CARTERAS DE INVERSIONES

INTRODUCCIÓN

Esta disertación se avoca a la presentación de los aspectos básicos de la teoría moderna del portafolio considerando como fundamental la teoría de la utilidad como sustento teórico de los resultados obtenidos.

Este documento se divide en cinco partes. La primera de ellas, hace referencia los conceptos básicos presentes en la inversión en portafolios sin profundizar en aspectos matemáticos. Además se da la justificación del estudio de éstos tópicos al presentar aspectos relevantes de la vida real en los mercados. La parte segunda trata la teoría de la utilidad en la que se muestra a la utilidad esperada como el medio para elegir entre alternativas aleatorias. La tercera parte se dedica al análisis del riesgo, rendimiento y correlación como componentes clave en de una cartera de inversiones. La parte cuarta indaga sobre la naturaleza de la frontera eficiente a través de los teoremas de dos fondos y de un fondo. En la parte quinta se deriva el CAPM para toda la economía y se muestran la aplicación de la beta en la determinación del costo de capital.

Para aclarar algunos conceptos de esta exposición se diseñó un apéndice sobre la distribución normal y sobre definiciones de mercados.

1 INTRODUCCIÓN A LOS CONCEPTOS CLAVE

La inversión

La inversión se refiere al uso de recursos en la producción de satisfactores con el objetivo de obtener ganancias potenciales en el futuro. La inversión se puede realizar en dos facetas en la economía nacional o en el extranjero:

1. **Directa**. Se realiza en activos tangibles tales como maquinaria y, activos intangibles como la educación. Esta inversión es generalmente de largo plazo dada la poca liquidez que presenta.

2. **Indirecta o inversión en cartera**. Se refiere a la compra de instrumentos financieros como acciones. Generalmente de corto plazo dada la existencia de mercados secundarios que otorgan liquidez a los activos financieros.

En la presente exposición se tratará del segundo tipo de inversión, no obstante, antes de ingresar al estudio de los portafolios de inversión se deben desmenuzar los elementos de la definición de inversión:

- Producción de satisfactores
- Ganancias inciertas

Producción de satisfactores en la inversión

El uso de recursos para producir bienes y/o servicios que no satisfacen ninguna necesidad es inviable debido a que nadie desearía comprarlos.

El caso de un municipio que emite deuda para la construcción de un puente muestra la necesidad de crear riqueza para los habitantes y transportistas que necesitan mejores vías de comunicación. Por otra parte, los tenedores de los bonos municipales son quienes aportan los recursos financieros.

Ganancias inciertas

Las inversiones no son seguras, incluso las que se hacen en papeles gubernamentales, pues están sujetas a riesgos de mercado, crédito y operacional. El riesgo de una inversión condiciona la rentabilidad ofrecida por la misma en función del coste de oportunidad. Así, se tiene que a mayor riesgo se exige mayor rendimiento.

Una vez entendido el concepto de inversión el siguiente paso es analizar la conveniencia de una inversión sobre otra. En la inversión directa existen técnicas de evaluación de proyectos de inversión mientras que en la inversión en cartera se hace análisis bursátil y se tiene la Teoría del Portafolio Moderno que es el tópico de esta exposición.

Cartera de inversiones en una primera definición.

Es un conjunto de al menos dos instrumentos financieros en los que se ha invertido de forma simultánea.

Los instrumentos financieros con los que se puede crear una cartera son variados y pueden proceder de los siguientes mercados:

- Mercado de dinero
- Mercado de capitales
- Mercado de derivados
- Mercado de divisas
- Mercado de commodities[1]

Las carteras tienen su razón de ser en la idea de la diversificación que facilita la disminución del riesgo y sustento en el rendimiento.

Diversificación. El siguiente ejemplo brinda una idea intuitiva de lo que significa diversificar.

La fonda

En una pequeña fonda se ofrece a los comensales limonada. En los días calurosos, las limonadas incrementan los ingresos pero en los días frescos la gente disminuye el consumo de bebidas frías por lo que se siente una merma en las ventas. Si el dueño de la fonda introduce en su carta algo de café, entonces, cuando los días sean calurosos se podría ofrecer limonada en tanto que en los días fríos se puede ofrecer café por lo que se disminuye la posibilidad de pérdidas.

En este caso, la diversificación de productos conduce a la compensación de pérdidas en la limonada por medio de las ventas de café en los días frescos. Cuando los días sean calurosos disminuirá la venta de café pero aumentará la venta de limonadas por lo que en ambos casos la posibilidad de pérdida se reduce.

[1] Siempre y cuando cuenten con la liquidez necesaria para hacer a las inversiones de corto plazo.

La diversificación encuentra sus orígenes en la *teoría de la diana* que fue elaborada por Alfred Cowles en los años veinte. La idea de ésta teoría indica que es preferible comprar de todo lo que se encuentre en el mercado accionario para formar una cartera diversificada. Cowles concluyó que la cartera diversificada es mejor, en promedio, que seguir las mejores estrategias de inversión de los corredores de bolsa debido al pago de comisiones[2].

Posteriormente la idea de Cowles se perfeccionó a través de la Teoría del Portafolio Moderno iniciada por Markowitz. No debe olvidarse la frase clásica de la diversificación "no poner todos los huevos en una canasta" debida a Tobin.

La clave de la diversificación se encuentra en la dependencia entre los instrumentos que conforman una cartera. Tales relaciones de dependencia se estiman con la correlación[3]. Mientras menor sea la correlación de los activos, la cartera estará más diversificada.

Rendimiento y Riesgo. Cuando se debe elegir entre dos carteras los indicadores más importantes son el riesgo y el rendimiento que presentan.

El rendimiento muestra el crecimiento en el valor de la cartera. Se debe distinguir entre rendimiento realizado y rendimiento esperado. El primero se refiere al rendimiento que en la realidad tuvo el portafolio en tanto que el segundo es una estimación del rendimiento futuro de la cartera.

Frecuentemente el riesgo se define como la posibilidad de pérdida y se puede vincular con un mercado a la baja pero aún en este escenario es posible obtener ganancias mediante posiciones cortas. Por tanto para estas notas el riesgo indica la dispersión de los rendimientos realizados con el rendimiento esperado.

Tanto el rendimiento como el riesgo cuentan con diferentes métodos de estimación como promedios móviles para el rendimiento y modelos GARCH para la volatilidad. Sin embargo, en este material se hace uso únicamente del rendimiento promedio y de la desviación estándar como estimadores del rendimiento y del riesgo respectivamente.

---

[2] Las comisiones para corredores o brokers son fijas sin importar la no existencia de ganancias.
[3] Existen nuevas técnicas como las copulas (de la palabra inglesa couple) que también indican la dependencia entre dos activos.

Las inversiones de los inversionistas

En los mercados financieros existen diferentes tipos de inversionistas pero una primera clasificación considera dos clases: individuales e institucionales. No obstante, la necesidad de invertir y las condiciones en las que se encuentre el inversionista son los factores que determinan los tipos de inversiones.

Bancos

Una misma institución financiera puede contar con distintos portafolios con base a las políticas de la alta dirección. Así, en una institución financiera, se pueden encontrar un portafolio de trading conformado por instrumentos líquidos para rebalancear (cambiar la composición de la cartera) con frecuencia y un fondo de pensiones compuesto de instrumentos de mayor plazo con menor liquidez pero que ofrecen la posibilidad de explotar ciertos arbitrajes regulatorios. El arbitraje regulatorio (solo aplicable para la banca múltiple) consiste en la inversión en instrumentos para los cuales los organismos regulatorios soliciten un capital regulatorio que sea menor al capital económico[4].

Seguros

Las instituciones de seguros deben invertir las reservas debido a que éstas son los recursos con los que se responde a los siniestros. En la circular S-11.2 de la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas se establecen las características de las inversiones en las que puede participar una compañía de seguros. Esta circular señala límites de inversión con base en el tipo de activos y en la clase de reserva como se muestra en las tablas 1 y 2.

El sistema de pensiones vigente en México

Tabla 1. Restricciones de inversión de reservas por parte de las autoridades regulatorias.

Tipo de valor	*Porcentaje del portafolio*
Valores emitidos o respaldados por el gobierno federal	*Hasta el 100%*
Valores emitidos o respaldados por instituciones de crédito	*Hasta el 60%*
Cualquier inversión distinta a las anteriores	*Hasta el 30%*

Fuente: Comisión Nacional de Seguros y Fianzas

[4] Con base en el acuerdo de Basilea, los organismos reguladores exigen un porcentaje de la inversión como capital económico para impedir que la banca pierda solvencia. El capital económico se refiere al que los modelos de estimación de riesgo señalan como el verdadero capital para garantizar la solvencia.

Tabla 2. Restricciones de liquidez en las inversiones de las reservas.

Reserva	*Porcentaje mínimo de inversión en corto plazo*
OPC	*100*
IBNR	*75*
Riesgo en Curso	*50*
Matemática	*30*
Previsión	*30*
Especial de Contingencia	*30*
Riesgos Catastróficos	*20*

Fuente: Comisión Nacional de Seguros y Fianzas

Estos son solo ejemplos simplificados de la realidad en los mercados financieros. Los modelos que se muestran en este material son solo el inicio del largo proceso de aprendizaje que deben seguir quienes pretenden involucrarse en los mercados financieros.

2 TEORÍA DE LA UTILIDAD

La decisión ante alternativas inciertas se modela a través de la teoría de la utilidad, la cual, se presenta de forma limitada pero sin sustraer los elementos clave para la comprensión de la selección de carteras. En los siguientes parágrafos se muestran los axiomas de la teoría de la utilidad así como la derivación de la utilidad esperada como la herramienta para la elección ante alternativas aleatorias. Posteriormente se tratan los tópicos de dominancia estocástica, aversión al riesgo y el criterio de media-varianza. La ilustración 1 indica el derrotero de este bloque de contenido.

Ilustración 1. Sustento teórico de la selección de carteras de inversiones.

El criterio del valor esperado para valuar alternativas inciertas.

Hasta antes de los años treinta del siglo XVIII se consideraba que las personas decidían sobre alternativas inciertas con base en el criterio del valor esperado. La invalidez de dicho criterio se ejemplifica a continuación:

Supóngase un individuo que tiene las siguientes alternativas:

1. Un billete de lotería que premia con 2000 unidades monetarias (u.m) con 5% de probabilidades y se pierde 2 u.m. con 95% de posibilidad. La representación de esta apuesta es:

$$G = \begin{cases} 2000 & 0.05 \\ -2 & 0.95 \end{cases} \qquad E[G]=2000*0.05+(-2)*0.95=98.1$$

2. La inversión H de 100 u.m. en una cuenta de banco que paga sin riesgo 1% de interés.

$$E[H]=101$$

3. Un juego M consistente en el lanzamiento de una moneda justa que se detiene en la primera aparición del anverso y en este caso paga 2^r unidades monetarias donde r es el número de lanzamientos hasta que se detiene el juego. El valor de la probabilidad del r-*ésimo* lanzamiento es 2^{-r} por lo que la esperanza de este juego es

$$E[M] = \sum_{r=1}^{\infty} 2^r * 2^{-r} = \infty$$

Bajo el criterio del valor esperado la tercer alternativa es la elección correcta. Sin embargo, al contar con un premio esperado infinito el costo de participar en tal juego es también infinito por lo que nadie querría participar en el mismo. El juego M es mejor conocido como la paradoja de San Petersburgo.

La inconsistencia de este criterio se resuelve con la idea de la utilidad esperada que en los siguientes parágrafos se construye a partir de axiomas.

Axiomas de la Teoría de la Utilidad

Antes de presentar los axiomas de la teoría en cuestión es indispensable el entendimiento de la idea de lotería. Una lotería es un juego en el que se obtienen diferentes premios mutuamente excluyentes con probabilidades asociadas y tiene la siguiente expresión:

$$G(x_1, x_2, .., x_n : p_1, p_2, .., p_n) = \begin{cases} x_1 & \mathbf{p_1} \\ x_2 & \mathbf{p_2} \\ & \vdots \\ x_n & \mathbf{p_n} \end{cases}$$

donde el premio x_i tiene probabilidad p_i. Esta expresión de lotería simple se puede abreviar al agrupar a los premios[5] y a las probabilidades en vectores $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ y $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, ..., p_n)$ por lo que $G(\boldsymbol{x} : \boldsymbol{p})$ es una notación más simple.

También existen las loterías compuestas tales como $G(G_1, G_2 : p) = \begin{cases} G_1(x : q) & p \\ G_2(y : r) & 1 - p \end{cases}$ en la que cada premio es una lotería.

