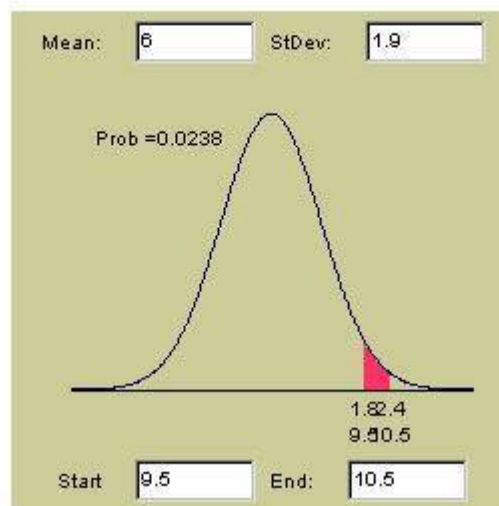
$$\bar{x} = np = (15)(0.40) = 6$$

$$s = \sqrt{npq} = \sqrt{15(0.40)(0.60)} = 1.90$$

Utilizando un applet calculamos lo siguiente.

$P(X = 10) \approx P(9.5 < X < 10.5) = 0.0238$ que es una buena aproximación al valor 0.0245 encontrado en a)

Probabilities for the Normal Distribution

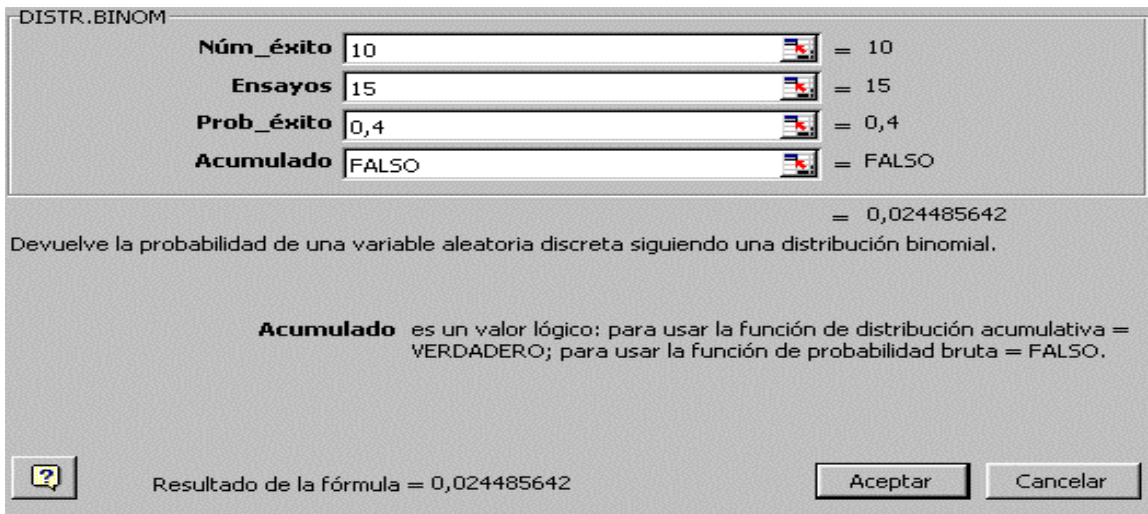
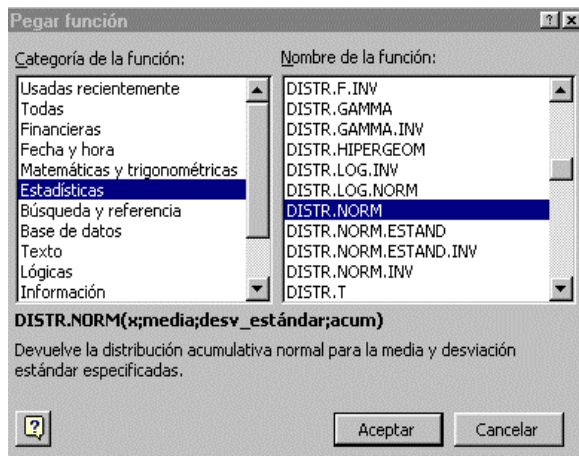
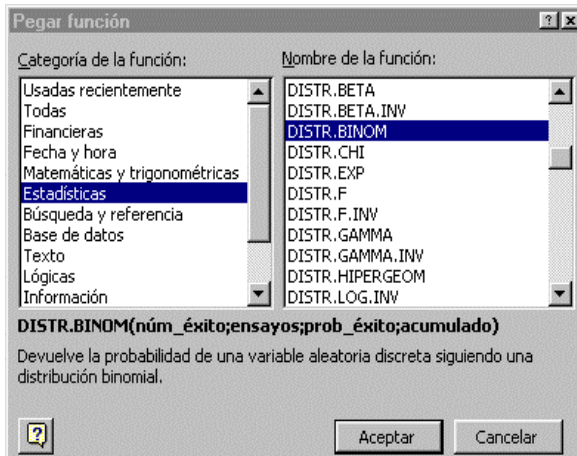


EJEMPLO 9

Resolver el ejercicio anterior usando Excel

DESARROLLO

Al igual que los ejemplos resueltos con Excel, nos ubicamos en la función pegar y a partir de aquí seleccionamos las funciones que necesitamos, para este caso la distribución normal y la distribución binomial, tal como se puede observar en las ventanas e introducimos la información solicitada para obtener los resultados pedidos.



`=DISTR.BINOM(10;15;0,4;falso) = 0,024485642`

$$\hat{\mu} = np = (15)(0.40) = 6$$

$$s = \sqrt{npq} = \sqrt{15(0.40)(0.60)} = 1.90$$

DISTR.NORM

X	9,5	=	9,5
Media	6	=	6
Desv_estándar	1,9	=	1,9
Acum	VERDADERO	=	VERDADERO

= 0,967270183

Devuelve la distribución acumulativa normal para la media y desviación estándar especificadas.

X es el valor cuya distribución desea obtener.

Resultado de la fórmula = 0,023797734

Aceptar

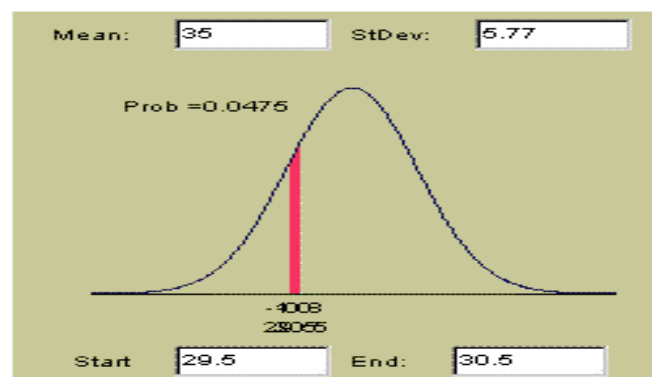
$P(10.5 < X < 9.5) = \text{DISTR.NORM}(10.5;6;1.9;\text{VERDADERO}) - \text{DISTR.NORM}(9.5;6;1.9;\text{VERDADERO}) = 0.023797734$

EJEMPLO 9

La tasa de mortalidad para cierta enfermedad es del es 50 por 1000 . Cual es la probabilidad de que mueran 30 personas por esta enfermedad de un grupo de 700?

DESARROLLO

Probabilities for the Normal Distribution



$$p = \frac{50}{1000} = 0.05 \rightarrow q = 1 - p = 1 - 0.05 = 0.95 \quad n = 700$$

$$m = np = (700)(0.05) = 35$$

$$s = \sqrt{npq} = \sqrt{(700)(0.05)(0.95)} = 5.77$$

$$Z_1 = \frac{29.5 - 35}{5.77} = -0.95 \rightarrow A_1 = 0.3289$$

$$Z_2 = \frac{30.5 - 35}{5.77} = -0.78 \rightarrow A_2 = 0.2823$$

$$A_p = A_1 - A_2 = 0.3289 - 0.2823 = 0.0466$$

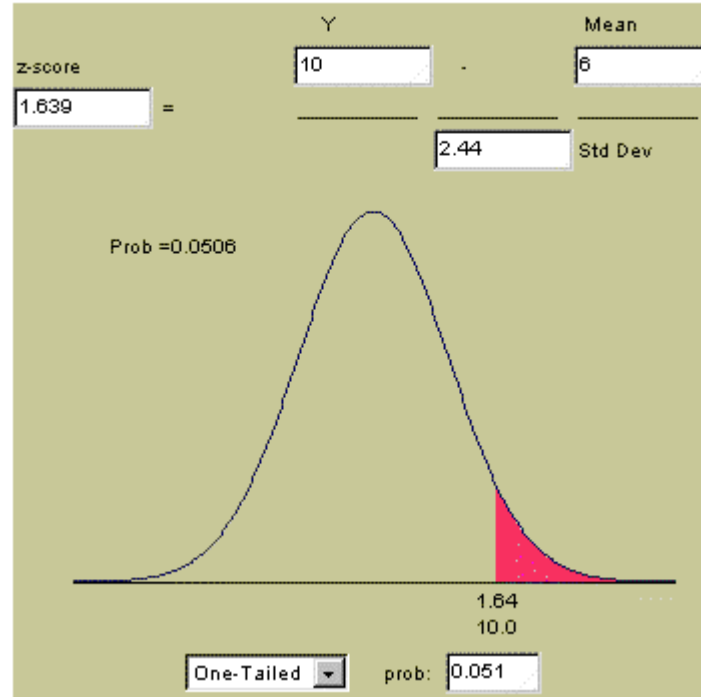
$$p(29.5 < x < 30.5) = 0.0466 = 4.66\%$$

La probabilidad de que mueran 30 personas es del 4.66%

EJEMPLO 10

Una caja contiene 1280 bombillos que tienen un 2% defectuosas . cual es la probabilidad de que una muestra aleatoria de 300 bombillas contenga mas de 10 defectuosas?

DESARROLLO



$$p = 0.02 \rightarrow q = 1 - p = 1 - 0.02 = 0.98 \quad n = 300$$

$$m = np = (300)(0.02) = 6$$

$$s = \sqrt{npq} = \sqrt{(300)(0.02)(0.98)} = 2.42$$

$$Z_1 = \frac{10 - 6}{2.44} = 1.63 \quad \rightarrow \quad A_1 = 0.4484$$

$$A_p = 0.5 - A_1 = 0.5 - 0.4484 = 0.0516$$

$$p(x > 10) = 0.0516 = 5.16\%$$

La probabilidad de que tenga mas de 10 defectuosas es del 5.16%

EJEMPLO 11

El tiempo requerido para instalar un motor nuevo de un avión es una variable aleatoria normalmente distribuida con una media de 20 horas y una desviación estándar de una hora . Cual es la probabilidad de que la instalación dure :

- a) Entre 20 y 21.5 horas?
- b) Entre 18 y 20 horas?
- c) Entre 19 y 22 horas?
- d) Mas de 23 horas?
- e) A lo sumo 16.1 horas?
- f) Entre 21 y 22 horas?
- g) Entre 17 y 18 horas?
- h) A lo sumo 23.7 horas?
- i) Mas de 18.3 horas?

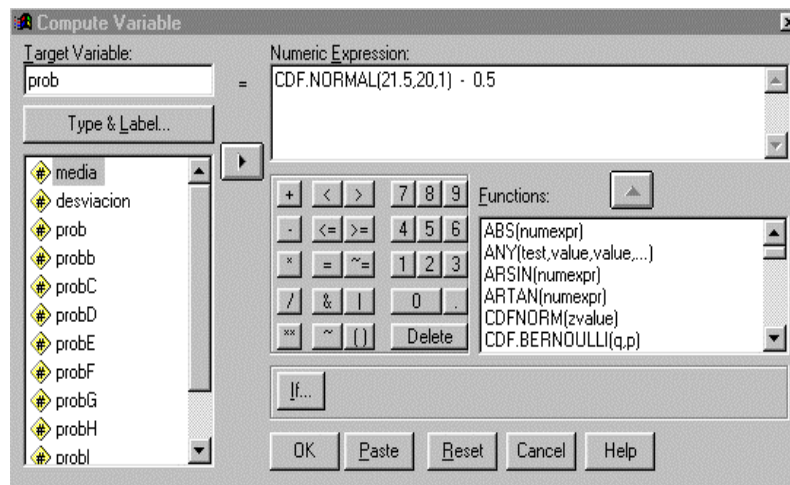
DESARROLLO

Utilizando SPSS se muestran a continuación el proceso seguido para calcular las diferentes probabilidades pedidas las cuales se muestran en siguiente cuadro.

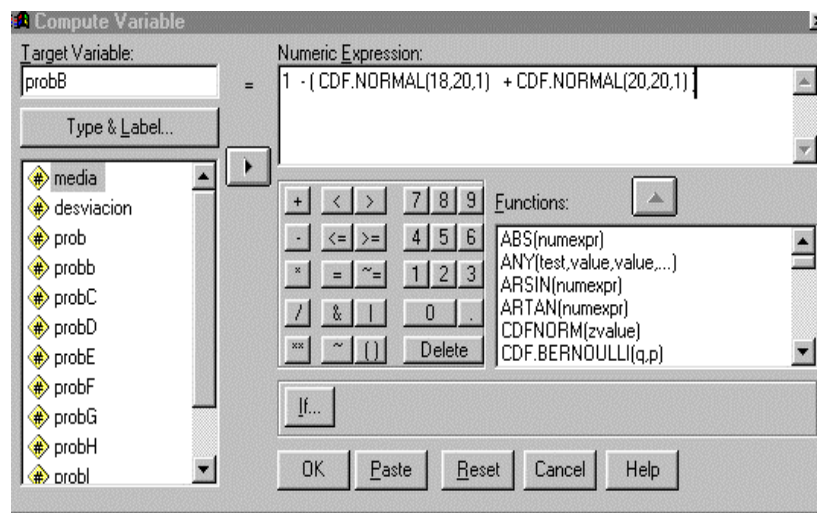
En el editor de datos de SPSS escriba los valores de **media** y **la desviación estandar** luego pulse transformar y se abrirá una ventana donde aparece calcular, haga clic en calcular y aparecerá la ventana **Calcular variable** , busque la función (**CDF.NORMAL(Q,μ, ó)**) y llévela a la ventanilla de expresión numérica, introduzca los datos y pulse aceptar y obtendrá en el editor de datos los valores de probabilidad pedidos, tal como se ve en los cuadros adjuntos.