Ejemplos. Sean dos loterías simples $G_1(x{:}\mathbf{q})$, $G_2(x{:}\mathbf{r})$ y sea $G(G_1, G_2{:}\mathbf{p})$ una lotería compuesta. Las loterías son tales que $\mathbf{x}=(2,4,6)$ $\mathbf{q}=(0.5,0.3,0.2)$ $\mathbf{y}=(6,8)$ $\mathbf{r}=(0.6,0.4)$.

$$\mathrm{G}_1(2,4,6 : 0.5,0.3,0.2) = \begin{cases} \mathbf{2} & \mathbf{0.5} \\ \mathbf{4} & \mathbf{0.3} \\ \mathbf{6} & \mathbf{0.2} \end{cases} \qquad \mathrm{G}_2(6,8 : 0.6,0.4) = \begin{cases} \mathbf{6} & \mathbf{0.6} \\ \mathbf{8} & \mathbf{0.4} \end{cases} \qquad \mathrm{G} = \begin{cases} \mathbf{G_1} & \mathbf{0.5} \\ \mathbf{G_2} & \mathbf{0.5} \end{cases}$$

La lotería G se puede reducir a una lotería simple al entenderse como una combinación lineal de las loterías. Es decir $G=0.5G_1+0.5G_2$ por lo que toma la siguiente forma simple:

$$\mathrm{G} = \begin{cases} \mathbf{2} & \mathbf{p = 0.25} \\ \mathbf{4} & \mathbf{p = 0.15} \\ \mathbf{6} & \mathbf{p = 0.40} \\ \mathbf{8} & \mathbf{p = 0.20} \end{cases}$$

Nótese que el premio con valor de 6 se ofrece en las loterías G_1 y G_2 por lo que la probabilidad de éste es $0.5(0.2)+0.5(0.6)$. Las probabilidades de los otros premios se calculan de forma análoga.

[5] Los premios pueden ser positivos, negativos o nulos.

Axiomas

Ahora que se domina la idea de lotería se pueden presentar los cinco axiomas de la teoría de la utilidad.

Sea Γ el conjunto de loterías concernientes a un individuo y sea el conjunto acotado X el conjunto de resultados posibles, no negativos, para todas las loterías.

Axioma 1. Completez. Para todo $x, y \in X$ el agente puede alguna de las siguientes situaciones:

- Prefiere a x sobre y denotado $y \prec x$
- Prefiere a y sobre x denotado $x \prec y$
- Es indiferente entre ambos $(y \approx x)$

Axioma 2. Transitividad. Se da con las siguientes situaciones para $x, y, z \in X$:

- $x \prec y \wedge y \prec z \Rightarrow x \prec z$
- $x \approx y \wedge y \approx z \Rightarrow x \approx z$

Axioma 3. Independencia fuerte. Sean $x, y, z \in X$ y $G_1, G_2 \in \Gamma$. Este axioma señala que:

$x \approx y \Rightarrow G_1(x, z : p) \approx G_2(y, z : p)$.

Axioma 4. Mensurabilidad. Sean $x, y, z \in X$ y $G \in \Gamma$. El axioma indica que

$x \succ y \succeq z \vee x \succeq y \succ z \Rightarrow \exists!\, p$ tal que $y \approx G(x, z : p)$.

Axioma 5. Graduación. Sean cuatro resultados $x, y, u, z \in X$
Suponiendo que $(x \preceq y \preceq z) \wedge (x \preceq u \preceq z)$ se tiene por el axioma 4 que existen loterías $G_1, G_2 \in \Gamma$ tales que $y \approx G_1(x, z : p)$ y $u \approx G_1(x, z : q)$.

Este axioma indica lo siguiente: Si $q \leq p \Rightarrow u \preceq y$.

Teoría de utilidad esperada

Para desarrollar la teoría de la utilidad esperada se requieren dos supuestos más:

1. *Los individuos siempre prefieren más riqueza*

2. *Para el individuo las desviaciones favorables sobre el promedio de la riqueza no pueden compensar a las desviaciones desfavorables sobre la riqueza promedio.*

El supuesto 1 indica la condición lógica de individuos que siempre desean mayor bienestar. El supuesto 2 detalla que existe aversión al riesgo pues por más elevado que sea el premio la posibilidad de una gran pérdida aleja a los individuos de eventos inciertos. Con estos supuestos y los cinco axiomas escritos es viable el desarrollo de la teoría.

Función de utilidad.

Es una función escalar que está definida en el conjunto de resultados X tal que representa los grados de preferencia para los diferentes resultados que en realidad representan niveles de riqueza. En forma matemática la función de utilidad toma la siguiente forma:

$$U : X \to \Re$$
$$x \to U(x)$$

El valor funcional $U(x)$ es irrelevante pues lo que importa es la preservación del orden $(X, \preceq)$ al orden de los números reales por lo que transformaciones crecientes como las potencias o transformaciones afines $V(x)=aU(x)+b$ con $a>0$. Para ejemplificar esta situación considérense tres alternativas: peras, manzanas y naranjas. Además existe un individuo con las siguientes preferencias sobre las frutas:

$Manzana \prec naranja \prec pera$

La función de utilidad del individuo es

$U(manzana)=12$
$U(naranja)=16$
$U(pera)=20$

Nótese que ahora se tienen números reales que se pueden comparar y es claro que

$U(manzana) < U(naranja) < U(pera)=20$

Los valores que toma una función de utilidad son irrelevantes pues lo importante es que preserven el orden de preferencias mediante el orden de los números reales. De esta forma la transformación afín $2*U(x)+3$ es equivalente a la función $U(x)$ pues preserva el orden inicial.

Teorema. Para todo $x,y \in X$ la función de utilidad debe respetar el orden de preferencias de la siguiente forma:

$$U(x) > U(y) \Rightarrow x \succ y$$
$$U(x) < U(y) \Rightarrow x \prec y$$
$$U(x) = U(y) \Rightarrow x \approx y$$

Demostración

Dado que X es un conjunto acotado el elemento $x_I=inf(X)$ se denomina *equis infierno* y es el peor resultado; el máximo $x_P=sup(X)$ se conoce como *equis paraíso* y es el mejor resultado.

Para todo $x,y \in X$ se tiene $x_P \succ x \succeq x_I \vee x_P \succeq x \succ x_I$ y $x_P \succ y \succeq x_I \vee x_P \succeq y \succ x_I$

Con base en el axioma 4 existen se tienen las equivalencias $x \approx G_1(x_I,x_P:p(x))$ y $y \approx G_2(x_I,x_P:q(y))$.

Si se hace $U(x)=p(x)$ y $U(y)=q(y)$ entonces por el axioma 5 se tiene que:

- $U(x) > U(y) \Rightarrow x \succ y$
- $U(x) < U(y) \Rightarrow x \prec y$
- $U(x) = U(y) \Rightarrow x \approx y$ ■

Teorema de la utilidad esperada. La función de utilidad sirve para comparar alternativas aleatorias a través de la utilidad esperada.

Demostración

Sean $x,y,z \in X$. Partiendo de las equivalencias anteriores $x \approx G_1(x_I,x_P:p(x))$ y $y \approx G_2(x_I,x_P:q(y))$ se construye una lotería compuesta tal que $z \approx G(G_1,G_2:r)$ como se muestra.

$$z \approx \begin{cases} x \approx \begin{cases} x_P & p(x) \\ x_I & 1 - p(x) \end{cases} & r(z) \\ y \approx \begin{cases} x_P & q(y) \\ x_I & 1 - q(y) \end{cases} & 1 - r(z) \end{cases}$$

Entonces $z \approx G(x_P, x_I : r(z)p(x)+(1-r(z))q(x))$ y se recuerda que $U(x)=p(x)$ y $U(y)=q(y)$ por lo que $U(z)=r(z)U(x)+(1-r(z))U(y)$ que se entiende como la utilidad esperada. ■

En términos más generales la utilidad esperada de una riqueza futura es $E[U(x)]=\sum U(x_i)p_i$.

Solución a la Paradoja de San Petersburgo

El teorema de la utilidad esperada da solución a la paradoja de San Petersburgo al encontrar un valor finito.

$$E[U(M)] = \sum_{r=1}^{\infty} U(2^r) * 2^{-r} < \infty$$

Características de la función de utilidad

La preferencia de los individuos por mayor riqueza asentada en el supuesto 1 implica una función de utilidad creciente. Esta condición equivale a que la derivada de una función de utilidad, conocida como **utilidad marginal**, es positiva $U(x)^{/}>0$.

El supuesto 2 significa que el individuo tiene **aversión al riesgo** por lo que la utilidad marginal es decreciente, es decir $U(x)^{//}<0$, y esta condición equivale a una función de utilidad cóncava.

Ejemplos. La función de utilidad $U(x) = \sqrt{x}$ es creciente y cóncava pues $U^{/}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$ y $U^{//}(x) = -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} < 0$.

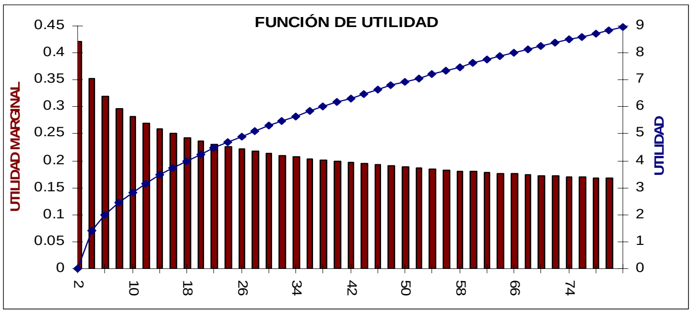

Ilustración 2 Características de la función de utilidad raíz con derivada decreciente.

Sin embargo, la función de utilidad cuadrática $U(x)=ax^2+bx+c$ puede ser cóncava y creciente dependiendo de los parámetros a, b y c.

Asumiendo que la función es creciente se debe considerar que conforme se avance en el nivel de bienestar se llega a un punto de inflexión en el que la primera derivada cambia de signo por lo que la función de utilidad es creciente y cóncava únicamente en el intervalo $\left[0,-\frac{b}{2a}\right]$ mientras que para valores mayores a $-\frac{b}{2a}$ el individuo prefiere cada vez menos riqueza.

Las funciones de utilidad proporcionan la herramienta matemática para la toma de decisiones ante alternativas aleatorias como los rendimientos de las acciones en una cartera. En el tema que trata este documento, un inversionista racional opta siempre por la cartera de mayor utilidad esperada.

Utilidad y rendimientos distribuidos como una normal.

Hasta este punto se presentó la idea de una función de utilidad como la representación de las preferencias de un individuo. Se supuso que tal función es creciente $U(x)^{/}>0$ y cóncava $U(x)^{//}<0$.

Además se han dado ejemplos de funciones de utilidad como la función raíz y la cuadrática pero, la selección de carteras no debe estar restringida a una familia de funciones de utilidad por lo que se precisa el siguiente supuesto:

Supuesto. La función de utilidad se puede aproximar por un polinomio de Taylor.

Si x_0 es un punto del dominio de una función de utilidad $U(x)$ entonces
$$U(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{U^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Sea w una variable aleatoria con esperanza $\mu<\infty$ y varianza $\sigma^2 < \infty$ tal que representa el beneficio futuro de una inversión.

Si se hace $U(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{U^k(\mu)}{k!}(w - \mu)^k$ entonces para determinar la utilidad esperada $E[U(w)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{U^k(\mu)}{k!}E[(w - \mu)^k]$ se deben conocer todos los momentos centrales de la variable aleatoria w. Esta situación se evita cuando la función de utilidad es cuadrática pues las derivadas de orden mayor o igual a tres se anulan. Lamentablemente ésta función no se puede asignar a todos los inversionistas por lo que es preferible suponer que $w \sim N(\mu,\sigma)$ debido a que todos los momentos de ésta variable aleatoria se obtienen a partir de los dos primeros como se prueba en el apéndice.

Bajo el supuesto de normalidad para w no se requieren más supuestos para la función de utilidad solicitándose únicamente que se pueda aproximar por un polinomio de Taylor además de ser cóncava y creciente.

Aversión al riesgo

La concavidad de una función de utilidad es síntoma de la aversión al riesgo del inversionista pero se puede obtener más información sobre la cantidad de riesgo que un inversionista está dispuesto a tolerar por medio de las siguientes medidas:

- Coeficiente de Arrow-Pratt $A(x)$
- Aversión relativa al riesgo $R(x)$

Previa derivación de tales medidas se debe conocer el concepto de equivalente cierto.

Equivalente cierto.

El equivalente cierto de un nivel de riqueza incierto es una cantidad segura tal que la utilidad de la segunda es igual a la utilidad esperada de la primera.

En términos matemáticos el valor de C es equivalente cierto del nivel de riqueza x cuando $U(C)=E[U(x)]$ o de forma explícita $C = U^{-1}(E[(U(x)])$.

Para ejemplificar considérese a un inversionista con función de utilidad $U(x) = -e^{-x}$, una riqueza actual de 10 y un riqueza nueva $x=10+G$ tal que

$$G = \begin{cases} -5 \; con \; p = \frac{1}{2} \\ 5 \; con \; p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Entones $E[U(x)] = -\frac{1}{2}[e^{-5} + e^{-15}] = -0.003369$ por lo que el equivalente cierto es $C=-ln(-(-0.003369))=5.6931$ y $U(C)=0.003369$.

Por lo tanto, el inversionista es indiferente entre 5.69 unidades monetarias ciertas y el nuevo nivel de riqueza. La diferencia entre el nivel de bienestar actual y el equivalente cierto $10-5.6931=4.3069$ se entiende como una prima de seguro que el inversionista pagaría por no enfrentar la lotería G.

Esta diferencia es una medida de aversión absoluta al riesgo y el desarrollo de la misma es el siguiente:

Coeficiente de aversión absoluta al riesgo de Arrow-Pratt.