Untitled - SPSS Data Editor											
File Edit View Data Transform Analyze Graphs Utilities Window Help											
1 : desviacion 1.0											
	media	desviacion	prob	probb	probC	probD	probE	probF	probG	probH	probi
1	20,0	.	,4332	,4772	,8186	,0013	,0000	,1359	,0214	,9999	,9554
2											
3											

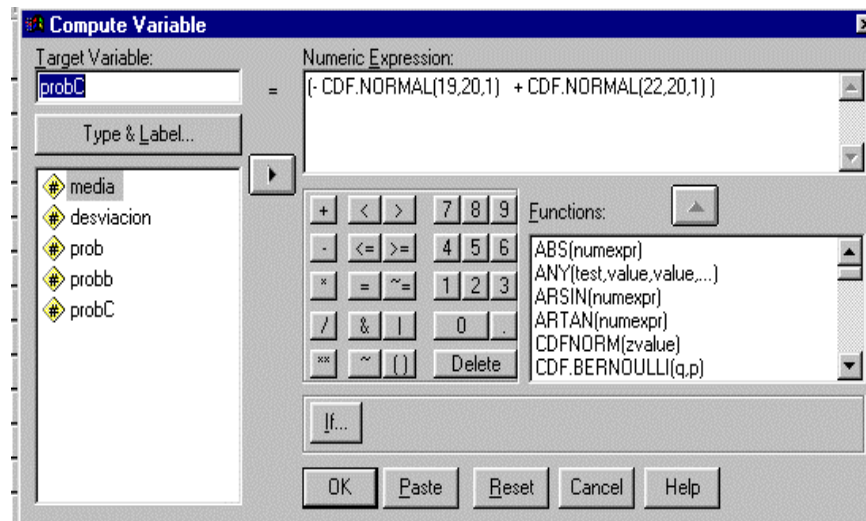
a) $P(20 \leq x \leq 21.5) = 0.4332 = \text{CDF.NORMAL}(21.5, 20, 1) - 0.5$



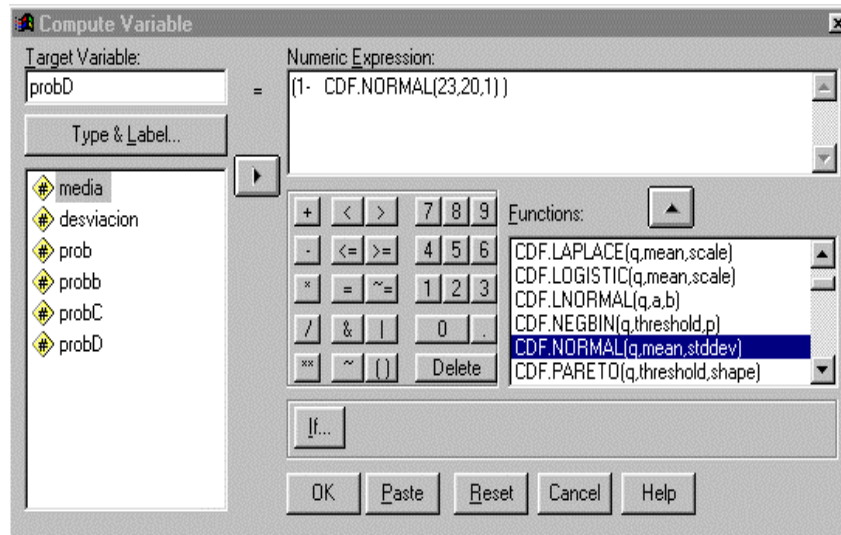
b) $P(18 \leq X \leq 20) = 0.4772 = 1 - (\text{CDF.NORMAL}(18, 20, 1) + \text{CDF.NORMAL}(20, 20, 1))$



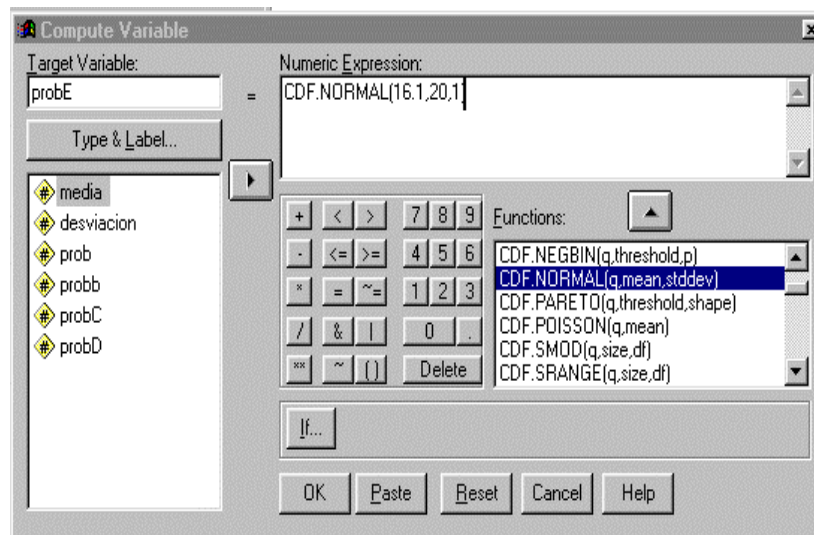
c) $P(19 \leq X \leq 22) = 0.8185 = (- \text{CDF.NORMAL}(19,20,1) + \text{CDF.NORMAL}(22,20,1))$



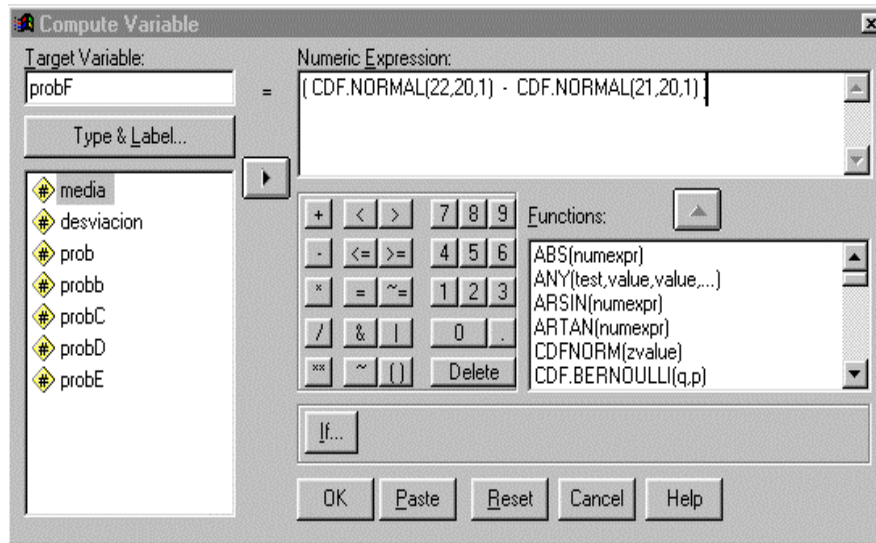
d) $P(x \geq 23) = 0.0014 = (1 - \text{CDF.NORMAL}(23,20,1))$



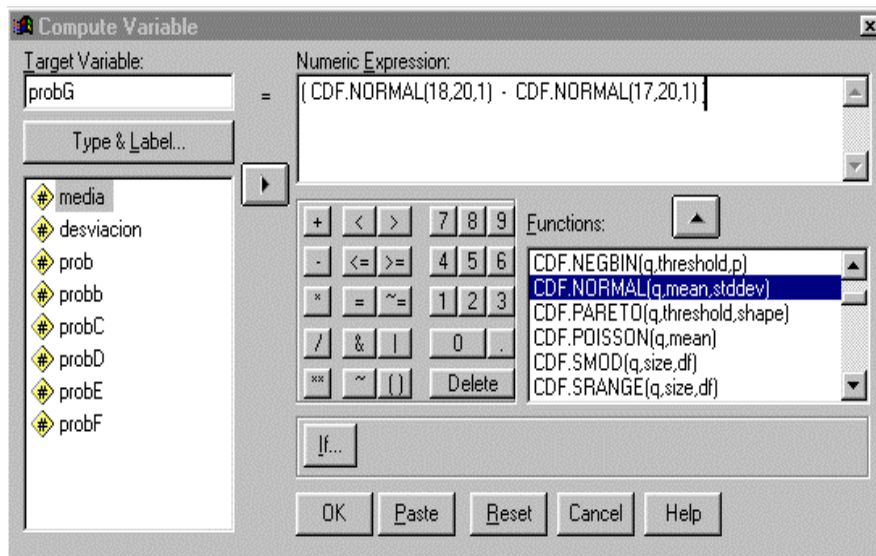
e) $P(x \leq 16.1) = 0.0001 = \text{CDF.NORMAL}(16.1, 20, 1)$