Considere a un inversionista con función de utilidad $U(x)$ tal que x es el nivel de riqueza inicial y un nivel de riqueza final $x+\varepsilon$ donde ε una variable aleatoria con varianza σ_ε^2 que representa un juego justo por lo que $E[\varepsilon]=0$.

Con estos datos se desea calcular la prima Π que el inversionista pagaría por no encarar la incertidumbre del nivel de riqueza final.

Sea C el equivalente cierto de $x+\varepsilon$ es decir que $U(C)=E[U(x+\varepsilon)]$. Con el objeto de encontrar una expresión analítica para la prima Π se hace una aproximación de Taylor de segundo orden alrededor del nivel de x para $U(x+\varepsilon)$.

$$U(x+\varepsilon)=U(x)+U^{/}(x)(x+\varepsilon-x)+\frac{1}{2}U^{//}(x)(x+\varepsilon-x)^{2}$$

Se toma la esperanza de esta aproximación recordando que x es un valor dado

$$E[U(x+\varepsilon)]=U(x)+U^{/}(x)E[\varepsilon]+\frac{1}{2}U^{//}(x)E[(\varepsilon)^{2}]=U(x)+\frac{1}{2}U^{//}(x)\sigma_{\varepsilon}^{2}$$

Si se recuerda que la prima es la diferencia entre el nivel de riqueza actual y el equivalente cierto se tiene la siguiente expresión:

$$\Pi=x-C\Rightarrow C=x-\Pi\Rightarrow U(C)=U(x-\Pi)$$

Al realizar una aproximación de Taylor de primer orden alrededor[6] de x se obtiene:

$$U(x-\Pi)=U(x)+U^{/}(x)(x-\Pi-x)$$

Dado que C es equivalente cierto entonces $U(x-\Pi)=E[U(x+\varepsilon)]$ por lo que al igualar las aproximaciones se tiene:

$$U(x)+U^{/}(x)(-\Pi)=U(x)+\frac{1}{2}U^{//}(x)\sigma_{\varepsilon}^{2}\Rightarrow-\Pi U^{/}(x)=\frac{1}{2}\sigma_{\varepsilon}^{2}U^{//}(x)\Rightarrow$$

$$\Pi=-\frac{1}{2}\sigma_{\varepsilon}^{2}\frac{U^{//}(x)}{U^{/}(x)}$$

Esta prima Π se conoce como la **prima de Arrow-Pratt** y dado que $\frac{1}{2}\sigma_{\varepsilon}^{2}$ es constante se hace la definición del **coeficiente de aversión al riesgo de Arrow-Pratt** $A(x)=-\frac{U^{//}(x)}{U^{/}(x)}$.

Para analizar la aversión al riesgo de un individuo se toma la derivada del coeficiente. Si la derivada es positiva entonces el individuo está dispuesto a destinar mayores recursos a inversiones riesgosas. Cuando la derivada es negativa entonces existe aversión al riesgo por lo que cada vez se destinarán menores recursos a inversiones riesgosas y, si la derivada es nula, se mantiene la misma cantidad de unidades monetarias en las inversiones riesgosas.

[6] Alrededor de otro punto distinto de X sería ilegítimo pues la primera aproximación se hizo para ese punto.

Coeficiente de aversión relativa al riesgo

La aversión relativa al riesgo indica el porcentaje de riqueza que se sacrificaría por no participar en una lotería.

Como en el caso anterior, una derivada positiva indica que el individuo incrementa el porcentaje de riqueza destinado a inversiones riesgosas. Si la derivada es negativa entonces existe aversión al riesgo cada vez se destinará un menor porcentaje de riqueza a inversiones riesgosas y, si la derivada es nula, se mantiene el mismo porcentaje de unidades monetarias en las inversiones riesgosas. De forma análoga a como se hizo con el coeficiente de Arrow-Pratt se obtiene el coeficiente de aversión relativa al riesgo $R(x) = -\frac{xU^{\prime\prime}(x)}{U^{\prime}(x)}$.

Ejemplo: Analizar a un individuo con función de utilidad $U(x) = \sqrt{x}$. Por la definición de los coeficientes se requieren las primeras dos derivadas con respecto a la riqueza.

$$U^{\prime}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0 \text{ y } U^{\prime\prime}(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} < 0. \quad A(x) = -\frac{U^{\prime\prime}(x)}{U(x)} = \frac{1}{2x} \Rightarrow A^{\prime}(x) = -\frac{1}{2x^2} < 0$$

$$R(x) = -\frac{xU^{\prime\prime}(x)}{U(x)} = \frac{1}{2} \Rightarrow R^{\prime}(x) = 0$$

Se observa que la derivada del coeficiente de aversión absoluta al riesgo es negativa por lo que el individuo invertirá mayor cantidad de recursos en activos riesgosos. La aversión relativa al riesgo es constante por lo que el individuo siempre invertirá el mismo porcentaje en activos riesgosos. En la ilustración 3 se muestra el comportamiento de ambos coeficientes.

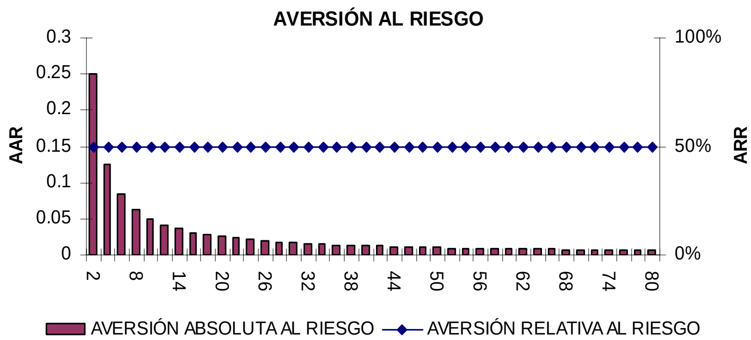

Ilustración 3. Coeficientes de aversión al riesgo de la función de utilidad raíz cuadrada.

Dominancia estocástica

Si el objetivo es elegir entre distintas carteras con base en los indicadores de riesgo y rendimiento se debe hacer la definición de dominancia estocástica para fincar los criterios de decisión. Para este apartado A y B son dos activos diferentes, R_A y R_B son los rendimientos y tienen funciones de distribución $F_{RA}(x)$ y $F_{RB}(x)$ respectivamente.

Dominancia estocástica de primer orden. El activo A domina en este sentido al activo B cuando $F_{RA}(x) \leq F_{RB}(x)$.

Para entender esta definición se requieren unas cuantas operaciones matemáticas como se muestran:

$$F_{RA}(x) \leq F_{RB}(x) \Leftrightarrow -F_{RB}(x) \leq -F_{RA}(x) \Leftrightarrow 1 - F_{RB}(x) \leq 1 - F_{RA}(x) \Leftrightarrow P\{R_A \geq x\} \geq P\{R_B \geq x\}$$

Es decir que es mayor la probabilidad de obtener un rendimiento superior con el activo A que con el activo B.

Dominancia estocástica de segundo orden. El activo A domina en este sentido al activo B cuando $\int_{-\infty}^{t} F_{RA}(x)dx \leq \int_{-\infty}^{t} F_{RB}(x)dx$.

Esta definición asume aversión al riesgo por parte del inversionista y significa que se preferirá al activo A pues acumula menor probabilidad en la cola izquierda que es la menos desfavorable sin importar la renuncia a un mejor rendimiento.

Para aterrizar estas ideas de dominancia estocástica se muestran a continuación las distribuciones de tres variables aleatorias normales con distintos parámetros.

Distribución normal	*Media*	*Desviación estándar*
F1	*0.1*	*0.17*
F2	*0.2*	*0.17*
F3	*0.21*	*0.3*

Tabla 3. Distribuciones normales y dominancia estocástica.

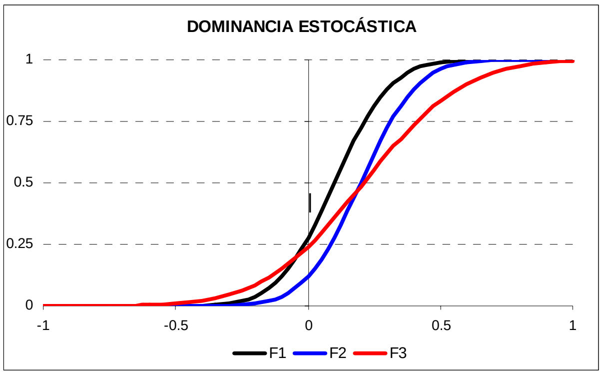

Ilustración 4. Dominancia estocástica.

En la ilustración 4 se observa que F2 domina en primer orden a F1 mientras que F3 es dominada en segundo orden por F2 pues acumula menor probabilidad en la cola izquierda a pesar de tener una media menor que F3 y esto muestra la aversión al riesgo.

Dominancia estocástica y función de utilidad.

Dominancia estocástica de primer orden con utilidad esperada. Se dice que el activo A domina en éste sentido al activo B cuando $E[U(R_A)] \geq E[U(R_B)]$ y $U^{/}>0$.

Dominancia estocástica de segundo orden con utilidad esperada. El activo A domina en éste sentido al activo B cuando $E[U(R_A)] \geq E[U(R_B)]$ y $U^{//}<0$.

Dominancia estocástica con utilidad esperada. Si se considera que $U^{/}>0$ y $U^{//}<0$ el activo A domina al activo B cuando $E[U(R_A)] \geq E[U(R_B)]$.

Esta última definición de dominancia estocástica y el supuesto de rendimientos con distribución normal conduce a criterios de dominancia conocidos como media-varianza.

Criterios de media y varianza para la dominancia estocástica.

Sean $R_A \sim N(\mu_A, \sigma_A)$, $R_B \sim N(\mu_B, \sigma_B)$, $Y \sim N(\mu, \sigma)$ con $U^{/}>0$ y $U^{//}<0$ y sea y_0 el nivel de riqueza inicial. Entonces son válidos los siguientes criterios de dominancia.

Dominancia estocástica de primer orden. El activo A domina al activo B cuando $\mu_A \geq \mu_B$ y $\sigma_A = \sigma_B$.

Demostración.

$Y=\sigma Z+\mu$ con $Z\sim N(0,1)$

El nivel de riqueza futuro es $y_0(1+\sigma Z+\mu)$ con utilidad esperada $E[U(y_0(1+\sigma Z+\mu))]$.

Al tomar la derivada parcial de esta esperanza con respecto al parámetro de localización μ se observa que es positivo por lo que la utilidad esperada es creciente con respecto a la media de los rendimientos normales y se sostiene la nueva definición de dominancia estocástica de primer orden.

$$E[U(y_0(1+\sigma Z+\mu))]=\int_{\Re} U(y_0(1+\sigma z+\mu))\frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dz$$

$$\frac{\partial E[U(y_0(1+\sigma z+\mu))]}{\partial\mu}=\int_{\Re} U^{/}(y_0(1+\sigma z+\mu)y_0\frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dz>0$$ pues $U^{/}>0$. ■

Con este resultado se tiene la siguiente regla:

Dado un nivel de riesgo elegir el activo o cartera de mayor rendimiento.

Dominancia estocástica de segundo orden. El activo A domina al activo B cuando $\sigma_A\le\sigma_B$ y $\mu_A=\mu_B$. La prueba de esta afirmación sigue la misma tónica que la anterior pero se hace uso de la concavidad de la función de utilidad.
Demostración.

$$\frac{\partial E[U(y_0(1+\sigma z+\mu))]}{\partial\sigma}=\int_{-\infty}^{0} U^{/}(y_0(1+\sigma z+\mu))zy_0\frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dz+\int_{0}^{\infty} U^{/}(y_0(1+\sigma z+\mu))zy_0\frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dz$$

$$=\int_{0}^{\infty} U^{/}(y_0(1+\sigma(-z)+\mu))(-z)y_0\frac{e^{-\frac{(-z)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dz+\int_{0}^{\infty} U^{/}(y_0(1+\sigma z+\mu))z\sigma\frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dz$$

$$=\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}zy_0\{U^{/}(y_0(\sigma z+\mu+1))-U^{/}(y_0(-\sigma z+\mu+1))\}dz<0$$

Dado que $U^{//}<0$ y U es una función creciente se tiene que la derivada parcial de la utilidad esperada con respecto a la desviación estándar es negativa por lo que a menor volatilidad se tiene afecta en menor grado a la utilidad. ■

Entonces la aversión al riesgo $U^{//}<0$ significa la siguiente regla:

Dado un nivel de rendimiento elegir el activo de menor riesgo.

Para mostrar éstas ideas se tiene la siguiente lista de activos que se identifican con base a riesgo y al rendimiento.

ACTIVO	*RENDIMIENTO*	*RIESGO*
A	*30%*	*17%*
B	*30%*	*53%*
C	*30%*	*19%*
D	*15%*	*12%*
E	*-2%*	*12%*
F	*18%*	*12%*

Tabla 4. Ejemplos de dominancia estocástica.

Dominancia estocástica de primer orden.

Para aplicar este criterio se debe fijar un nivel de riesgo. Para los activos D, E y F el nivel de riesgo es 12% por lo que a continuación se ordenan.

ACTIVO	*RENDIMIENTO*	*RIESGO*
F	*18%*	*12%*
D	*15%*	*12%*
E	*-2%*	*12%*

Tabla 5. Dominancia estocástica de primer orden.

El activo F domina en este sentido a los activos D y E.

Dominancia estocástica de segundo orden.

ACTIVO	*RENDIMIENTO*	*RIESGO*
A	*30%*	*17%*
C	*30%*	*19%*
B	*30%*	*53%*

Tabla 6. Dominancia estocástica de segundo orden.

En este caso el activo A domina a los activos C y B al tener menor volatilidad dado un nivel de rendimiento. En la ilustración II están los seis activos. En este momento surge la pregunta sobre la preferencia entre los activos A y F. Para responder a esta cuestión se requiere de la utilidad esperada. Si la utilidad esperada del activo A es mayor que la utilidad esperada del activo F entonces el activo que se elige es el A. En caso contrario se elige a F.

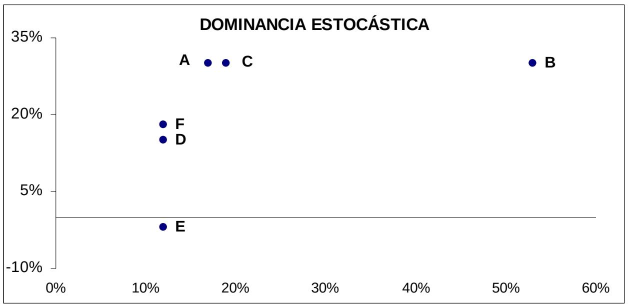

Ilustración 5. Dominancia estocástica con media y desviación típica.

3 RENDIMIENTO, RIESGO Y CORRELACIÓN

Rendimiento. Como se justificó, los rendimientos de los activos se distribuyen en forma normal por lo que se pasa ahora a la determinación de los mismos a partir de los precios de las acciones asumiendo que no hay pago de dividendos.

Sea S_t el precio de un activo en el día t. Entonces el rendimiento de un activo en ese día es $R_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)$.

Al hacer una aproximación de Taylor de primer orden alrededor del precio anterior se obtiene otra definición para el rendimiento que es la que considera la variación porcentual.

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) \approx \ln\left(\frac{S_{t-1}}{S_{t-1}}\right) + \frac{1}{S_{t-1}}\frac{S_{t-1}}{S_{t-1}}\left(S_t - S_{t-1}\right) \Rightarrow R_t \approx \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}$$

Sin embargo, desde el punto de vista teórico, el uso de esta aproximación conduce a probabilidades positivas para precios negativos pues al estar R_t distribuido en forma normal cuando $R_t \to -\infty \Rightarrow \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} < -1 \Leftrightarrow S_t - S_{t-1} < -S_{t-1} \Leftrightarrow S_t < 0$ partiendo de $S_{t-1}>0$.

Con el uso de los rendimientos logarítmicos este detalle teórico se salva pues cuando $\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) \rightarrow -\infty \Rightarrow \frac{S_t}{S_{t-1}} \rightarrow 0 \Rightarrow S_t \rightarrow 0 \Rightarrow S_t > 0$ por lo que nunca existen precios negativos al estar inferiormente acotados por cero.

Otra ventaja de los rendimientos logarítmicos es que se pueden agregar facilitando la presentación del rendimiento medio anualizado. El rendimiento para n periodos esta dado por $\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-n}}\right) = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\frac{S_{t-1}}{S_{t-2}}\cdots\frac{S_{t-n+1}}{S_{t-n}}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} R_{t-k}$

Generalmente se considera que un año tiene 250 días para el mercado accionario por lo que al tenerse el estimado del rendimiento medio diario $E[R]$ simplemente se multiplica por este número de días para obtener el rendimiento medio anualizado[7].

A partir de la estadística paramétrica se tiene que el estimador máximo verosímil del rendimiento medio es $\mu = \frac{\sum_{i=1}^{T} R_i}{T}$ para una muestra de tamaño T.

Es claro que el rendimiento de un activo no puede ser menor que –1 y que no tiene cotas superiores pero el supuesto de normalidad aún así resulta viable pues es difícil que un activo cambie demasiado en un periodo breve de tiempo.

Desviación Estándar

La desviación estándar indica la dispersión alrededor del rendimiento medio de las observaciones y sirve como un estimador del riesgo que representa la inversión en un activo. El estimador máximo verosímil de la desviación estándar es $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{T}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{T}}$ pero el estimador que se utilizará en lo siguiente es $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{T}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{T-1}}$ que es insesgado.

[7] Todos los rendimientos del mercado deben presentarse en forma anual o anualizados.

Existen numerosos métodos para estimar a la desviación estándar y entre ellos se encuentran los modelos GARCH que perciben cambios en el tiempo la varianza condicional pero la varianza incondicional permanece es constante. Es decir que el proceso estocástico que siguen las acciones no es estacionario en forma local pero si lo es en forma asintótica.

Para anualizar la volatilidad se debe considerar la regla de la raíz cuadrada y para explicar esta idea supóngase que se tienen T observaciones del rendimiento de un activo las cuales se consideran independientes debido al supuesto de mercado eficiente.

Si $R_1, R_2, \ldots, R_T$ son las observaciones independientes y con varianza σ^2 entonces el agregado de estas variables es el rendimiento para un periodo de T días por lo que la varianza de $\sum_{t=1}^{T} R_t$ que es la suma de las varianzas de los rendimientos de forma individual dada la independencia.

$$Var\left(\sum_{t=1}^{T} R_t\right) = \sum_{t=1}^{T} Var(R_t) = T\sigma^2 \Rightarrow desv.est\left(\sum_{t=1}^{T} R_t\right) = \sqrt{T}\sigma$$

Es decir que la volatilidad para un periodo T es la raíz cuadrada de ese periodo por la volatilidad diaria. Para anualizar la volatilidad diaria se debe multiplicar a esta por la raíz de 250 que es el número de días en los que está activo el mercado.

Ventas en corto

Para los empresarios, la regla de *compra barato y vende caro* es común y necesaria para la viabilidad de una firma. Para un inversionista en cartera, además de esta regla puede cumplirse la siguiente: *vende caro y compra barato* la cual proviene de la posibilidad de ventas en corto.

Para una mejor explicación de este concepto se debe comprender los significados de posición larga y posición corta.

Posición larga. Se asume una posición larga en un activo cuando se apuesta a que el precio de éste se incremente. Es decir, un alza en el valor del bien beneficia al dueño. En este sentido el dueño compra barato con la esperanza de vender caro.

Como ejemplo se tiene una posición larga en un futuro. Si en la fecha de entrega el precio de contado del subyacente es mayor que el precio de entrega entonces el comprador habrá obtenido un beneficio debido al incremento en el precio del subyacente.

Posición corta. La posición corta implica la posibilidad de obtener ganancias en un mercado a la baja. Es decir que el dueño de la posición corta se beneficia si el precio del activo baja y el ejemplo es la venta de un futuro.

Venta en corto. Un caso particular de posición corta es la venta en corto. Esta idea se puede explicar a partir de los siguientes pasos:

- Solicitar en préstamo un activo con la promesa de entregarlo luego de un periodo de tiempo T.
- Al tiempo de recibir el activo, éste se vende por una cantidad S_0.
- Transcurrido el plazo se debe comprar el activo por un precio S_T y entregarlo al dueño original.

Como se aprecia, la venta en corto significa la venta de un activo que no se posee y esta operación brinda ganancia cuando el precio del activo decrece. Es decir que se habrá ganado cuando $S_0>S_T$ y la ganancia realizada es $S_0 - S_T$.

Las ventas cortas implican elevados riesgos debido a que las ganancias están acotadas pues el precio solo puede disminuir hasta cero en tanto que la pérdida puede ser ilimitada cuando el precio tiende a infinito.

Obsérvese que el flujo de efectivo de esta operación es siempre negativo pues al inicio es $-S_0$ y al final $-S_T$. Curiosamente la tasa de rendimiento es negativa cuando se tienen ganancias pues en este caso $S_0 > S_T \Rightarrow \frac{S_T - S_0}{S_0} < 0$ pero dado que la inversión inicial es $-S_0$ se tiene ganancia positiva $-S_0 \frac{S_T - S_0}{S_0} = S_0 - S_T > 0$.

Debe advertirse que en la práctica las ventas cortas requieren de garantías procuradas por el elevado riesgo que representan. Además si en el periodo de tiempo en que la acción está tomada en préstamo existe pago de dividendo éste debe pagarse al dueño. En la figura 5 se muestra el pago de una venta en corto.

Ejemplo de venta en corto.

Suponga que un agente económico posee 1000 acciones de la emisora A que hoy cotizan a 25 unidades monetarias. La venta en corto se ejemplifica de la siguiente forma:

- Un inversionista pide esas acciones al agente con la promesa de entregárselas en siete días.
- El inversionista vende esas acciones al precio actual de 25 obteniendo 25,000 unidades monetarias que puede o no invertir en otros instrumentos en los que estaría largo.
- Pasados los siete días el inversionista compra 1000 acciones de la emisora A a un precio de 24 u.m. y las regresa al agente obteniendo una ganancia de 1000 u.m.

4 CARTERAS DE INVERSIONES

A partir de las definiciones de posición larga y corta se puede enunciar una nueva definición de cartera:

Cartera. Es un conjunto instrumentos financieros en los que se tiene alguna posición.

En adelante son válidos los siguientes supuestos:

1. El número de emisoras es finito.
2. El número total de acciones de las emisoras es constante.
3. No hay fusiones ni quiebras.
4. La negociación es continua.
5. No hay costos de transacción, impuestos o problemas de divisibilidad de acciones.
6. No hay pago de dividendos.

De forma inicial considérense N instrumentos $S_1,S_2,...,S_N$ con rendimientos $R_1,R_2,...,R_N$ Sea w_i el tanto por unidad de que se asigna al activo S_i por lo que es claro que $\sum_{i=1}^{N} w_i = 1$.

Encontrar la selección óptima de cartera significa encontrar una combinación de pesos o ponderadores tal que minimicen el riesgo dado un nivel de rendimiento. Para ello se debe primero determinar el rendimiento y el riesgo de la cartera. El valor de w_i también se conoce como el peso o ponderación del activo S_i.

Rendimiento de una cartera. El rendimiento de una cartera, denotado por R_P, es el promedio ponderado de los rendimientos de los activos.

$$R_P = w_1 R_1 + w_2 R_2 + \ldots + w_N R_N$$

El rendimiento esperado del portafolio es el promedio ponderado de los rendimientos esperados de los activos.

$$E[R_P] = w_1 E[R_1] + w_2 E[R_2] + \ldots + w_N E[R_N]$$

Riesgo de una cartera. El riesgo se estima a partir de la desviación estándar que es la raíz cuadrada de la varianza. La varianza de una cartera contiene el concepto de matriz de covarianzas de los rendimientos de los activos que tiene la siguiente forma:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

donde σ_i^2 es la varianza de los rendimientos del *i-ésimo* activo y σ_{ij} es la covarianza entre los activos i,j con $i \neq j$.

Con base en el rendimiento de la cartera $R_P = w_1 R_1 + w_2 R_2 + \ldots + w_N R_N$ se obtiene la varianza denotada por σ_P^2.

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \sigma_i^2 + 2\sum_{i \neq j} w_i w_j \sigma_{ij}$$

La varianza de una cartera se puede mostrar en forma matricial y para ello se define al vector $W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix}$ que contiene a todos los pesos de los activos.

Entonces la varianza se expresa como la siguiente forma cuadrática:

$$\sigma_P^2 = W' \Sigma W$$

La volatilidad es simplemente $\sigma_P = \sqrt{W'\Sigma W}$ y de igual manera sigue la regla de la raíz del tiempo para un periodo de T días $\sigma_P = \sqrt{T}\sqrt{W'\Sigma W}$.

Ejemplos para rendimiento y riesgo de una cartera. Para ilustrar éstas ideas se consideran dos activos S_1 y S_2 con los siguientes datos:

$$E[R_1]=0.15$$
$$E[R_2]=0.12$$
$$\sigma_1 = 0.21 \Rightarrow \sigma_1^2 = 0.0441$$
$$\sigma_2 = 0.17 \Rightarrow \sigma_2^2 = 0.0289$$
$$\sigma_{12} = 0.01785$$
$$w_1 = 0.3$$
$$w_2 = 0.7$$

Entonces el rendimiento del portafolio es 12.9%

$$E[R_P] = w_1 E[R_1] + w_2 E[R_2] = 0.3 * 0.15 + 0.7 * 0.12 = 0.129$$

y la volatilidad de la cartera es 16.08%

$$\sigma_P^2 = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\sigma_{12} = (0.3)^2(0.0441) + (0.7)^2(0.0289) + 2(0.3)(0.7)(0.01785) = 0.025627$$
$$\sigma_P = 0.1608$$

Ahora supóngase que se tiene un monto inicial de 1'000,000 de u.m. y se vende en corto el activo S_1 obteniéndose tras la operación 300,000 u.m. adicionales por lo que ahora se tienen 1'300,000 u.m. que se invierten en S_2.

Entonces el peso del activo S_1 es $w_1 = \frac{-300000}{1000000} = -0.3$ que es negativo pues se tomó en préstamo este instrumento y se puede ver como un pasivo.