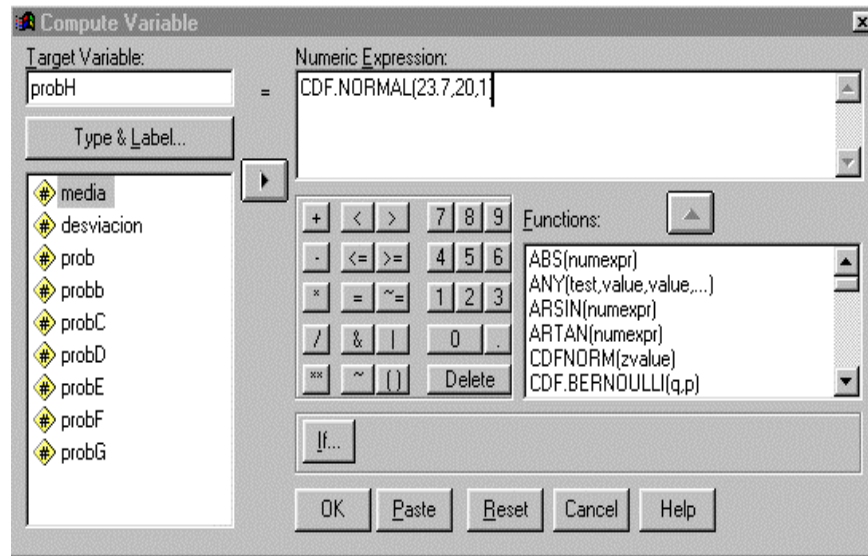
f) $P(21 \leq X \leq 22) = 0.1359 = (\text{CDF.NORMAL}(22, 20, 1) - \text{CDF.NORMAL}(21, 20, 1))$



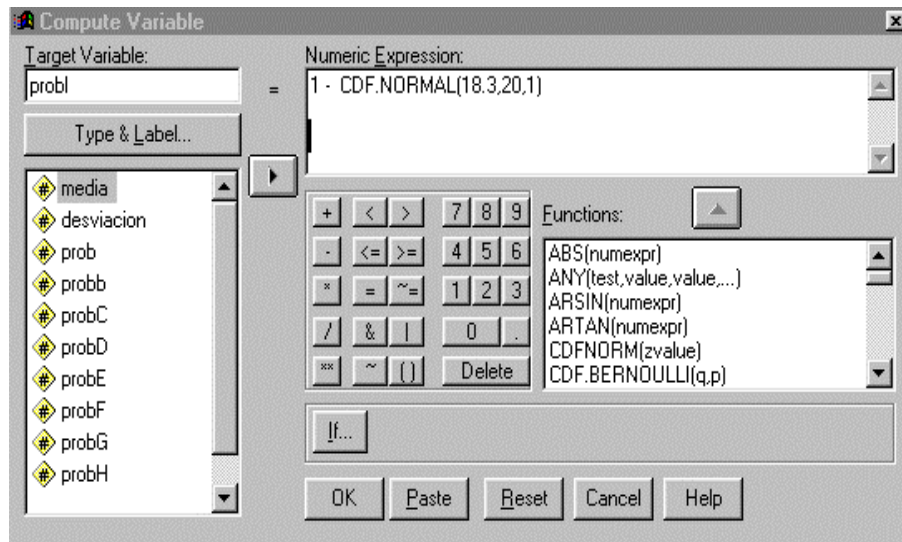
g) $P(17 \leq X \leq 18) = 0.0214 = (CDF.NORMAL(18, 20, 1) - CDF.NORMAL(17, 20, 1))$



h) $P(x \leq 23.7) = 0.9999 = CDF.NORMAL(23.7, 20, 1)$



i) $P(X \geq 18.3) = 0.9554 = 1 - \text{CDF.NORMAL}(18.3, 20, 1)$



Se le pide al estudiante resolver este ejemplo utilizando el método tradicional

TALLER DE DISTRIBUCIÓN NORMAL

SUGERENCIA : Resuelva todos los ejercicios utilizando cualquiera de los multiples applets que se consiguen en internet, o utilice cualquier paquete estadístico (SPSS, SAS, STAGRAPHS, MINITAB, etc) o en su defecto utilice el método antiguo y tradicional a través de las tablas estadísticas.

2. Después de un curado de 28 días , el cemento Pórtland común, tiene una resistencia a la compresión de 4.000 PSI. Suponga que la resistencia a la compresión esta normalmente distribuida con una desviación estándar de 120 PSI. Obtenga la probabilidad respecto a la resistencia a la compresión de 28 días sea :
 - a) menor que 3900 PSI? **R/ 0.2033**
 - b) Mayor que 3850 PSI? **R/ 0.1056**
 - c) Menor que 3850 PSI? **R/ 0.8944**
 - d) Mayor que 3880 PSI? **R/ 0.8413**
3. Si X sigue una distribución normal con una media de 500 y una desviación estándar de 125 Encontrar la probabilidad de que sea:
 - a) $X > 520$? **R/ 0.4364**
 - b) $X < 520$? **R/ 0.5636**
 - c) $440 < X < 530$? **R/ 0.2792**
 - d) $480 < X < 490$? **R/ 0.0317**
4. Un fabricante de hierro forjado afirma que su producto tiene una resistencia a la tensión casi normal ,con una media de 50.000 PSI y una varianza de 810.000 PSI cuadrados . Si esta aseveración es verdadera , que porcentaje de las mediciones muestrales sería :
 - a) mayor que 50.000 PSI? **R/ 0.5000**
 - b) Menor que 49.550 PSI? **R/ 0.3085**
 - c) Mayor que ± 1350 PSI de 50.000 PSI? **R/ 0.1336**
5. El peso de los pescados atrapados por un barco es aproximadamente normal ,con un media de 4.5 kilogramos y una desviación estándar de 0.5 kilogramos :
 - a) Que porcentaje de los peces pesaran menos de 4 kilogramos? **R/ 0.1587**
 - b) Que porcentaje de los pescados será inferior en un kilogramo del peso promedio? **R/ 0.9544**
 - c) Si se eligen 2 pescados , cual es la probabilidad de que pese menos que la media? **R/ 0.500**
 - d) Cual es la probabilidad de que 2 pescados pesen menos que la media? **R/ 0.2500**
6. **El tiempo requerido por un cajero para pagar un cheque, representa una variable aleatoria normalmente distribuida con una media de 30 segundo y una desviación estándar de 10 segundos. Calcular los tiempos que representan :**
 - a) El percentil décimo? **R/ $X = 17.2$ segundos**
 - b) El percentil 75? **R/ $X = 36.7$ segundos**
7. La prueba del cociente de inteligencia (IQ) de Stanford – Binet tiene una media de 100 con una desviación estándar de 16. Suponiendo que los IQ y los puntajes son variables aleatorias distribuidas normalmente. Cual es la probabilidad de que una persona escogida al azar alcance una puntuación de por lo menos 140 puntos? **R/ 0.0062**

8. Una empresa aplica una prueba a todos sus empleados; con una puntuación media de 500 y una desviación estándar de 100 . Asumiendo que la puntuación de la prueba y los tiempos para terminarla son variables aleatorias normalmente distribuidas: Si los trabajadores con el 25% de puntuación mas alta han de recibir capacitación especial :
 - a) Cual es la puntuación mas baja aceptable para entrar en el programa de capacitación? **R/ $X = 567.4$ puntos**
 - b) Además si el tiempo promedio requerido para terminar la prueba es de 60 minutos con una desviación estándar de 12. Cuando debe terminarse el examen de modo que el 95% de los trabajadores hayan terminado toda la prueba? **$X = 79.74$ minutos**
9. El rendimiento de los automóviles en millas por galón (MPG) de combustible en zonas urbanas tiene una media de 25.9 y una desviación estándar de 2.45. Si un fabricante de automóviles desea construir un auto cuyo rendimiento en MPG sea mejor que el 99% de los carros existentes . Cual debe ser el rendimiento en MPG del auto nuevo? (Asuma que el rendimiento es una variable aleatoria normalmente distribuida.? **$X = 31.6$ MPG**
10. La duración de una batería almacenada en un estante tiene una media de 525 días y una desviación estándar de 50 días . Si la batería ha estado en el estante durante 647 días . (Cual es la probabilidad de que ya no sirva?. Asuma que la duración de la batería es una variable normalmente distribuida.)?
11. El tiempo requerido para instalar un motor nuevo de un avión es una variable aleatoria normalmente distribuida con una media de 20 horas y una desviación estándar de una hora . Cual es la probabilidad de que la instalación dure :
 - a) Entre 20 y 21.5 horas? **R/ 0.4332 CDF.NORMAL(21.5,20,1) - 0.5**
 - b) Entre 18 y 20 horas? **R/ 0.4772**
 - c) Entre 19 y 22 horas? **R/ 0.8185**
 - d) Mas de 23 horas? **R/ 0.0014**
 - e) A lo sumo 16.1 horas? **R/ 0.0001**
 - f) Entre 21 y 22 horas? **R/ 0.1359**
 - g) Entre 17 y 18 horas? **R/ 0.0214**
 - h) A lo sumo 23.7 horas? **R/ 0.9999**
 - i) Mas de 18.3 horas? **R/ 0.9554**
12. El numero semanal de cheques autorizados por un banco es una variable aleatoria normalmente distribuida con una media de 122.000 cheques autorizados y una desviación estándar de 10.000 cheque . En que proporción de semanas tendrá que autorizar el banco mas de 140.000 cheques? **R/ 0.0359 semanas (4%)**
13. La dirección de carreteras de cuotas de un estado se encuentra con que su ingreso anual por cuotas esta normalmente distribuido con una media de 700.000 dólares y una desviación de 50.000 dólares. En el ingeniero jefe desea saber :
 - a) La probabilidad de que queden cubiertos los gastos de operación del año próximo que ascienden a 680.000 dólares? **R/ 0.6554**
 - b) L probabilidad de que estos gastos queden cubiertos en los siguientes dos años(suponiendo que el monto del ingreso de un año sea independiente del año anterior)? **R/ 0.4295**

- c) El monto del ingreso en el mejor 25% de los años? R/ $X = 733.720$ dólares
- d) Una maquina hace parte s con longitudes que son normalmente distribuidas con una media de 3 pulgadas y una desviación estándar de 0.15 pulgadas. El intervalo aceptable de longitudes es de 2.87 a 3.10 pulgadas. Que porcentaje de la producción no es aceptable? R/ 0.4436
14. Un inspector de control de calidad prueba la resistencia de cristales para ventana cuya presión de ruptura es una variable aleatoria normalmente distribuida con una media de 80 millas por horas (MPH) de velocidad del viento y una desviación estándar de 7 MPH . Unos 50 cristales se rompieron a velocidades de viento simuladas de 73 MPH y menos . Cuantos resistieron la velocidad del huracán de 100 MPH o mas? R/ $X = 0.66$ vidrios (1 solo vidrio)
15. En una ciudad hay X siquiabras con ingresos normalmente distribuidos y una media de 89.000 dólares con una desviación estándar de 19.000 dólares . Tres siquiabras ganan mas de 127.000 dólares al año. Cuantos siquiabras hay en toda la ciudad? R/ $x = 131.6$ siquiabras
16. Un estudio de 50.000 mineros del carbón muestra que la producción diaria por trabajador es de 17.3 toneladas en promedio . El 89.25% produce 18.1 toneladas o menos . Que porcentaje produce mas de 16? R/ 97.83%
17. Un ganadero encuentra que sus animales ganan 1.5 libras de peso en promedio diariamente con una desviación estándar de 0.3 libras . Si el aumento de peso es una variable aleatoria normalmente distribuida. Cual es la probabilidad de que un animal escogido al azar aumente en un día:
- Menos de una libra? R/ 0.0474
 - Menos de dos libras? R/ 0.9525
 - Mas de 1.4 libras? R/ 0.6293
 - Entre 1.6 y 1.7 libras? R/ 0.1161
18. El gerente de personal ha descubierto que las horas de ausentismo por enfermedad de los empleados tomadas durante una año son una variable normalmente distribuida con una media de 52 horas y una desviación estándar de 10. El considera que las horas tomadas por Antonio (63) y por Brenda (93) son muy poco usuales Esta usted de acuerdo con él? R/ 13.57% de los empleados como Antonio tarda 63 o mas horas. El caso de Brenda es muy raro ya que su probabilidad es 0.0
19. Cada día suben 110.2 turistas extranjeros en promedio , con una desviación estándar de 25.3 en teleférico a Monserrate para visitar al señor de Monserrate y divisar panorámicamente a Bogotá . Los turistas pagan 9.5 dólares por el viaje de ida y vuelta. Cual es la probabilidad de que en un día cualquiera los ingresos:
- sean inferiores a 950 dólares? R/ 0.03446
 - Sean superiores a 1.140 dólares? R/ 0.3483
20. Se sabe que la cantidad de cerveza en una lata de 12 onzas, fabricada por cierta embotelladora , esta bien aproximada mediante una distribución normal , con una media de 12 onzas y una desviación estándar de 0.25 onzas:
- Que porcentaje de latas podrían tener menos de 11.6 onzas? R/ 0.0548
 - Que porcentaje de latas podrían tener menos de 10 onzas? R/