El peso del activo S_2 es $w_2 = \frac{1300000}{1000000} = 1.3$ pues se han depositado el monto inicial más el monto obtenido de la venta en corto.

Es claro que $w_1 + w_2 = -0.3 + 1.3 = 1$ y se concluye que **una venta en corto implica un peso negativo para ese activo.**

Con éstos nuevos ponderadores o pesos se tiene que el rendimiento es de 11.1% $E[R_P] = w_1 E[R_1] + w_2 E[R_2] = -0.3 * 0.15 + 1.3 * 0.12 = 0.111$ y la desviación estándar es de 19.71%.

$\sigma_P^2 = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\sigma_{12} = (-0.3)^2(0.0441) + (1.3)^2(0.0289) + 2(-0.3)(1.3)(0.01785) = 0.3888$
$\sigma_P = 0.1971$

Hasta este punto, se ha dedicado poca atención a la covarianza entre los activos del mercado pues solo se ha mencionado como parte de una fórmula y no como factor clave para una buena diversificación. La covarianza y la correlación miden de la dependencia de los activos y constituyen la base de la diversificación por lo que se requiere de un estudio algo detallado de tales medidas de dependencia.

Covarianza. Con $i, j \in \{1,2,...,N\}$ sean S_i y S_j los precios de dos activos con rendimientos R_i y R_j. La covarianza entre los activos se define como $\sigma_{ij} = E[(R_i - E[R_i])(R_j - E[R_j])]$ y tiene las características de un producto interior pero se señalan dos propiedades de interés:

1. $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$
2. $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ por lo que la matriz Σ es simétrica.

El signo de la covarianza y la nulidad de la misma proporcionan información sobre la dependencia de los activos S_i y S_j como se indica:

- $\sigma_{ij}>0$ Significa que, en promedio, cuando un activo produce un rendimiento mayor o menor a la media el otro tenderá al mismo patrón. Es decir que S_i acompaña a S_j cuando éste último se aprecia o deprecia.
- $\sigma_{ij}<0$ Significa que, en promedio, cuando un activo produce un rendimiento inferior o superior a su valor medio el otro tenderá a un patrón inverso en cada caso.
- $\sigma_{ij}=0$ En este caso no se puede establecer un vínculo claro sobre los activos.

El estimador de la covarianza es $\hat{\sigma}_{ij} = \dfrac{\sum_{t=1}^{T}(R_{it} - E[R_i])(R_{jt} - E[R_j])}{T}$ para T observaciones donde R_{it} es el rendimiento del activo i en el día t.

Correlación. La covarianza depende de la magnitud de la variable aleatoria por lo que es preferible una medida estandarizada. Tal medida de dependencia se encuentra en la correlación definida como sigue:

$\rho_{ij} = \dfrac{\sigma_{ij}}{\sigma_i\sigma_j}$ además $-1 \le \rho_{ij} \le 1$

Para ejemplificar la importancia de la correlación considérese el portafolio de dos activos S_1 y S_2 con los siguientes datos:

$E[R_1]=0.12$ $\quad E[R_2]=0.15$

$\sigma_1 = 0.17 \Rightarrow \sigma_1^2 = 0.0289$

$\sigma_2 = 0.21 \Rightarrow \sigma_2^2 = 0.0441$

La varianza de la cartera es $\sigma_P^2 = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\sigma_{12}$ y a partir de la igualdad $\sigma_{12}=\sigma_1\sigma_2\rho_{12}$ se obtiene una nueva fórmula para la varianza del portafolio.

$$\sigma_P^2 = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}$$

Si se varían a los pesos de los activos y a la correlación se obtiene la siguiente gráfica:

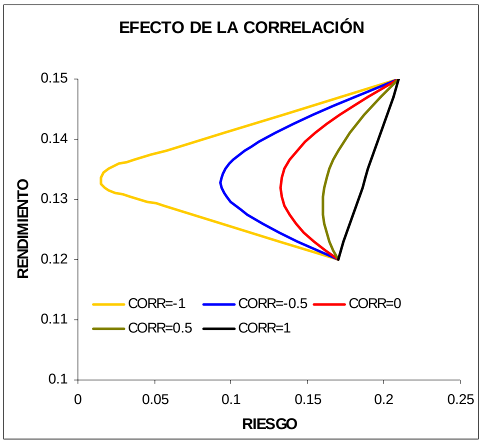

Ilustración 6. Al disminuir la correlación se logran mejores rendimientos para un nivel de riesgo.

Se observa que conforme disminuye la correlación es posible encontrar mejores rendimientos para un nivel de riesgo. Entonces es preferible que las carteras cuenten con activos negativamente correlacionados.

Se ha mencionado que la covarianza tiene las propiedades de un producto interior y ello hace de la correlación una medida de dependencia lineal. La interpretación geométrica de la correlación se puede ver con las siguientes transformaciones en la fórmula $\sigma_P^2 = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}$.

$a = \sigma_P$

$b = w_1\sigma_1$

$c = w_2\sigma_2$

Entonces al utilizar la ley de los cosenos para el triángulo a,b,c se tiene la igualdad $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\theta)$ de la que resulta que $\cos(\theta) = -\rho_{12}$ y θ es el ángulo entre los lados b y c.

La interpretación económica se tiene en que el lado a es la volatilidad de la cartera y que este lado crece al aumentar la correlación. Cuando la correlación es nula se tiene $a^2 = b^2 + c^2$ que es el teorema de Pitágoras y la volatilidad de la cartera se puede ver como la hipotenusa del triángulo.

Debe aclararse que la correlación es una medida de dependencia lineal por lo que tiene limitaciones cuando los activos tienen una relación no lineal como lo sugiere el siguiente ejemplo:

Sean $V_1 \sim U(-1,1)$ y $V_2 = \sqrt{1 - V_1^2}$

Se puede probar que $E[V_1]=0$ y $E[V_1V_2] = 0$ por lo que $\sigma_{V_1V_2} = 0$ y se tienen variables aleatorias con covarianza nula pero que están relacionados de forma no lineal pues $V_1^2 + V_2^2 = 1$.

La varianza de una cartera como función de los pesos

Al inscribir las definiciones de dominancia estocástica se derivó la necesidad de lograr, para una cartera, el menor riesgo dado un nivel de rendimiento esperado. Entonces se tiene un problema de optimización en el que la variable objetivo es la varianza del portafolio y se pueden tener numerosas restricciones como las prohibición de las ventas en corto. El primer paso para resolver este problema de optimización es el estudio de la varianza como función de los pesos de los activos.

La varianza del portafolio es $\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{N} w_i^2\sigma_i^2 + 2\sum_{i\neq j} w_i w_j \sigma_{ij}$ que en forma matricial es $\sigma_P^2 = W'\Sigma W$ donde W es el vector de pesos y Σ es la matriz de varianzas y covarianzas.

Bajo el supuesto de que las entradas de Σ son constantes entonces la varianza está en función de los ponderadores de los activos $\sigma_P^2 = f(w_1, w_2, ..., w_N)$.

A partir de este momento es conveniente un nivel más de abstracción al colocar los rendimientos medios y las ponderaciones de los activos en vectores como se muestra a continuación junto con un vector auxiliar.

$$R = \begin{bmatrix} E[R_1] \\ E[R_2] \\ \vdots \\ E[R_N] \end{bmatrix} \qquad W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix} \qquad I = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Con base en los distintos requerimientos estratégicos o legales existen diferentes problemas de optimización. A continuación se muestran algunos de ellos.

$$\begin{aligned} &min\, \sigma_P^2 = W^{/} \Sigma W \\ &s.a. \\ &W^{/} R = E[R_P] \\ &W^{/} I = 1 \end{aligned}$$

Este problema busca minimizar el riesgo sujeto a un nivel dado de rendimiento y a la restricción de que los ponderadores o pesos sumen la unidad.

$$\begin{aligned} &min\, \sigma_P^2 = W^{/} \Sigma W \\ &s.a. \\ &W^{/} R = E[R_P] \\ &W^{/} I = 1 \\ &w_i \geq 0\ \forall i \end{aligned}$$

En este problema se tienen otras N restricciones al prohibirse las ventas cortas pues como se sabe una venta corta implica un ponderador negativo. Cabe señalar que Markowitz nombró *ilegítimos* a los portafolios con ventas cortas.

Un problema más general es el que obliga a incorporar a los ponderadores en intervalos definidos por las autoridades como sucede en México con las carteras de las SIEFORE.

$$
\begin{aligned}
& min\,\sigma_P^2 = W^{/}\Sigma W \\
& s.a. \\
& W^{/}R = E[R_P] \\
& W^{/}I = 1 \\
& \delta_i \leq w_i \leq \gamma_i \quad \forall i
\end{aligned}
$$

El primer problema se puede resolver mediante el uso de los multiplicadores de Lagrange del cálculo diferencial mientras que los siguientes problemas pertenecen al área de la programación no lineal.

En ambos casos, el estudio de las características de la función objetivo y del conjunto que generan las restricciones es fundamental para construir a la frontera eficiente.

Portafolio eficiente.

Cuando se resuelve alguno de los problemas de optimización arriba descritos entonces se ha determinado un portafolio eficiente. Es decir para un nivel de rendimiento dado se ha obtenido el portafolio de menor riesgo.

Frontera eficiente. Cuando algún problema de optimización para carteras se resuelve para todos los niveles posibles de rendimiento esperado entonces los puntos generados conforman la frontera eficiente siempre y cuando tengan significado económico.

Por simplicidad para la comprensión de temas ulteriores se da la solución del problema en el que se permiten ventas cortas. Para ello, se muestra un breve repaso al análisis de la convexidad y se aplican estas ideas al presente problema financiero.

Análisis convexo

La convexidad es una característica común en los problemas de optimización. La construcción de la frontera eficiente sin activo libre de riesgo conlleva la solución de dos problemas de optimización, a partir las soluciones de tales problemas y en virtud del teorema de dos fondos, que se presenta posteriormente, se obtiene cualquier portafolio eficiente. Las definiciones y resultados siguientes constituyen la justificación matemática de la construcción de la frontera eficiente.

Conjunto convexo. El conjunto $E \subseteq \Re^N$ es convexo si dados $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E \Rightarrow \alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y} \in E$ con $\alpha \in [0,1]$.

De forma intuitiva un conjunto convexo es aquel en el que dados dos puntos del mismo el segmento que los une es un subconjunto de mismo.
El punto $\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y} \in E$ se conoce como combinación convexa y se puede generalizar como $\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 +,..,+\alpha_n\mathbf{x}_n \in E$ para n elementos $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2,..,\mathbf{x}_n \in E$ y para n escalares $\alpha_1, \alpha_2,..,\alpha_n \geq 0$ tales que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.
Como ejemplos de este tipo de conjuntos se tienen en los triángulos, la recta real y en general $\Re^N$ pero también lo es $(\Re^+ \cup \{0\})^N$.

Función convexa. Una función $f : \Re^n \to \Re$ definida en un conjunto convexo E es convexa si para $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ y $\alpha \in [0,1]$ se tiene la siguiente desigualdad:

$$f(\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y}) \leq \alpha f(\mathbf{x}) + (1-\alpha) f(\mathbf{y})$$

En el caso de las funciones doblemente diferenciables en todo el conjunto E el siguiente teorema representa una definición alternativa de función convexa que para los objetivos que se persiguen en estas notas será la adecuada.

Teorema. Sea una función $f : R^N \to R$ doblemente diferenciable definida sobre un conjunto convexo. Esta función es convexa si y solo si tiene matriz hessiano *H(x)* semi-positiva definida.

Ejemplo. La función de la varianza del portafolio $\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \sigma_i^2 + 2\sum_{i \neq j} w_i \sigma_{ij}$ es convexa.

Prueba

$$\frac{\partial \sigma_P^2}{\partial w_i} = 2w_i\sigma_i^2 + 2\sum_{j \neq i} w_j \sigma_{ij} = 2\sum_{j=1}^{N} w_j \sigma_{ij}$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_P^2}{\partial w_j \partial w_i} = 2\sigma_{ij}$$

Esto significa que la primer derivada de la forma cuadrática $\sigma_P^2 = W^{\prime}\Sigma W$ es $2\Sigma W$ y la segunda derivada es 2Σ que es una matriz no singular. Entonces el hessiano de la varianza del portafolio es una matriz positiva definida al ser dos veces la matriz de covarianzas[8] por lo que se puede afirmar que la varianza de una cartera es una función estrictamente convexa.

$$H = 2 * \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$ ■

Teorema. (Unicidad). Dado el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} &min\ f(x) \\ &s.a. \\ &x \in E \end{aligned}$$

En el que $f : \Re^n \to \Re$ es una función estrictamente convexa y el conjunto E es convexo entonces el problema de optimización tiene a lo más un minimizador.

Demostración.

Supóngase que $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \in \mathrm{E}$ son dos soluciones distintas, es decir, $f(\boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{b}) \leq f(\boldsymbol{x})\ \forall \boldsymbol{x} \in \mathrm{E}$ dado que f es convexa entonces $f(\alpha\boldsymbol{a} + (1-\alpha)\boldsymbol{b}) < \alpha f(\boldsymbol{a}) + (1-\alpha)f(\boldsymbol{b}) = f(\boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{b})$ **!** para $\alpha \in (0,1)$.