- c) Que porcentaje de latas no variaran en mas de 0.30 onzas respecto a la media? **R/ 0.2206**
- d) Determine la probabilidad de obtener 4 latas que tengan menos de 12 onzas si se elige una muestra aleatoria de 4 latas? **R/**
21. La taberna **Crazy Horse's** ha instalado una maquina automática para la venta de sifón. La maquina puede regularse de modo que la cantidad media de sifón sea la que se desee, sin embargo en cualquier caso esta tendrá una distribución normal con una desviación estándar de 5.9 centímetros cúbicos:
- a) Si el nivel se ajusta a 304.6 centímetros cúbicos, que porcentaje de los vasos contendrán menos de 295.7 centímetros cúbicos? **R/ 0.0655**
- b) A que nivel medio debe ajustarse la maquina para que solo el 2.28% de los vasos contengan menos de 295 centímetros cúbicos? **R/ 306.8**
- c) A que nivel medio debe ajustarse la maquina para que el 84.13% de los vasos contengan menos de 313.46 centímetros cúbicos? **R/ 307.56**
22. duración de las pilas "**Duramás**" están distribuida normalmente con una media de 80 horas y una desviación estándar de 10 horas. El fabricante garantiza que reemplazara cualquier pila que falle antes de cumplirse con la garantía. Cuanto tiempo debe dar de garantía de modo que no mas del 5% de las pilas fallen antes de tiempo? **R/ 63.5 horas**
23. En una fabrica el tiempo para producir un articulo esta distribuido con una media de 50 minutos y una desviación estándar de 5 minutos. Se debe fabricar una partida de 8000 artículos:
- a) Cuantos artículos requerirán de un tiempo de fabricación mayor de 53 minutos? **R/ 2194 artículos**
- b) Cuantos artículos requerirán de un tiempo de fabricación no inferior a los 48 minutos ni superior a los 53 minutos? **R/ 3049 artículos**
- c) El 50% de los artículos requerirán de un tiempo de fabricación entre A y B. Determinar los valores de A y B si ellos son simétricos con respecto al tiempo medio? **R/ A = 46.6 y B = 53.4**
24. Un fabricante de transformadores de corriente, asegura que los aparatos que venden tienen una vida útil media de 80.000 horas y una desviación estándar de 8.000 horas. Suponiendo que la vida útil esta distribuida normalmente:
- a) Cual es la probabilidad de que un transformador dure mas de 96.000 horas?
- b) El 50% de los transformadores duran entre A y B horas. Hallar los valores de A Y B si ellos son simétricos respecto a la media? **R/ A = 74640 y B = 85360**
- c) El fabricante garantiza que reemplazara gratis cualquier transformador cuya duración sea inferior a C. Determinar el valor de C de modo que tenga que reemplazar solo el 1% de los transformadores? **R/ C = 61360**
25. Si de la producción de envases metálicos de una fabrica se sabe que el 1% son defectuosos. Cual es la probabilidad de que en una producción de 1000 envases en un día:
- a) Por lo menos 3 no sean buenos? **R/ 0.9913**
- b) Por lo menos 5 sean defectuosos ? **R/ 0.9599**

26. En un examen practicado a 1500 estudiantes, la calificación promedio fue de 3.6 y la desviación estándar de 0.6 . Si las calificaciones se distribuyen normalmente , Cuantos estudiantes obtuvieron:
- Calificaciones entre 3.5 y 4.0? **R/ 464 estudiantes**
 - Calificaciones entre 2.0 y 3.0? **R/ 232 estudiantes**
 - Calificaciones de 4.0 y mas? **R/ 382 estudiantes**
27. En un examen la nota media fue de 3.5 y la desviación estándar de 0.5. La calificación C corresponde a notas entre 3.05 y 3.95 y hubo 24 alumnos con nota C:
- Cuantos alumnos se examinaron? **R/ E = 38 alumnos**
 - Cuantos perdieron la materia , si para ganarla se requiere de 3.0? **R/ E = 6 alumnos**
28. La cuarta parte de los documentos archivados diariamente por un empleado de un departamento de ventas , se hace equivocadamente . Si en un día se archivan 100 documentos:
- Cual es la probabilidad de que por lo menos 18 sean mal archivados? **R/ 0.9582**
 - Exactamente 16 documentos sean mal archivados? **R/ 0.0107**
 - Exactamente 86 documentos sean correctamente archivados? **R/ 0.0039**
29. Se dice que aproximadamente el 30% de los adultos que viven en Nueva York son accionistas de compañías privadas. Suponiendo que esto es cierto . Determinar las siguientes probabilidades para una muestra aleatoria de neoyorquinos:
- menos de 20 en una muestra de 40 posean acciones? **R/ 0.9952**
 - 12 o mas en una muestra de 50 posean acciones? **R/ 0.2206**
 - 12 o menos en una muestra de 70 posean acciones? **R/ 0.0132**
30. Un fabricante de juguetes considera que el lanzamiento de un nuevo juguete para navidad producirá una venta promedio de 80.000 unidades, además piensa que las ventas están distribuidas normalmente y que existe una probabilidad del 25% de vender mas de 100.000 unidades. Cual es la desviación estándar? **R/ $\sigma = 29850.75$**
31. Si una materia se califica de 0 a 100 y al final del curso se observa que las calificaciones están distribuidas normalmente con una media de 72 y una desviación estándar de 10:
- Si el porcentaje mínimo para aprobar es 60 . Cual es el porcentaje de fracasos? **R/ 0.1151**
 - Si el 80% de los estudiantes de esa materia deben ser aprobados, cual debe ser el porcentaje mínimo aprobatorio? **R/ 63.6**
32. Se ha comprobado que el tiempo necesario para atender a un contribuyente en la **DIAN** esta normalmente distribuido , con una media de 15 minutos y una desviación estándar de 5 minutos . Cual es la probabilidad de que un contribuyente seleccionado al azar:
- Requiera menos de 10 minutos para terminar su diligencia? **R/ 0.1587**
 - Que dure mas de 20 minutos en la ventanilla? **R/ 0.1587**
33. Una fabrica de cemento empaca su producto en bolsas cuyos pesos están distribuidos normalmente con una media de 50 kilogramos y una desviación estándar de 2 kilogramos . Encuentre la probabilidad de sacar una bolsa que contenga:

- a) Por lo menos 51 kilogramos? **R/ 0.3085**
 b) Máximo 51 kilogramos? **R/ 0.6915**
 c) De 49 a 52 kilogramos? **R/ 0.5328**
34. Se sabe que el 85% de los estudiantes de un curso aprueban el semestre. Cual es la probabilidad de que 9 o mas de un total de 50 no aprueben? **R/ 0.3446**
35. El propietario de un restaurante ha determinado que la demanda diaria de pescado en su negocio tiene una distribución normal con una media de 240 kilogramos y una desviación estándar de 23 kilogramos. Que cantidad de pescado debe estar disponible diariamente para que la probabilidad de que se agote la dotación no sea mayor del 2%.? **R/ $X = 287.5$ kilogramos**
36. El gerente de producción de una fabrica de bombillos estima que la vida util del producto esta distribuida normalmente con una media de 5.000 horas . Si además , el gerente estima que hay una probabilidad del 60% que la bombilla dure menos de 5568 hora. :
 a) Cual es el valor de desviación estándar? **R/ $\sigma = 2.272$ horas**
 b) Si en día se producen 20.000 unidades , cuantas esperamos que duren mas de 4.000 horas? **R/ $E = 13.400$ bombillas**
37. En una clínica de los Seguros Sociales se establece que el periodo de hospitalización esta distribuido normalmente con una media de 7.6 días y una desviación estándar de 2.2 días . Cual es la probabilidad de que un individuo que sea internado permanezca?
 a) Por lo menos 4 días? **R/ 0.9495**
 b) Menor o igual a 9 días? **R/ 0.7389**
38. Los ingresos de ciertos grupos económicos se distribuyen normalmente . La clasificación de los grupos económicos de mayor a menor ingreso es la siguiente:

GRUPO	PORCENTAJE(%)
A	8
B	16
C	42
D	20
E	14

Si el grupo C esta comprendido entre 36.500 y 39.500 dólares diarios :

- a) Calcular la media y la desviación estándar? **R/ $\mu = 37598.21$ $\sigma = 2678.57$ dólares**
- b) Si en ese sector se ocupa un total de 25.000 personas cuantas se espera que tengan un ingreso superior a 37.000 dólares diarios? **R/ $E = 400$ personas**
39. Un taller de reparación de televisores a color ,gasta en promedio 45 minutos en el arreglo de un televisor ,con una desviación estándar de 8 minutos . Si la población se distribuye normalmente. Cual es la probabilidad de que en un arreglo de un televisor se gasten mas de 50 minutos? **R/ 0.2643**
40. Cierta trabajo exige una media de 6.2 semanas para su realización con una desviación estándar de 1.5 semanas . Su empresa ha firmado un contrato con un cliente con el cual ha convenido que si el trabajo no se termina en siete semanas ,

ustedes serán demandados por los daños sufridos por el cliente a causa del retraso. Ustedes quieren hacer la operación pero no desean estar expuestos a una probabilidad superior al 30% de ser demandados. Deben aceptar el trabajo? $R/P(\text{demandado}) = 0.2981 < 0.30$. Si debe tomar el trabajo.