La contradicción reside en que el punto $\alpha\boldsymbol{a} + (1-\alpha)\boldsymbol{b} \in E$ por lo que existiría un valor menor que el mínimo. ■

A partir de este momento el objetivo es crear la frontera eficiente y para ello se hace uso de los multiplicadores de Lagrange pues ya se sabe que la varianza de un portafolio tiene mínimos únicos.

Frontera eficiente

Como se ha probado, la varianza de una cartera es una función estrictamente convexa por lo que al minimizarla no se encontrarán detalles técnicos con las soluciones encontradas siempre y cuando las restricciones formen un conjunto convexo.

[8] Recuérdese que la matriz de covarianzas es positiva definida.

$$min\, \sigma_P^2 = W^{/} \Sigma W$$
$$s.a.$$
$$W^{/} R = E[R_P]$$
$$W^{/} I = 1$$

Resulta conveniente señalar que minimizar σ_P^2 equivale a minimizar $\frac{1}{2}\sigma_P^2$ por lo que para resolver éste último caso se consideran dos escalares λ_1 y λ_2 en la función de Lagrange.

$$L(w_1,..,w_N,\lambda_1,\lambda_2) = \frac{1}{2} W^{/} \Sigma W + \lambda_1 (E[R_P] - W^{/} R) + \lambda_2 (1 - W^{/} I)$$

La derivada de la forma cuadrática es $2\Sigma W$ por lo que al derivar la función L con respecto a sus argumentos e igualar a cero se tiene:

$$\Sigma W = \lambda_1 R + \lambda_2 I$$
$$E[R_P] = W^{/} R$$
$$1 = W^{/} I$$

La primera de estas últimas tres ecuaciones muestra la forma general de la frontera eficiente y el importante teorema de dos fondos.

$$\Sigma W = \lambda_1 R + \lambda_2 I \Rightarrow W = \lambda_1 \Sigma^{-1} R + \lambda_2 \Sigma^{-1} I$$

A partir de la solución del problema de optimización se obtienen relaciones interesantes y por comodidad se definen los siguientes términos:

$$A = R^{/} \Sigma^{-1} I$$
$$B = R^{/} \Sigma^{-1} R$$
$$C = I^{/} \Sigma^{-1} I$$
$$D = BC - A^2$$

Si se multiplica por la izquierda a la solución por el vector de rendimientos transpuesto y por el vector $I^{/}$ entonces se tiene

$$R^{/} W = \lambda_1 R^{/} \Sigma^{-1} R + \lambda_2 R^{/} \Sigma^{-1} I$$
$$I^{/} W = \lambda_1 I^{/} \Sigma^{-1} R + \lambda_2 I^{/} \Sigma^{-1} I$$

En realidad lo que se obtuvo es un sistema de ecuaciones cuyas soluciones conducen a la interpretación geométrica de la frontera eficiente.

$$\begin{aligned} B\lambda_1 + A\lambda_2 &= E[R_P] \\ A\lambda_1 + C\lambda_2 &= 1 \end{aligned} \quad \text{donde } \lambda_1 = \frac{CE[R_P] - A}{D} \text{ y } \lambda_2 = \frac{B - AE[R_P]}{D}.$$

Al multiplicar por la izquierda con el vector transpuesto de ponderadores a la igualdad $\Sigma W = \lambda_1 R + \lambda_2 I$ se obtiene una identidad para la varianza da la cartera.

$$W' \Sigma W = \lambda_1 W' R + \lambda_2 W' I$$

$$\sigma_P^2 = \lambda_1 E[R_P] + \lambda_2 = \frac{CE[R_P]^2 - AE[R_P]}{D} + \frac{B - AE[R_P]}{D}$$

$$\sigma_P^2 = \frac{CE[R_P]^2}{D} - \frac{2AE[R_P]}{D} + \frac{B}{D}$$

Esta última igualdad corresponde a una parábola en el plano media-varianza. El mínimo de esta función se obtiene a través de la derivada de la varianza con respecto al rendimiento medio.

$$\frac{d\sigma_P^2}{dE[R_P]} = 2\frac{CE[R_P] - A}{D} = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} E^g[R_P] = \dfrac{A}{C} \\ \sigma_P^{g2} = \dfrac{1}{C} \end{array}$$

donde el superíndice g indica que se trata del portafolio de varianza mínima global.

El mismo resultado se obtiene considerando a la frontera eficiente como una hipérbola en el plano desviación típica – rendimiento.

$$\sigma_P^2 = \frac{CE[R_P]^2}{D} - \frac{2AE[R_P]}{D} + \frac{B}{D} \Leftrightarrow \frac{C}{D}\left(E[R_P]^2 - 2\frac{A}{C}E[R_P] + \frac{A^2}{C^2} \right) + \frac{1}{C} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sigma_P^2}{\frac{1}{C}} - \frac{\left(E[R_P] - \frac{A}{C} \right)}{\frac{D}{C^2}} = 1$$

Portafolio de mínima varianza global

El portafolio que se ubica en los vértices de la parábola y la hipérbola es la combinación de activos de menor riesgo independientemente del rendimiento que se desee.

El rendimiento, la varianza y la desviación estándar de esta cartera son:

$E^g[R_P]$

σ_P^{g2}

σ_P^g

El vector de ponderadores de este portafolio se denotará como W^g y para determinarlo se deben hallar los multiplicadores de Lagrange correspondientes a $E^g[R_P]$ y ellos son:

$\lambda_1^g = 0$ $\lambda_2^g = \dfrac{1}{C} \Rightarrow W^g = \dfrac{\Sigma^{-1} I}{C}$ a partir de la solución $W = \lambda_1 \Sigma^{-1} R + \lambda_2 \Sigma^{-1} I$.

Teorema de dos fondos. Los vectores de ponderadores de dos carteras eficientes pueden ser establecidas de tal manera que cualquier cartera eficiente se genera a partir de esas dos carteras iniciales. Ello significa que se puede crear la frontera eficiente a partir de dos fondos.

$$W = \alpha W^d + (1-\alpha) W^g$$

Demostración.

Los ponderadores de las carteras eficientes toman la forma

$$W = \lambda_1 \Sigma^{-1} R + \lambda_2 \Sigma^{-1} I$$

Haciendo $W^d = \dfrac{\Sigma^{-1} R}{A}$ y $W^g = \dfrac{\Sigma^{-1} I}{C}$ se tiene que $W = \lambda_1 A W^d + \lambda_2 C W^g$ en la que como ya se observó $\lambda_1 A + \lambda_2 C = 1$.

Haciendo $\alpha = \lambda_1 A \Rightarrow 1 - \alpha = \lambda_2 C$ se tiene el resultado deseado por lo que cualquier vector de ponderadores de una cartera eficiente es combinación lineal de otras dos carteras eficientes. ■

Uso de la técnica de carteras de inversiones

Con el ánimo de mostrar la técnica se ha diseñado una cartera de tres activos y en ella se aplican las técnicas desarrolladas en los parágrafos anteriores.

Supóngase una economía con tres activos riesgosos cuyos rendimientos y matriz de covarianzas se presentan a continuación:

$$E[R_1] = 0.14 \qquad E[R_2] = 0.11 \qquad E[R_3] = 0.13$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.23 & 0.02 & -0.10 \\ 0.02 & 0.15 & 0.10 \\ -0.10 & 0.10 & 0.17 \end{bmatrix} \Rightarrow \Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 9.71 & -8.39 & 10.64 \\ -8.39 & 18.22 & -15.65 \\ 10.64 & -15.65 & 21.35 \end{bmatrix}$$

El primer paso consiste en determinar las constantes A,B,C y D para luego determinar los vectores W^d y W^g.

$$A = \begin{bmatrix} 0.14 & 0.11 & 0.13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9.71 & -8.39 & 10.64 \\ -8.39 & 18.22 & -15.65 \\ 10.64 & -15.65 & 21.35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3.1584$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.14 & 0.11 & 0.13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9.71 & -8.39 & 10.64 \\ -8.39 & 18.22 & -15.65 \\ 10.64 & -15.65 & 21.35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.14 \\ 0.11 \\ 0.13 \end{bmatrix} = 0.4829$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9.71 & -8.39 & 10.64 \\ -8.39 & 18.22 & -15.65 \\ 10.64 & -15.65 & 21.35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 22.4796$$

$$D = BC - A^2 = 0.2053$$

$$W^d = \frac{\begin{bmatrix} 9.71 & -8.39 & 10.64 \\ -8.39 & 18.22 & -15.65 \\ 10.64 & -15.65 & 21.35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.14 \\ 0.11 \\ 0.13 \end{bmatrix}}{A} = \begin{bmatrix} 0.5761 \\ -0.3816 \\ 0.8055 \end{bmatrix}$$

$$W^{g}=\frac{\begin{bmatrix}9.71 & -8.39 & 10.64\\ -8.39 & 18.22 & -15.65\\ 10.64 & -15.65 & 21.35\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}}{C}=\begin{bmatrix}0.5321\\ -0.2591\\ 0.7270\end{bmatrix}$$

Observaciones:

- $w_1^g + w_2^g + w_3^g = 0.5321 - 0.2591 + 0.7270 = 1$.
- Se vende en corto el activo 2 y los ingresos procedentes de esta operación se envían a los activos 1 y 3.

El rendimiento mínimo y la varianza mínima independiente del rendimiento esperado del portafolio es:

$$\sigma_P^{g\,2}=\begin{bmatrix}0.5321 & -0.2591 & 0.7270\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.23 & 0.02 & -0.10\\ 0.02 & 0.15 & 0.10\\ -0.10 & 0.10 & 0.17\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.5321\\ -0.2591\\ 0.7270\end{bmatrix}=0.0445$$

La pareja $(\sigma_P^g, R_P^g)=(0.2110\ ,\ 0.1405)$ es el primer punto de la frontera eficiente.

Por el teorema de dos fondos se construye la frontera eficiente a partir de la siguiente combinación lineal como se muestra en la ilustración 7:

$$W^{\alpha}=\alpha\begin{bmatrix}0.5761\\ -0.3816\\ 0.8055\end{bmatrix}+(1-\alpha)\begin{bmatrix}0.5321\\ -0.2591\\ 0.7270\end{bmatrix}\qquad \alpha\in\Re$$

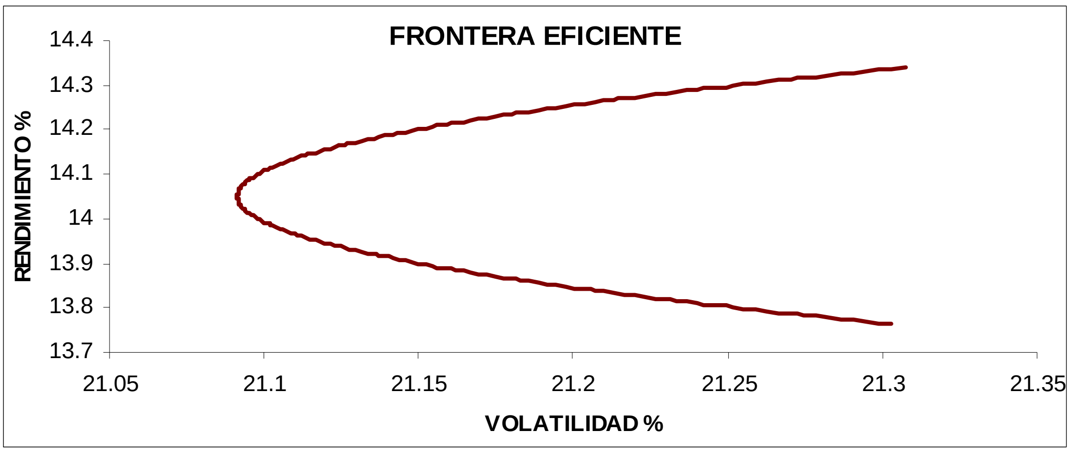

Ilustración 7. La frontera eficiente es una hipérbola en el plano volatilidad – rendimiento.

Utilidad esperada y carteras eficientes

Para conocer cuál portafolio de la frontera eficiente debe considerarse al momento de invertir se hace uso de las curvas de indiferencia de la utilidad esperada.

El punto de tangencia entre alguna curva de indiferencia y la frontera eficiente será el que el individuo dominará en forma estocástica a las demás y será la mejor elección del individuo.

Es así como la utilidad esperada permite la toma de decisiones entre portafolios de inversión eficientes y se justifica la primer parte de este material. El mismo proceso se encuentra al construir la Línea del Mercado de Capitales en los parágrafos siguientes.

La suposición de rendimientos gaussianos permite que los individuos tengan distintas funciones de utilidad y por tanto diferentes puntos de tangencia con la frontera eficiente. Una vez más, esta situación es de gran importancia en los modelos de equilibrio como se apreciará con el CAPM.