41. La producción diaria de una Siderurgia es de 7.300 toneladas promedio con una desviación estándar de 125 toneladas. Por término medio cuántas veces en 100 días rebasará la producción las 7.000 toneladas? $R/ 99.18$ días

REVISTAS ELECTRONICAS

19. [*Journal of Statistics Education*](#). Excelente revista (¡gratuita!) editada por la American Statistical Association sobre educación estadística (a todos los niveles)
20. [Homepage de la American Statistical Association](#). La mayor asociación de estadísticos, editora de *Journal of Agricultural, Biological, and Environmental Statistics*, *Journal of the American Statistical Association*, *Journal of Statistics Education* y *The American Statistician* entre otras revistas.
21. [*Environmental and Ecological Statistics*](#)
22. [*Community Ecology*](#)
23. [*Journal of Agricultural, Biological, and Environmental Statistics*](#)
24. [*Bulletin of the Ecological Society of America*](#) (gratuita; contiene artículos de ecología estadística)
25. [*Journal of Statistical Software*](#) (gratuita)
26. [*InterStat \(Statistics on the Internet\)*](#) (gratuita)
27. [Probability and Statistics Journals on the Web](#)

ESTADISTICA ON LINE

109. [Aula Virtual de Bioestadística, Universidad Complutense](#)
110. [Curso de bioestadística de la Universidad de Málaga](#)
111. [Apuntes de Bioestadística. Unidad de Bioestadística Clínica del Hospital Ramón y Cajal](#)
112. [Lecciones de Estadística, 5campus.org \(análisis multivariante...\)](#)
113. [Curso de Bioestadística de la Universidad Nacional de Misiones \(Argentina\)](#)
114. [Curso de estadística \(para ingenieros\) de una universidad mexicana](#)
115. [Cursos de estadística de la Universidad de California, Los Angeles](#)
116. [Cursos de estadística de la Universidad de Michigan](#)
117. [Electronic Statistics Textbook](#)
118. [A New View of Statistics](#)

- 119. [HyperStat Statistics Textbook](#)
- 120. [Statistics at Square One](#)
- 121. [Statistics Every Writer Should Know](#)
- 122. [Introductory Statistics: Concepts, Models, and Applications](#)
- 123. [Multivariate Statistics: Concepts, Models, and Applications](#)
- 124. [A complete guide to nonlinear regression](#)
- 125. [Ordination Methods for Ecologists](#)
- 126. [Annotated Bibliography of Canonical Correspondence Analysis and related
constrained ordination methods 1986-1993](#)
- 127. [Multivariate Statistics: an Introduction](#)
- 128. [A glossary of ordination-related terms](#)
- 129. [Glossary of Statistical Terms and Medical Citations for Statistical Issues](#)
- 130. [Glossary of over 30 statistical terms](#)
- 131. [EVSC 503 Applied Statistics for the Environmental Sciences](#)
- 132. [<http://s9000.furman.edu/mellonj/spss1.htm>](#)
- 133. [<http://www.indiana.edu/~statmath/stat/spss/win/index.html>](#)
- 134. [<http://www.utexas.edu/cc/stat/tutorials/spss/SPSS1/Outline1.html>](#)
- 135. [<http://web.uccs.edu/lbecker/SPSS/content.htm>](#)
- 136. [<http://core.ecu.edu/psyc/wuenschk/SPSS/SPSS-Data.htm>](#)
- 137. [<http://www.tulane.edu/~panda2/Analysis2/ahome.html>](#)
- 138. [<http://www.shef.ac.uk/~scharr/spss/index2.htm>](#)
- 139. [<http://calcnet.mth.cmich.edu/org/spss/index.html>](#)
- 140. [<http://calcnet.mth.cmich.edu/org/spss/toc.htm>](#)
- 141. [<http://www.public.asu.edu/~pythagor/spssworkbook.htm>](#)
- 142. [<http://lib.stat.cmu.edu/>](#)
- 143. [<http://www.stat.ufl.edu/vlib/statistics.html>](#)
- 144. [<http://www.statserv.com/software.html>](#)
- 145. [<http://www.maths.uq.edu.au/~gks/webguide/>](#)
- 146. [<http://www.statistics.com/>](#)
- 147. [<http://www.helsinki.fi/~jpuranen/links.html#stc>](#)
- 148. [<http://www.maths.uq.edu.au/~gks/webguide/free.html>](#)
- 149. [<http://nhsbig.inhs.uiuc.edu/>](#)
- 150. [<http://www.okstate.edu/artsci/botany/ordinate/software.htm>](#)
- 151. [<http://life.bio.sunysb.edu/ee/biometry/>](#)
- 152. [<http://life.bio.sunysb.edu/morph/software.html>](#)

- 153. <http://pbil.univ-lyon1.fr/ADE-4/ADE-4.html>
- 154. [http://ourworld.compuserve.com/homepages/Rainer_Wuerlaender/statsoft.h
tm](http://ourworld.compuserve.com/homepages/Rainer_Wuerlaender/statsoft.htm)
- 155. <http://www.stat.auckland.ac.nz/~mja/Programs.htm>
- 156. <http://it.stlawu.edu/~rlock/maa99/>
- 157. <http://it.stlawu.edu/~rlock/tise98/java.html>
- 158. <http://www.stat.vt.edu/~sundar/java/applets/>
- 159. <http://www.kuleuven.ac.be/ucs/java/index.htm>
- 160. <http://noppa5.pc.helsinki.fi/koe/>
- 161. <http://www2.kenyon.edu/people/hartlaub/MellonProject/mellon.html>

Demostraciones Java para el aprendizaje de la estadística

- 162. *Electronic Textbook (UCLA)*, programa *on-line* de representación y cálculo de funciones de densidad y de distribución (normal, F , ji-cuadrado, números aleatorios...). Equivalente a un libro de tablas

BASES DE DATOS:

1. Political Database of the Americas ... the Western Hemisphere. Base de datos con información política de los 25 países de la hemisferia del oeste. <http://www.georgetown.edu/pdba/>
<http://www.georgetown.edu/pdba/spanish.html>
<http://www.georgetown.edu/pdba/Elecdata/Col/colombia.html>

2.FAOSTAT es una base de datos estadísticos integrada on-line que actualmente contiene más de 1 millón de series anuales internacionales en las siguientes materias: <http://apps.fao.org/inicio.htm>

3.DEPARTAMENTO ADMINISTRATIVO NACIONAL DE ESTADISTICA.
<http://www.dane.gov.co/Enlaces/enlaces.html>
<http://www.dane.gov.co/index.html>
http://www.dane.gov.co/Enlaces/Organismos_Estadisticos/America/america.html
http://www.dane.gov.co/Enlaces/Organismos_Estadisticos/Europa/europa.html
http://www.dane.gov.co/Enlaces/Organismos_Estadisticos/Asia/asia.html
http://www.dane.gov.co/Enlaces/Organismos_Estadisticos/Africa/africa.html

4.. PROEXPORT COLOMBIA promueve las exportaciones colombianas. Apoya y asesora empresarios colombianos ... 091)5242015. Proexport. Quienes Somos Sobre ...
www.proexport.com.co/
<http://www.proexport.com.co/VBeContent/home.asp?Perfil=1>