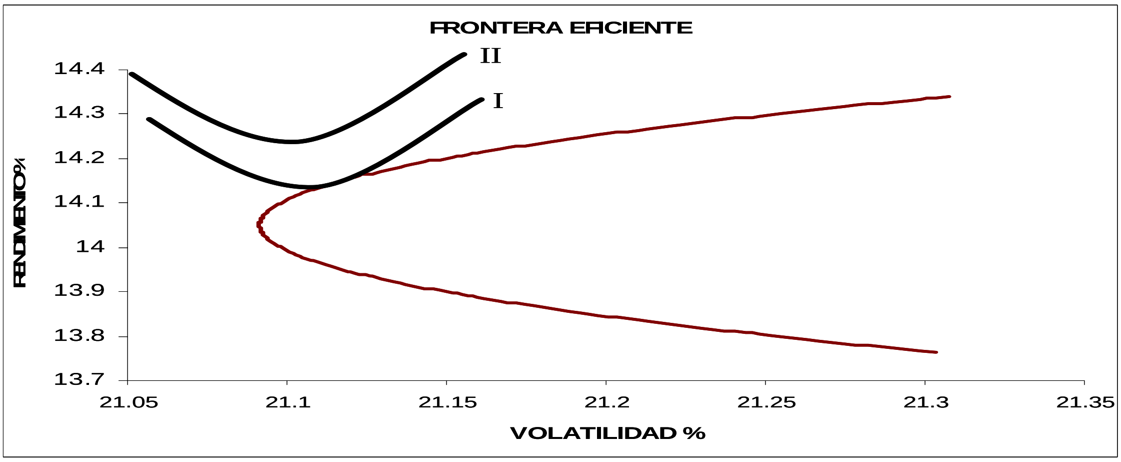

Ilustración 8. Se elige el portafolio tangente a alguna curva de indiferencia de la utilidad esperada.

Inclusión del activo libre de riesgo

Hasta este punto se han tratado únicamente activos riesgosos como acciones mas puede incluirse un activo libre de riesgo como el T-bill, una cuenta bancaria o los Cetes de México.

El activo libre de riesgo es denotado por S_0 por lo que se tienen ahora $N+1$ instrumentos. Este activo libre de riesgo ofrece un rendimiento conocido R_L.

Con la inclusión de este activo es de interés saber si existen alteraciones en la frontera eficiente pues ahora se puede crear una cartera con un portafolio de activos riesgosos y el activo libre de riesgo.

La respuesta a esta inquietud se obtiene al resolver un nuevo problema de optimización. Se hace el supuesto adicional de que se puede prestar y pedir en préstamo a la tasa libre de riesgo.

$$max\,Tan(\theta) = \frac{E[R_P] - R_L}{\sigma_P}$$

Para determinar la frontera eficiente con activos riesgosos y con la tasa libre de riesgo se debe maximizar la tangente del ángulo formado por la recta que une a la tasa libre de riesgo y a cualquier portafolio de activos riesgosos.

$$Tan(\theta) = \frac{\sum_{i=1}^{N} w_i(E[R_i] - R_L)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_i w_j \sigma_{ij}}}$$ esta expresión se deriva con respecto a w_i para luego igualarse a cero.

$$\frac{\partial Tan(\theta)}{\partial w_i} = \frac{\sigma_P(E[R_i] - R_L) - \dfrac{\sum_{i=1}^{N} w_i(E[R_i] - R_L)\sum_{j=1}^{N} w_j \sigma_{ij}}{\sigma_P}}{\sigma_P^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} w_i(E[R_i] - R_L)\sum_{j=1}^{N} w_j \sigma_{ij}}{\sigma_P^2} = E[R_i] - R_L$$

$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^{N} w_i(E[R_i] - R_L)}{\sigma_P^2} \Rightarrow \sum_{j=1}^{N} \xi w_j \sigma_{ij} = E[R_i] - R_L \quad \forall i$$

Si se hace $v_j = \xi w_j$ entonces se puede expresar el sistema que se resuelve fácilmente como se observa.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \cdots & \sigma_N^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E[R_i] - R_L \\ E[R_i] - R_L \\ \vdots \\ E[R_N] - R_L \end{bmatrix}$$

Sin embargo, los valores obtenidos de la solución de este sistema no pueden considerarse como ponderadores o pesos por lo que deben normalizarse para así conseguir los ponderadores del portafolio de mercado W^M con entradas $w_i^M = \frac{v_i}{\sum_{i=1}^{N} v_i} \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} w_i^M = 1$.

A partir de estos porcentajes se determina la volatilidad σ_M y el rendimiento medio del mercado $E[R_M]$ para luego construirse la **línea del mercado de capitales** (LMC) junto con la tasa libre de riesgo. La pendiente de la LMC es $\frac{E[R_M] - R_L}{\sigma_M}$ y la ecuación en la forma punto y pendiente es $E[R_P] = R_L + \frac{E[R_M] - R_L}{\sigma_M}\sigma_P$.

Teorema de un fondo

Todo portafolio en la línea del mercado de capitales se construye a partir de una combinación lineal entre el portafolio de mercado y el activo libre de riesgo.

Demostración.

Este resultado se obtiene al dar solución por medio de multiplicadores de Lagrange al problema de optimización

$$\begin{aligned} &\min \sigma_P^2 = W' \Sigma W \\ &s.a. \\ &\tilde{W}'\tilde{R} = E[R_P] \\ &\tilde{W}'\tilde{I} = 1 \end{aligned}$$

donde $\tilde{W} = \begin{bmatrix} w_0 \\ W \end{bmatrix}$ $\quad \tilde{R} = \begin{bmatrix} R_L \\ R \end{bmatrix}$ $\quad \tilde{I} = \begin{bmatrix} 1 \\ I \end{bmatrix}$

Con base en estos vectores se obtienen dos las siguientes igualdades:

$$\Sigma W = \lambda_1 R + \lambda_2 I$$

$$-\lambda_2 - \lambda_1 R_L = 0$$

Aplicando trucos matemáticos se obtiene que cada vector de la LMC es de la forma

$$\widetilde{W} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + (1-\alpha) \begin{bmatrix} 0 \\ w_1^M \\ \vdots \\ w_N^M \end{bmatrix} \qquad \alpha \in \Re \qquad \blacksquare$$

En la ilustración 9 se observa la combinación entre la tasa libre de riesgo de 10% y los portafolios de la frontera eficiente de la economía de tres activos antes descrita. El resultado es la Línea del Mercado de Capitales (LMC).

Suponiendo los mismos datos de la economía de tres activos se agrega una tasa libre de riesgo de 10% y se determina la LMC como se observa.

$$\begin{bmatrix} 0.23 & 0.02 & -0.10 \\ 0.02 & 0.15 & 0.10 \\ -0.10 & 0.10 & 0.17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.14-0.10 \\ 0.11-0.10 \\ 0.13-0.10 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6237 \\ -0.6230 \\ 0.9098 \end{bmatrix}$$

Como se observa $v_1 + v_2 + v_3 = 0.6237 - 0.6230 + 0.9098 = 0.9105 \neq 1$ por lo que se normaliza para obtener los ponderadores de la cartera de mercado y con ello dar solución al problema.

$$w_1^M = \frac{0.6237}{0.9105} = 0.6850 \quad w_2^M = \frac{-0.6230}{0.9105} = -0.6842 \quad \text{y} \quad w_3^M = \frac{0.9098}{0.9105} = 0.9992 .$$

Con base en éstos ponderadores se obtiene el rendimiento del mercado $E[R_M] = 0.14 * 0.6850 + 0.11 * (-0.6842) + 0.13 * 0.9992 = 0.1505$ junto con la volatilidad $\sigma_M = 0.2356$. La línea del mercado de capitales tiene la siguiente ecuación $R_P = 0.10 + \frac{0.1505 - 0.10}{0.2356} \sigma_P$.

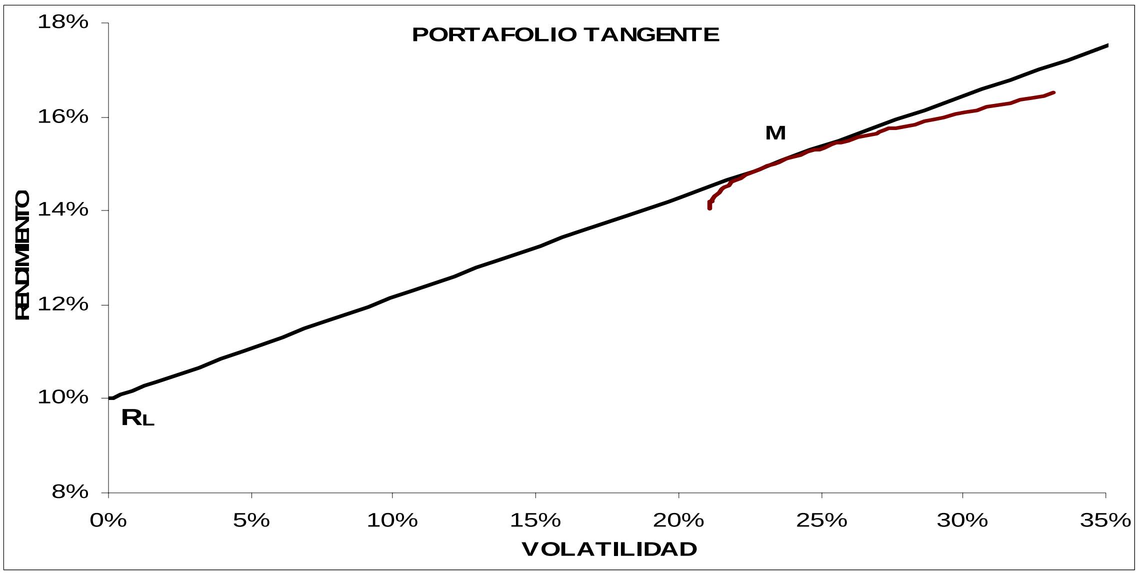

Ilustración 9. El activo libre de riesgo da lugar a la Línea del Mercado de Capitales.

5 MODELO DE VALUACIÓN DE ACTIVOS DE CAPITAL (CAPM)

El modelo de valuación de activos de capital (CAPM en adelante) busca explicar el rendimiento de un activo en términos del riesgo de mercado considerando, entre otros supuestos, que los inversionistas de la economía conforman sus portafolios de acuerdo a la teoría moderna del portafolio y que cuentan con expectativas homogéneas.

Limitaciones de la diversificación.

La diversificación es de gran utilidad para disminuir el riesgo de una cartera de inversiones. No obstante, este mecanismo de tratamiento de riesgo se encuentra limitado como se puede ver al construir el siguiente portafolio: Supóngase un conjunto de N activos riesgosos tales que por parejas tienen la covarianza promedio cov_m que se asume positiva, la varianza de cada activo es la misma para todos y la ponderación del $i-ésimo$ activo es $\frac{1}{N}=w_i$. Entonces la varianza de ésta cartera es constante en el límite.

$$\sigma_N^2=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{N}\right)^2\sigma^2+2\sum_{i\neq j}\frac{1}{N}\frac{1}{N}cov_m=\left(\frac{1}{N}\right)^2\sum_{i=1}^{N}\sigma^2+\frac{2}{N^2}\sum_{i\neq j}cov_m=\frac{\sigma^2}{N}+\left(1-\frac{1}{N}\right)cov_m$$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\sigma^2}{N}+\left(1-\frac{1}{N}\right)cov_m=cov_m$$

Esto significa que mientras mayor sea el número de activos la varianza de la cartera disminuye pero la diversificación está limitada por lo que siempre existe riesgo sin importar el número de activos de una cartera de activos riesgosos. Esta observación da lugar a las siguientes definiciones de riesgo:

Riesgo diversificable.

Es aquel que es potencialmente eliminado por la diversificación y proviene de las características particulares de una emisora. Es importante notar que el portafolio de mercado tiene la máxima diversificación posible por lo que el riesgo restante da lugar al riesgo sistemático.

Riesgo sistemático.

Es aquel que la diversificación no puede eliminar debido a que se deriva de factores que afectan a toda la economía como los cambios políticos.

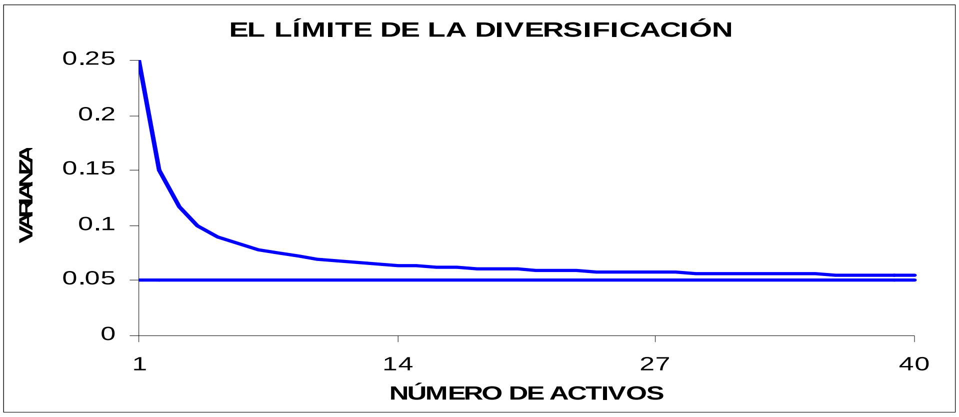

Ilustración 10. Riesgo diversificable y riesgo sistemático.

Entonces el riesgo total o específico de la un instrumento es igual al agregado del riesgo diversificable más el riesgo sistemático.

Riesgo Total = Riesgo diversificable + Riesgo sistemático.

En una economía en la que los inversionistas hacen uso de la diversificación para conformar sus carteras los activos financieros únicamente deben pagar un diferencial por el riesgo sistemático pues la diversificación se ha llevado al límite.

El CAPM vincula la prima por riesgo sistemático de un activo financiero con la prima del portafolio de mercado mediante una relación lineal. Una generalización a éste modelo se encuentra en el Arbitrage Pricing Theory. En los parágrafos siguientes se muestran dos derivaciones del CAPM además del tratamiento de la inflación, impuestos, consumo y el Modelo del Índice Único (MIU) como alternativa para la construcción de la frontera eficiente.

Supuestos del CAPM

- Los inversionistas deciden con base en el criterio de media-varianza con rendimientos distribuidos en forma normal.
- Los inversionistas tienen un mismo horizonte de tiempo.
- Los inversionistas tienen expectativas homogéneas sobre los retornos de los activos lo que significa que ven la misma frontera eficiente.
- El mercado es eficiente.
- Existe un instrumento libre de riesgo a cuya tasa los inversionistas pueden prestar y pedir prestado cantidades ilimitadas.
- El mercado es perfecto

Algunos de estos supuestos se pueden debilitar para obtener extensiones del CAPM pero de entre todos ellos es fundamental el que hace referencia a la homogeneidad de las expectativas de los rendimientos de los activos debido a que posibilita la eficiencia del portafolio de mercado.

Derivación del CAPM

Considérense M participantes en el mercado de capitales. Sea X_i la riqueza inicial del *i-ésimo* inversionista $i=1,2,...,M$.

El equilibrio económico se alcanza cuando son iguales la oferta y la demanda de algún satisfactor. El CAPM es un modelo de equilibrio debido a que considera esta situación. En éste modelo, la demanda es la suma ponderada de todos los portafolios pertenecientes a los M inversionistas mientras que la oferta se aprecia en el portafolio de mercado.

Demanda

Sea $\vec{W}_i$ el vector de ponderadores de la cartera del *i-ésimo* inversionista entonces $\vec{W}^D = \frac{1}{X}\sum_{i=1}^{M} X_i \vec{W}_i$ es el vector de ponderadores de la demanda total con $X = \sum_{i=1}^{M} X_i$.

Con base en el teorema de un fondo se tiene que el vector de la demanda total es $\vec{W}^D = \frac{\sum_{i=1}^{M} X_i \alpha_i}{X}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\sum_{i=1}^{M}(1-\alpha_i)X_i}{X}\begin{bmatrix} 0 \\ w_1^M \\ \vdots \\ w_N^M \end{bmatrix}$.

Además $\frac{\sum_{i=1}^{M} X_i \alpha_i}{X} + \frac{\sum_{i=1}^{M}(1-\alpha_i)X_i}{X} = 1$ por lo que al hacer $\alpha^D = \frac{\sum_{i=1}^{M} X_i \alpha_i}{X}$ se tiene que el vector de ponderadores de la demanda total pertenece a la LMC.

Para el vector W^D se hace uso de las igualdades siguientes para obtener el valor del primer multiplicador de Lagrange.

$$\Sigma W^D = \lambda_1 R + \lambda_2 I$$
$$-\lambda_2 - \lambda_1 R_L = 0$$
$$\Sigma W^D = \lambda_1 (R - R_L I)$$
$$W^{D/} \Sigma W^D = \lambda_1 (E[R_P] - R_L)$$
$$\frac{\Sigma W^D}{W^{D/} \Sigma W^D} = \frac{R - R_L I}{E[R_P] - R_L}$$

Oferta

La oferta total está dada por el portafolio de mercado W^M.

El equilibrio

El equilibrio se tiene cuando $W^M = W^D$ por lo que a partir de la igualdad se obtiene el CAPM para toda la economía.

$$W^D = W^M \Rightarrow \frac{\Sigma W^M}{W^{M/} \Sigma W^M} = \frac{R - R_L I}{E[R_P] - R_L} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_N \end{bmatrix} \left(E[R_P] - R_L\right) + \begin{bmatrix} R_L \\ R_L \\ \vdots \\ R_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E[R_1] \\ E[R_2] \\ \vdots \\ E[R_M] \end{bmatrix}$$

La *i-ésima* entrada del vector ΣW^D es la covarianza entre el rendimiento R_i y el rendimiento del mercado R_M y $\beta_i = \frac{cov(R_i, R_M)}{\sigma_M^2}$.

La beta y aplicaciones

La beta de un activo es una medida de riesgo sistemático y ayuda a evidenciar la sensibilidad al riesgo de mercado de una acción.

Si la beta de un activo es mayor que la unidad entonces el rendimiento de dicho activo, en promedio, mostrará un incremento o decremento más que proporcional con respecto al portafolio de mercado.

Cuando la beta del activo es menor que la unidad entonces el rendimiento del activo acompañará en forma menos que proporcional al rendimiento del portafolio de mercado.

En el caso de que el activo cuente con beta unitaria entonces el rendimiento del activo se moverá, en promedio, en la misma proporción que el portafolio de mercado.
La estimación de la beta requiere del rendimiento del portafolio de mercado. Éste último, no puede ser determinado en forma exacta pero existen variables proxy que permiten simularlo. Dichas variables proxy son los índices accionarios como el S&P 500 de Estados Unidos y en el caso mexicano se tiene al Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores que contempla un grupo de alrededor de 35 acciones, ratificadas o sustituidas cada año, con ponderadores que varían en tiempo real.

Una vez que se tiene un aproximado del portafolio de mercado se puede determinar la beta a partir de la definición de la misma o mediante una regresión lineal en la que se considera que el rendimiento de un activo depende en forma lineal del rendimiento del portafolio de mercado.

El CAPM encuentra aplicaciones en la vida real para determinar el costo de capital de una firma. El WACC (Weighted Average Cost of Capital) es el promedio ponderado del costo de capital propio y el costo de capital de la deuda financiera.

$$WACC = K_d \frac{d}{d+e} + K_e \frac{e}{d+e}$$

donde

K_d es el costo de capital de la deuda financiera
K_e es el costo de capital propio
d es el valor de mercado de la deuda financiera
e es el valor de mercado del capital contable de la firma

En particular, la beta sirve para estimar el costo de capital propio K_e que en el caso mexicano toma la siguiente forma:

$K_e=R_L+\beta(E[R_M]-R_L)*RVA+Rsm+RP$

Donde

R_L es la tasa que pagan los bonos del tesoro a 30 años
β se determina con respecto al índice S&P 500
$E[R_M]$ es el rendimiento medio del S&P 500
RVA es un ajuste por una inversión fuera del entorno de Estados Unidos
Rsm es un premio que debe considerarse por el tamaño de la firma
RP es el riesgo país de los eurobonos mexicanos

El CAPM es un modelo que cuenta con extensiones y críticas sobre las hipótesis tan restrictivas que maneja pues como se ha visto en el costo de capital propio se deben hacer ajustes al CAPM teórico. No obstante el modelo es aún vigente.

APÉNDICE

La distribución normal

Se dice que la variable aleatoria X sigue una distribución normal con parámetros μ y σ de localización y de escala respectivamente si la función de densidad tiene la siguiente forma

$$n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$
$$-\infty < \mu < \infty$$
$$\sigma > 0$$

Cuando X tiene una distribución normal con sus respectivos parámetros se denota como $X \sim N(\mu,\sigma)$.

Si se realiza la transformación $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ se obtiene que $Z \sim N(0,1)$ y Z se conoce como normal estándar. Si se tiene a Z, la transformada $X=\sigma Z+\mu$ conduce a la normal X original.

Por conveniencia, a continuación se utiliza la variable Z para derivar resultados sobre cualquier variable normal X.

Teorema. Sea $Z \sim N(0,1)$. Entonces todos los momentos de esta variable son finitos.

P.D. $E[Z^n] < \infty \quad \forall n \in N$

Demostración.

$$E[|Z|^n] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |z|^n e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} z^n e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Si se hace el cambio de variable $y = \frac{z^2}{2}$ se obtiene la siguiente expresión en la que Γ denota la función gama.

$$E[|Z|^n] = \frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} y^{\frac{n-1}{2}} e^{-y} dy = \frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) < \infty \qquad \blacksquare$$

Resultado 1. Si n es impar entonces $E[Z^n]=0$.

$$E[Z^n] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^n e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0$$

Esto debido a que $f(z) = z^n e^{-\frac{z^2}{2}}$ es una función impar. ■

Resultado 2. Si n es par entonces $E[Z^n] = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (n-1)$

$$E[Z^n] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^n e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} y^{\frac{n-1}{2}} e^{-y} dy = \frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2} \right)$$

Por inducción sobre $k \in N$ tal que $n=2k$ se prueba que $\frac{2^k}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(k + \frac{1}{2} \right) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k-1)$ ■

Una vez que se han obtenido resultados para la normal estándar es posible encontrar otros resultados para una normal cualquiera.

Sean $m_n = E[Z^n]$ y $X \sim N(\mu,\sigma)$.

Si se recuerda que $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ entonces $m_n = E[Z^n] = E\left[\frac{(X-\mu)^n}{\sigma^n} \right]$.

Son de interés los valores de m_3 y m_4 pues conducen a los valores del sesgo y curtosis de una normal cualquiera.

Caso particular $n=3$

Por el resultado 1 $m_3 = 0 = E\left[\frac{(X-\mu)^3}{\sigma^3} \right] \Rightarrow k_3 = \frac{E\left[(X-\mu)^3\right]}{\sigma^3} = 0$ y por tanto se tiene otro resultado:

Resultado 3. El sesgo k_3 de una variable aleatoria normal cualquiera es cero.

Caso particular $n=4$

Por el resultado 2 $m_4 = 3 \cdot 1 = E\left[\frac{(X-\mu)^4}{\sigma^4} \right] \Rightarrow k_4 = \frac{E\left[(X-\mu)^4\right]}{\sigma^4} = 3$ esto conduce a otro resultado importante en el estudio de series de tiempo financieras.

Resultado 4. La curtosis de una variable aleatoria normal cualquiera es igual a tres.

A partir de la igualdad $X=\sigma Z+\mu$ se tiene que $X^n = (\sigma Z + \mu)^n$ y con base en el binomio de Newton

$$(\sigma Z + \mu)^n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j \sigma^{n-j} Z^{n-j} \mu^j \quad \text{donde } C_n^j = \frac{n!}{(n-j)!\,j!}$$

Entonces se tiene el siguiente resultado:

Resultado 5. El *n-ésimo* momento de una variable aleatoria normal está en función de los valores de la media μ y de la desviación estándar σ. Es decir que todo momento superior al segundo de una variable aleatoria normal cualquiera depende únicamente de los dos primeros momentos.

P.D. $E[X^n] = f(\mu,\sigma)$

Demostración

Si se toma esperanza a la expresión $(\sigma Z + \mu)^n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j \sigma^{n-j} Z^{n-j} \mu^j$ entonces por la linealidad de la misma se tiene el resultado deseado.

$$E[X^n] = \sum_{j=0}^{n} (C_n^j \sigma^{n-j} E[Z^{n-j}] \mu^j) = \sum_{j=0}^{n} \left(C_n^j \sigma^{n-j} m_{n-j} \mu\right) = f(\mu,\sigma) \quad \blacksquare$$

Este quinto resultado es fundamental cuando se unen las ideas de función de utilidad y rendimiento que se distribuye en forma normal.

MERCADOS

MERCADO PERFECTO

Un mercado de capitales es perfecto cuando son ciertas las siguientes condiciones:

- El mercado es libre de fricciones; es decir que no existen costos de transacción o impuestos, todos los activos son perfectamente divisibles y líquidos además de que no existen restricciones legales.
- Existe competencia perfecta en los mercados de mercancías y valores.
- La información es recibida por todos los individuos y no tiene costo

- Los individuos son racionales y buscan maximizar su utilidad esperada.

MERCADO EFICIENTE

Un mercado de capitales eficiente permite la transferencia de activos con una pequeña pérdida de riqueza por lo que se integra en el concepto de eficiencia en el sentido de Pareto. Un mercado es de éste tipo cuando los precios de los activos financieros en comercializados en él reflejan toda la información disponible y por lo tanto son precios justos.

Existen tres formas de eficiencia a saber:

1. **Forma débil de eficiencia**. En esta circunstancia ningún individuo puede obtener ganancias extraordinarias al seguir estrategias de inversión basadas en la información histórica de los precios. Es decir que los precios descuentan la información pasada.
2. **Forma semifuerte de eficiencia**. En esta forma de eficiencia ningún inversionista obtiene rendimientos extraordinarios a través de reglas generadas a partir de la información pública disponible por lo que se dice que los precios descuentan esa información pública.
3. **Forma fuerte de eficiencia**. En este tipo de eficiencia ningún individuo puede ganar rendimientos por encima del mercado cualquier información. Por lo que los precios reflejan toda la información.

REFERENCIAS

Copeland & Weston. (1988). *Financial Theory and Corporate Policy*. Addison Wesley.
Elton, Edwin J., **Gruber** Martin J.(1995). *Modern Portafolio Theory and Investment Analysis*. John Wiley & Sons.
Heyman, Timothy. (1998). *Inversión en la Globalización*. IMEF, Milenio, IMCP, ITAM y BMV.