5. DEPARTAMENTO NACIONAL DE PLANEACION
http://www.dnp.gov.co/03_PROD/PUBLIC/13P_MS.HTM

http://www.dnp.gov.co/03_PROD/BASES/BASES.HTM

6 BANCO DE LA REPUBLICA

<http://www.banrep.gov.co/>

http://www.banrep.gov.co/economia/ctanal1sec_ext.htm#tasa

7. ICFES El Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior ICFES

<http://www.icfes.gov.co/>

BIBLIOGRAFÍA

43. Montgomery Douglas y Runger George.(1996), Probabilidad y Estadística aplicada a la Ingeniería., McGraw-Hill, México
44. Montgomery Douglas y Hines William.(1995), Probabilidad y Estadística aplicada a la Ingeniería. y Administración, segunda edición ,CECSA, México
45. Mendenhall William, Wackerly Dennis y Scheaffer Richard (1994), Estadística Matemáticas con Aplicaciones , segunda edición, Grupo Editorial Iberoamerica. M, México
46. Govinden Portus Lincuyan.(1998), Introducción a la Estadística., McGraw-Hill, Santafé de Bogotá
47. Webster Allen L.(1998), Estadística aplicada a la Empresa y a la Economía, segunda edición, McGraw-Hill, Madrid
48. Kohler Heinz.(1996), Estadística para Negocios y Economía, primera edición ,CECSA, México
49. Martinez Bencardino Ciro (1995), Estadística , sexta edición ,ECOEDICIONES Santafé de Bogotá.
50. Alvarez C Ricardo (1994), Estadística Fundamental Aplicada, primera edición ,PUBLIADCO, Cali
51. Estadística," Enciclopedia Microsoft® Encarta® 2000. © 1993-1999 Microsoft Corporation.
52. Stockburger David W (1996) Introductory Statistics: Concepts, models and applications, , <http://www.psychstat.smsu.edu/sbk00.htm>
53. Mendoza Duran Carlos. (1995)Probabilidad y Estadística, <http://w3.mor.itesm.mx/~cmendoza/ma835/ma83500.html>
54. Valdés Fernando ,Comprensión y uso de la estadística, <http://www.cortland.edu/flteach/stats/glos-sp.html>
55. Hurtado Minotta Enrique A, Reflexiones para el Currículo, <http://www.geocities.com/soho/atrium/7521/tesis.html>
56. Academic Freedom , www.hrw.org/wr2k/issues-01.htm
57. Gonzalez Felipe, Africa : El silencio de los tambores, www.arrakis.es/~trazeg/gonzalez.html.
58. El año 2000, WWW.arrakis.es/~trazeg/anno2000.html
59. Mendenhall, W.; D.D. Wackerly y R.L. Scheaffer. *Estadística Matemática con Aplicaciones*. Grupo Editorial Iberoamérica. México.
60. Freund, John E. y Gary A. Simon. *Estadística elemental*. Prentice-Hall Hispanoamericana, SA. México, 1994. (8ªedición.)
61. Spiegel, M.R. *Estadística*. McGraw-Hill. México. (Serie Schaum.)

62. <http://www.unl.edu.ar/fave/sei/encuestas/index.html>.
63. Wonnacott, Thomas H. y Ronald J. Wonnacott (1998) *Introducción a la estadística*. Limusa/IPN. México.

ehurtado@usc.edu.co

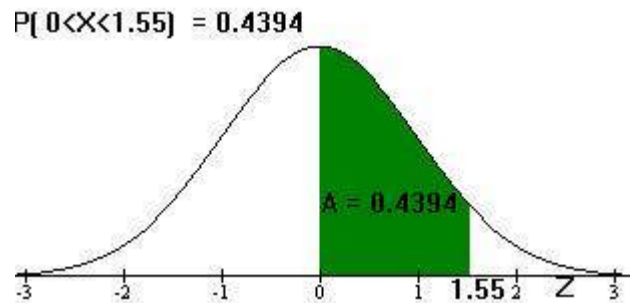


TABLA E ÁREA BAJO LA CURVA NORMAL ESTÁNDAR

Los valores de esta tabla dan el área bajo la curva entre la media y desviaciones estándar z arriba de la media. Por ejemplo para $z = 1.55$, el área bajo la curva entre la media y z es **0.4394**

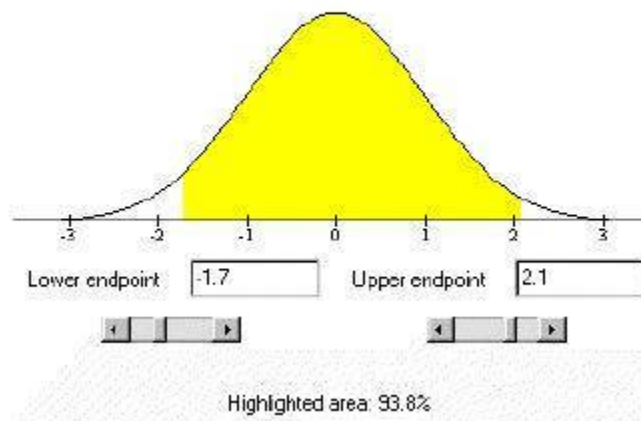
Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852

0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997
3.4	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4998
3.5	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998
3.6	.4998	.4998	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.7	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.8	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.9	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000
4.0	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000

ESTADÍSTICA II
DISTRIBUCIÓN NORMAL

MODULO IV
ING ENRIQUE A HURTADO MINOTTA

Standard Normal Curve



**Este libro esta dedicado a mi familia,
especialmente a mis padres (qpd) Jose
Parmenio y Eloisa; a Miriam , mi
adorable esposa , a mis hijos Miriam
Xiomara, Jorge Enrique , Rene Fernado y
Enrique Alberto profesionales de nuestra
querida USACA**



- **ENRIQUE ALBERTO HURTADO MINOTTA.**
- INGENIERO METALURGICO 1978
- UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER.
- ESPECIALIZACIÓN EN ADMINISTRACIÓN DE LA PRODUCCIÓN -1986
FUNDACION - CARL DUISBERG GESELLSCHAFTe. V cdg
- ESPECIALIZACION EN DOCENCIA UNIVERSITARIA 1998
UNIVERSIDAD SANTIAGO DE CALI

EXPERIENCIA INDUSTRIAL:

- EX GERENTE TECNICO DE COBRES DE COLOMBIA . CALI
- EX - GERENTE DE PLANTA DE COMET S.A – MEDELLÍN
- EX - ASISTENTE DE SUPERINTENDENCIA
REMACHES INDUSTRIALES - BARRANQUILLA
- EX - GERENTE DE PRODUCCION CODACERO S.A BOGOTA
- EX GERENTE DE METAL CONSULTING INGENIERIA LTDA. - CALI
- ANALISTA DE SINIESTROS - INTERAJUSTES -- CALI
- EXPERIENCIA DOCENTE
- UNIVERSIDAD SANTIAGO DE CALI
- EN LAS CATEDRAS DE MATEMATICAS 1, 2 , 3 , CALCULO DIFERENCIAL
CALCULO INTEGRAL ECUACIONES DIFERENCIALES , ESTADISTICA 1, 2 Y 3,
MATEMÁTICAS FINANCIERA
- EN LAS FACULTADES DE ADMINISTRACIÓN DE EMPRESAS, CONTADURIA
PUBLICA, FINANZAS Y NEGOCIOS INTERNACIONALES, INGENIERIA DE
SISTEMAS, INGENIERIA INDUSTRIAL Y QUIMICA
- UNIVERSIDAD AUTONOMA DE OCCIDENTE – ESTADISTICA I, II
- CENTRO SUPERIOR UNIVERSITARIO - ESTADISTICA